

Автор: Володина Ю.Н.

ЗАДАЧА О МЕСТОПОЛОЖЕНИИ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ:

- Примеры задач
- Правила решения
- Особенности
- Решение двух задач

Примеры задач:

- При каких a уравнение

$$(a - 1)x^2 - (a + 2)x + 3a - 1 = 0$$

имеет два различных корня больших 1?

- При каких a корни уравнения

$$(a + 2)x^2 + ax - 8a + 4 = 0$$

находятся в промежутке $[0 ; 4]$?

- При каких a корни уравнения

$$x^2 + (3a - 2)x + 2a - 5 = 0$$

удовлетворяют условию: $x_1 < 3 < x_2$?

ПРАВИЛА РЕШЕНИЯ :

Чтобы решить задачу такого типа нужно учесть четыре условия:

- 1) Направление ветвей параболы, являющейся графиком функции, стоящей в левой части уравнения.
- 2) Знак дискриминанта.
- 3) Абсцисса вершины (сравнивается с интересующими нас точками).
- 4) Значение функции, стоящей в левой части уравнения (сравнивается с нулем).

ОСОБЕННОСТИ:

- Если старший коэффициент содержит параметр, то необходимо рассматривать случай, когда он равен нулю. В этом случае уравнение становится линейным и решается как линейное.
- Если старший коэффициент содержит параметр, то в случае, когда он не равен нулю, можно разделить обе части уравнения на этот коэффициент, и тогда ветви параболы будут направлены вверх.
- Если ветви параболы направлены вверх, и имеется хотя бы одно отрицательное значение функции, то дискриминант автоматически будет положительным. В этом случае сравнивать его с нулем нет необходимости.

ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

- При каких a корни уравнения

$$(2a-1)x^2 - 2ax + 2a = 0$$

положительны?

1 случай: $2a-1=0$

$$a=1/2$$

В этом случае уравнение является линейным. Подставим $1/2$ в уравнение вместо a и посмотрим, что получится:

$$2 * \frac{1}{2}x + 2 * \frac{1}{2} = 0$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

При $a=1/2$ уравнение имеет один отрицательный корень, значит $a=1/2$ не удовлетворяет условию задачи.

2 случай: $a \neq \frac{1}{2}$

В этом случае уравнение является квадратным.
Разделим обе части уравнения на $2a-1$:

$$x^2 - \frac{2a}{2a-1}x + \frac{2a}{2a-1} = 0$$

Рассмотрим функцию: $y = x^2 - \frac{2a}{2a-1}x + \frac{2a}{2a-1}$

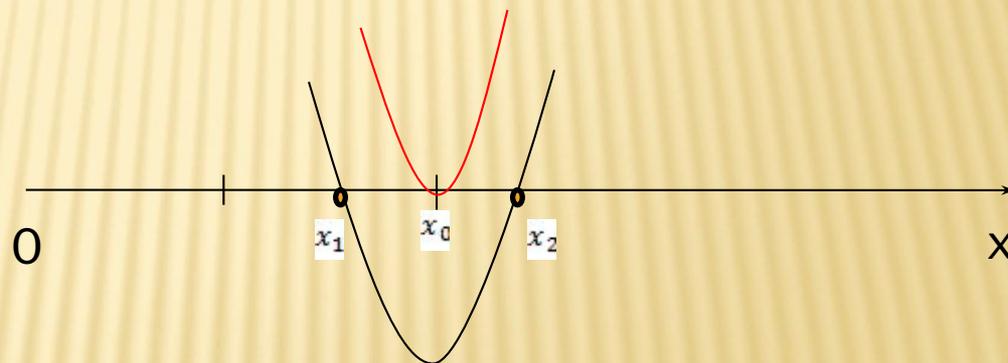
Это квадратичная функция, график - парабола.

$$\begin{cases} \geq 0 \\ > 0 \\ 0) > 0 \end{cases}$$

$$\frac{4a^2}{(2a-1)^2} - 4 \frac{2a}{2a-1} \geq 0$$

$$\frac{2a}{-1)^2} > 0$$

$$\frac{2a}{-1)^2} > 0$$



□ Решив систему, получим ответ.

$$\begin{cases} \frac{a^2}{(2a-1)^2} - \frac{2a}{2a-2} \geq 0 \\ \frac{a}{2a-1} > 0 \\ \frac{2a}{2a-1} > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{a^2 - 2a(2a-1)}{(2a-1)^2} \geq 0 \\ \frac{a}{2a-1} > 0 \end{cases};$$

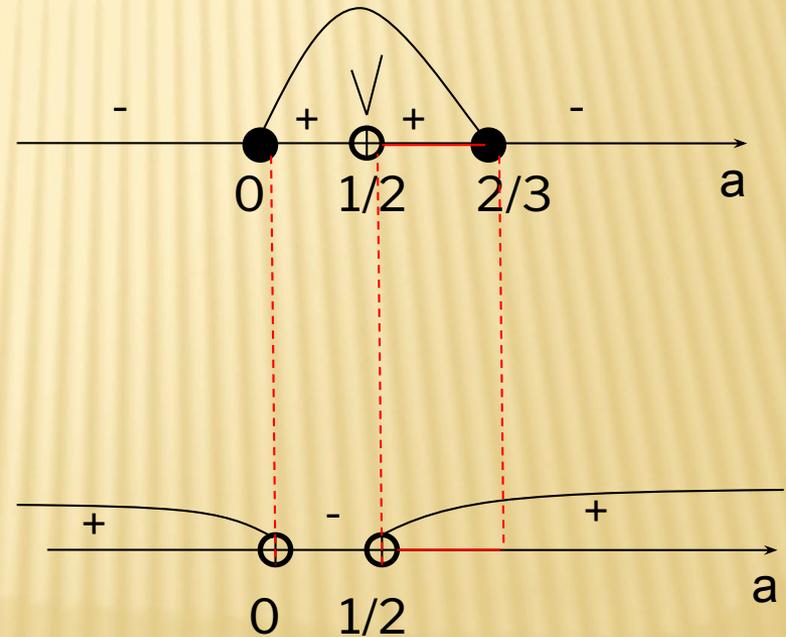
$$\begin{cases} \frac{a^2 - 4a^2 + 2a}{(2a-1)^2} \geq 0 \\ \frac{a}{2a-1} > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{-3a^2 + 2a}{(2a-1)^2} \geq 0 \\ \frac{a}{2a-1} > 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \frac{a(2-3a)}{(2a-1)^2} \geq 0 \\ \frac{a}{2a-1} > 0 \end{cases};$$

Учитывая, что $a=1/2$ не удовлетворяет условию задачи, имеем: $(1/2; 2/3]$

Ответ: $(1/2; 2/3]$



ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

- При каких a уравнение $a * 12^{|x|} = 2 - 12^{-|x|}$ имеет хотя бы одно решение?

Введём замену: $12^{|x|} = t$

$$\left. \begin{array}{l} |x| \geq 0 \\ 12^0 = 1 \end{array} \right\} 12^{|x|} \geq 12^0; 12^{|x|} \geq 1$$

значит $t \geq 1$

Теперь наше уравнение имеет вид:

$$at = 2 - \frac{1}{t};$$

$$at^2 = 2t - 1$$

$$at^2 - 2t + 1 = 0 (*)$$

$$at^2 - 2t + 1 = 0 (*)$$

Чтобы исходное уравнение имело решения, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (*) имело корни на промежутке $[1; +\infty)$.

1 случай: $a=0;$ $-2t+1=0$
 $2t=1$
 $t=1/2 < 1$

Значит, при $a=0$ уравнение (*) имеет 1 корень, который не входит в нужный промежуток.
Значит $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

2 случай: $a \neq 0$

разделим обе части уравнения

$$at^2 - 2t + 1 = 0 \text{ на } a:$$

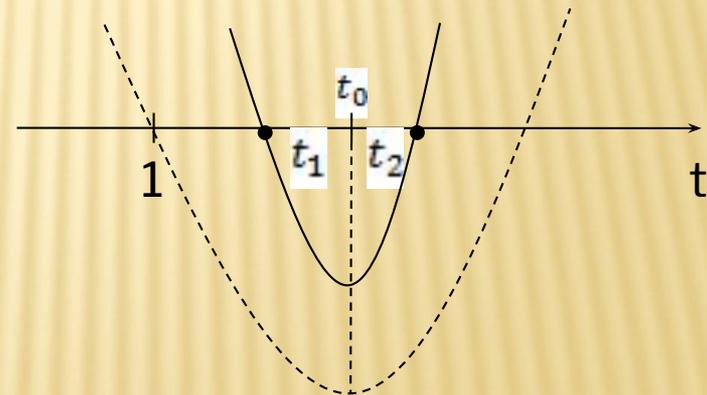
$$t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{1}{a} = 0$$

Рассмотрим функцию $y = t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{1}{a}$

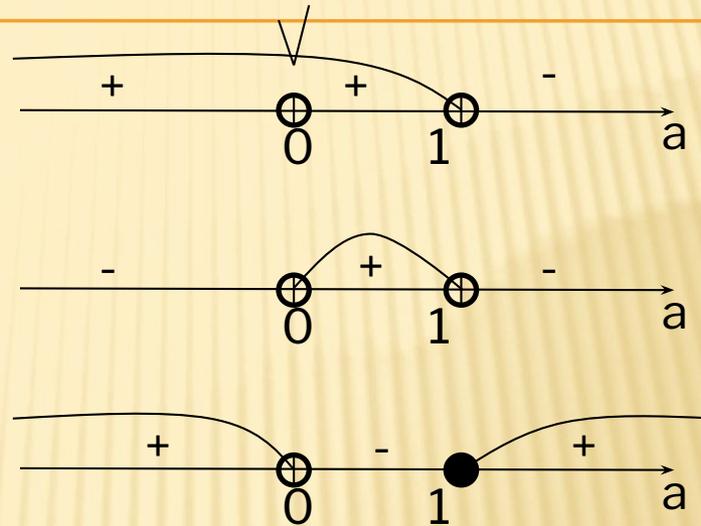
Это квадратичная функция, график – парабола, ветви вверх.

$$\text{а) } \begin{cases} D > 0 \\ t_0 > 1 \\ y(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{4}{a} > 0 \\ \frac{2}{2a} > 1 \\ 1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a} \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} > 0 \\ \frac{1}{a} - 1 > 0 \\ 1 - \frac{1}{a} \geq 0 \end{cases}$$

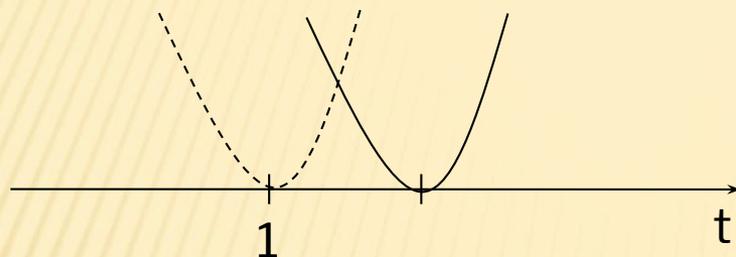


$$\begin{cases} \frac{1-a}{a^2} > 0 \\ \frac{1-a}{a} > 0; \\ \frac{a-1}{a} \geq 0 \end{cases}$$



Данная система решений не имеет.

б)



$$\begin{cases} D = 0 \\ t_0 \geq 1 \end{cases}$$

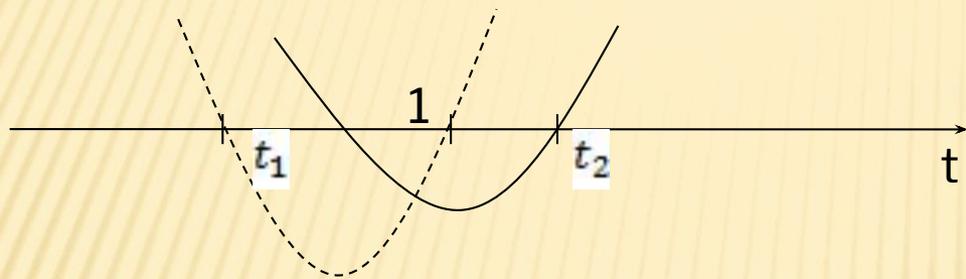
$$\begin{cases} \frac{1-a}{a^2} = 0 \\ \frac{1}{2a} \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 \geq 1 \end{cases}$$

верно

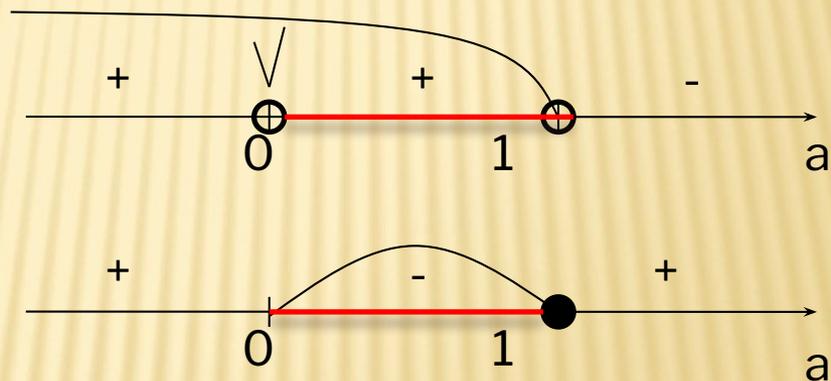
Значит, $a=1$ удовлетворяет условию задачи.

В)



$$\begin{cases} D > 0 \\ y(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1-a}{a^2} > 0 \\ \frac{a-1}{a} \leq 0 \end{cases}$$



С учётом результатов, полученных в предыдущих случаях, имеем: $(0; 1]$

Ответ: $(0; 1]$

Спасибо за внимание!