Отбор корней при решении тригонометрических уравнений

1. Вычислите:

а) arcsin(-1) $= -\dfrac{\pi}{2};$

б) arccos $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6};$

в) arcsin 2 **(не существует);**

г) arctg $\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3};$

д) arccos $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ **(не существует);**

е) arcctg $(-\sqrt{3}) = \pi - arctg\sqrt{3} = -\dfrac{5\pi}{6}.$

2. Решить уравнения:

а) cos x = - 1; $x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$

б) sin x $= -\dfrac{1}{2};$ $x = (-1)^k \arcsin(-\dfrac{1}{2}) + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$$x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$$

$$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$$

в) cosx = 0; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

г) tg x = $\dfrac{\sqrt{3}}{3};$ $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

1. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью числовой окружности.

Пример 1. $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$

Решение.

$\cos x - \cos 3x - (1 - \cos 2x) = 0,$

$2\sin x \sin 2x - 2\sin^2 x = 0,$

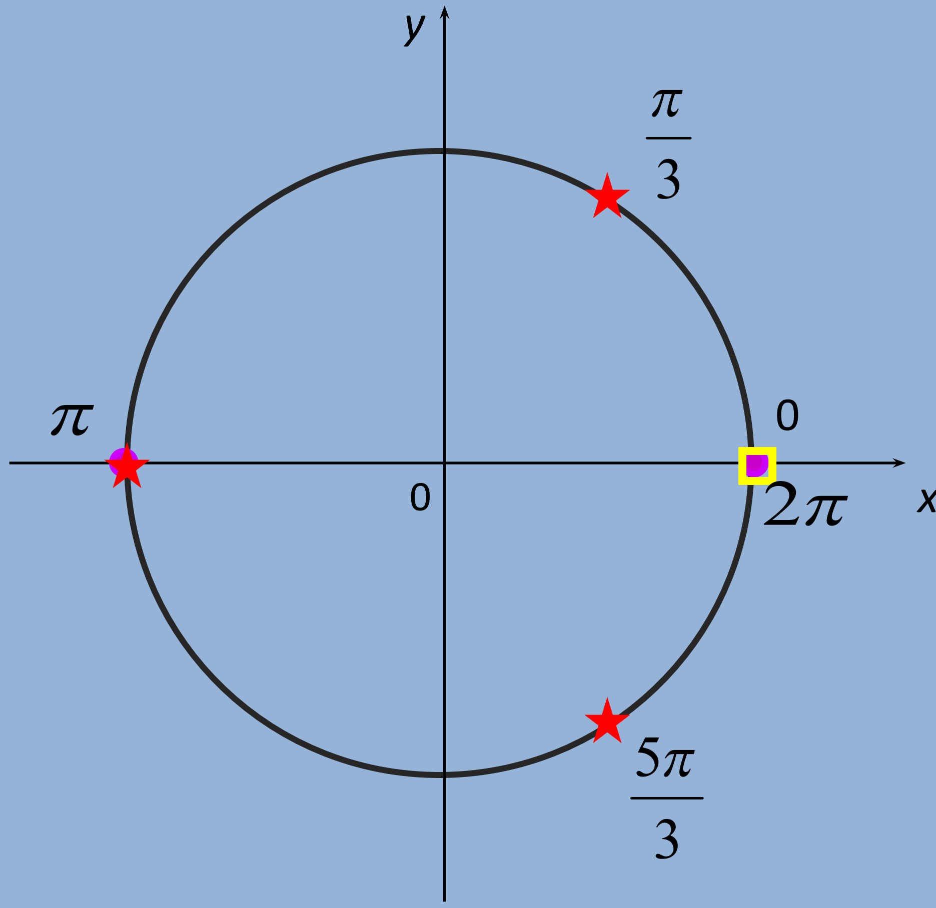
$2\sin x\,(\sin 2x - \sin x) = 0,$

$$4\sin x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x\pi}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0,\\ &\sin\frac{x}{2} = 0,\\ &\cos\frac{3x}{2} = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ \dfrac{x}{2} = \pi n, n \in Z \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = 2\pi n, n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3}, m \in Z; \end{array}\right.$$



Изобразим серии корней на тригонометрическом круге.

Видим, что первая серия ( ) включает в себя корни второй серии ( ), а третья серия ( ) включает в себя числа вида $x = \pi + 2\pi k$ из корней первой серии ( ).

$$\textit{Ответ}: \left\{2\pi n; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3} \,/\, n, m \in Z\right\}.$$

Пример 2. tg *x* + tg 2*x* – tg 3*x* = 0.

Решение.

$$ОДЗ:\begin{cases} x\neq \frac{\pi}{2}+\pi n, \\ x\neq \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, \\ x\neq \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\sin x\cos 2x+\sin 2x\cos x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x-\cos x\cos 2x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\sin 3x(\frac{1}{2}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

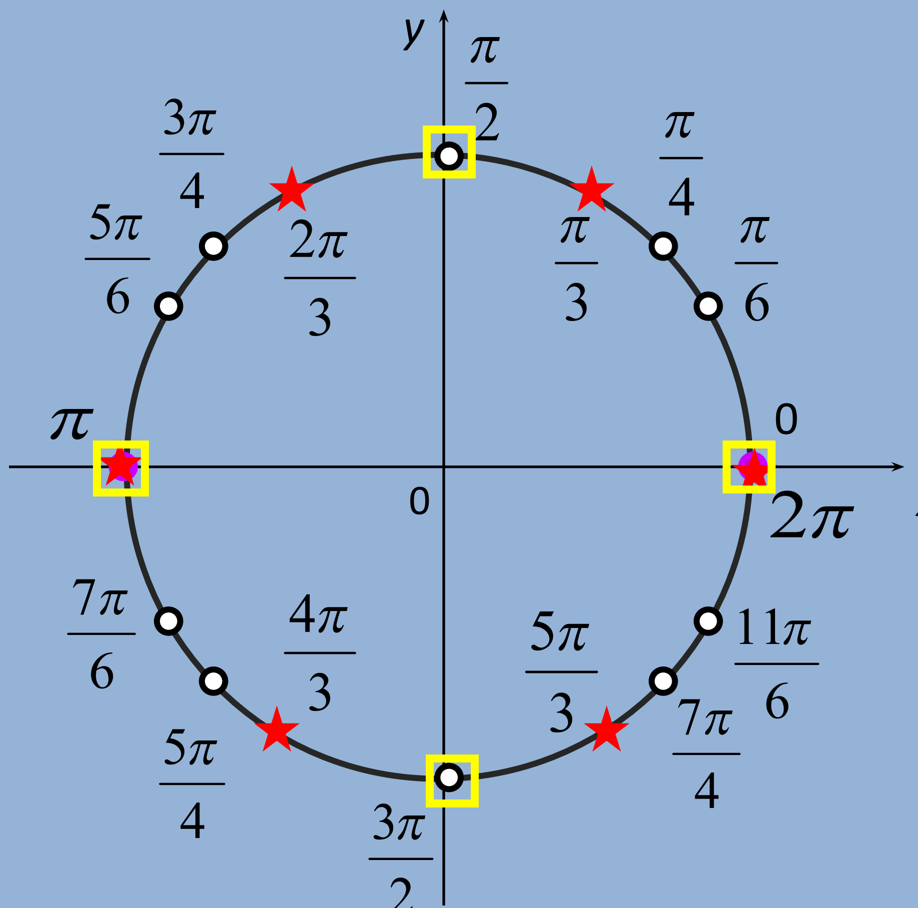
$$\frac{\frac{1}{2}\sin 3x(\cos 3x-\cos x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin 3x(-2\sin 2x\sin x)}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

$$\frac{-\sin 3x\sin 2x\sin x}{\cos x\cos 2x\cos 3x}=0;$$

$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x = 0;$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi m}{3}, m \in Z. \end{array}\right.$$



Изобразим ОДЗ и серии корней на числовой окружности.

Из второй серии корней ( ) числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не удовлетворяют ОДЗ, а числа вида $x = \pi k$. входят в третью серию ( ) Первая серия ( ) так же входит в третью серию корне ( ), поэтому ответ можно записать одной формулой.

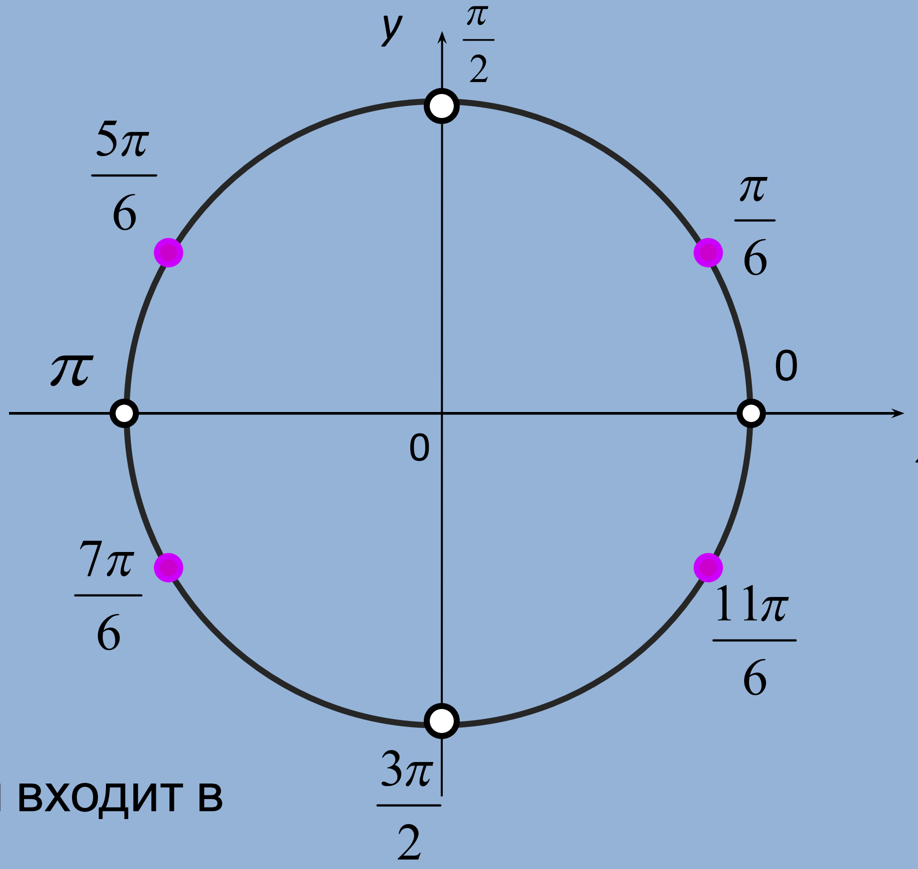
$$\textit{Ответ}: \{\frac{\pi m}{3} / m \in Z\}.$$

Пример 3. $\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x} = 0.$

Решение.

$$\begin{cases} \cos 3x = 0, \\ \sin 2x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi k}{3}, k \in Z, \\ x \neq \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z; \end{cases}$$



Иногда случается, что часть серии входит в ответ,
а часть нет. Нанесем на числовую окружность все числа серии $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$ и исключим корни, удовлетворяющие условию $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

Оставшиеся решения из серии корней можно объединить в формулу

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$Ответ: \{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n \,/\, n \in Z\}.$$

2. Отбор корней в тригонометрическом уравнении алгебраическим способом

Пример 1. $$\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$$

Решение.

Поскольку наибольшее значение функции $y = \cos t$ равно 1, то уравнение
равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos\dfrac{3x}{4} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{8\pi n}{3}, n \in Z; \end{cases}$$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо решить уравнение

$$\pi k = \frac{8\pi n}{3};$$

$$k = \frac{8n}{3};$$

Получаем $k = 8t, \ \ n = 3t, t \in Z$

Итак, $x = 8\pi t, t \in Z.$

$$\textit{Ответ}: \{8\pi t \,/\, t \in Z\}.$$

Пример 2. $\cos\frac{x}{4}\sin x - 2\sin^2 x + \cos x + \sin\frac{x}{4}\cos x - 2\cos^2 = 0.$

Решение

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos x = 2;$

$$\begin{cases} \sin\frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, n \in Z, \\ x = 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5};$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо решить уравнение $k = \frac{1+4n}{5};$

$5k = 1 + 4n;$

$n = \frac{5k-1}{4};$

$n = k + \frac{k-1}{4},$ где $\frac{k-1}{4}$ – целое число.

Пусть $\frac{k-1}{4} = m,$ тогда

$k = 4m + 1, \quad n = 5m + 1.$

Итак, $x = 2\pi + 8\pi m, m \in Z.$

Ответ: $\{2\pi + 8\pi m / m \in Z\}.$

3. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с некоторыми условиями

Пример 1. Найти корни уравнения $\sin 2x = \cos x \mid \cos x \mid$, удовлетворяющие условию $x \in [0; 2\pi]$.

Решение.

$\sin 2x = \cos x \mid \cos x \mid$;

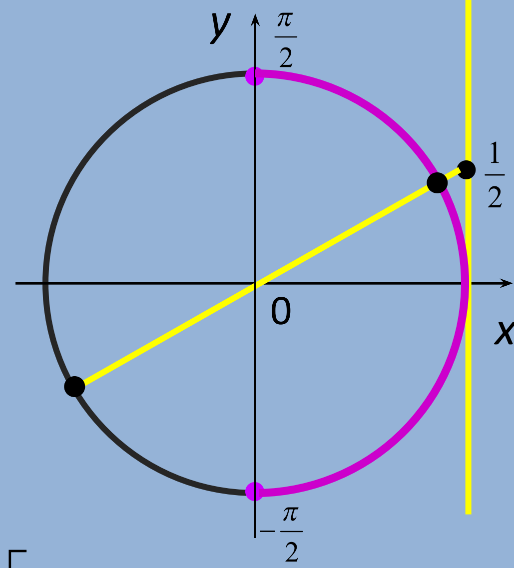
$2\sin x \cdot \cos x - \cos x \mid \cos x \mid = 0$;

$\cos x \ (2\sin x - \mid \cos x \mid) = 0$;

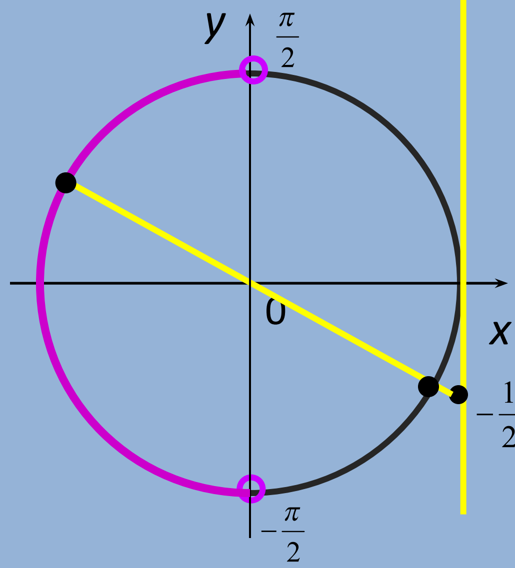
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \cos x(2\sin x - \cos x) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \cos x(2\sin x + \cos x) = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \geq 0,\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ x=arctg\,\dfrac{1}{2}+\pi k, k\in Z;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ x=-arctg\,\dfrac{1}{2}+\pi m, m\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

cos x ≥ 0



cos x < 0



$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ x=arctg\,\dfrac{1}{2}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

$$x=\pi-arctg\,\frac{1}{2}+2\pi m, m\in Z.$$

Найдём решение систем
 с помощью
числовых окружностей:

Услови
ю $x\in[0;2\pi]$ удовлетворяют числа $x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\dfrac{3\pi}{2},\ x=arctg\,\dfrac{1}{2}$
(для первой системы) и $x=\pi-arctg\,\dfrac{1}{2}$ (для второй системы).

$$Ответ:\left\{\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};arctg\,\frac{1}{2};\pi-arctg\,\frac{1}{2}\right\}.$$

Пример 2. Найти все решения уравнения $\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$

принадлежащие отрезку $[\pi;\frac{3\pi}{2}].$

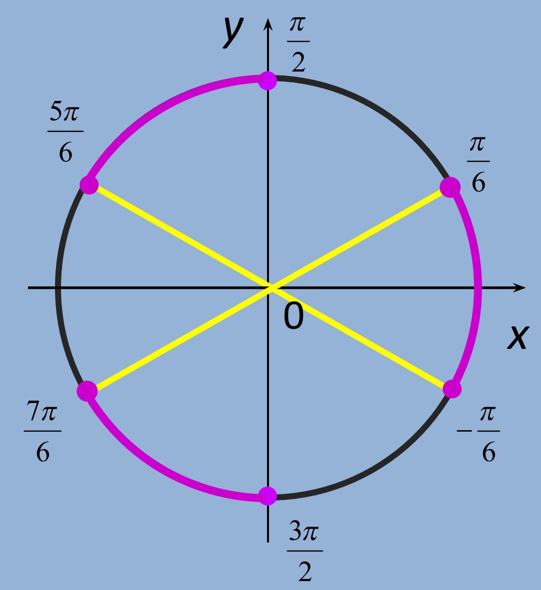
Решение.

ОДЗ: cos 3x ≥ 0;

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 3x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;$$

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$$

Отметим ОДЗ на тригонометрическом круге:



Отрезку $[\pi;\frac{3\pi}{2}]$ принадлежит только один промежуток из ОДЗ, а именно $[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}].$

Решим уравнение и выберем корни, принадлежащие этому промежутку:

1 + sin 2x = 2cos^2 3x;

sin 2x = cos 6x;

sin 2x - cos 6x=0;

$$\sin 2x-\sin(\frac{\pi}{2}-6x)=0;$$

$$2\cos(\frac{\pi}{4}-2x)\sin(4x-\frac{\pi}{4})=0;$$

$$2\cos(2x-\frac{\pi}{4})\sin(4x-\frac{\pi}{4})=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=0,\\ \sin(4x-\frac{\pi}{4})=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ 4x-\frac{\pi}{4}=\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z.\end{array}\right.$$

Выберем корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии:

$$\frac{7\pi}{6}\le\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\le\frac{3\pi}{2}, n\in Z;$$

$$28\pi\le 9\pi+12\pi n\le 36\pi, n\in Z;$$

$$19\le 12n\le 27, n\in Z.$$

Следовательно n=2, то есть $x=\frac{11\pi}{8}.$

Из второй серии:

$$\frac{7\pi}{6}\le\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}\le\frac{3\pi}{2}, n\in Z;$$

$$56\pi\le 3\pi+12\pi n\le 72\pi, n\in Z;$$

$$53\le 12n\le 69, n\in Z.$$

Следовательно n=5, то есть $x=\frac{21\pi}{16}.$

$$Ответ:\{\frac{11\pi}{8};\frac{21\pi}{16}\}.$$

Пример 3. Найти все корни уравнения $10\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{7\pi}{2}+2x)+3,$

которые удовлетворяют условию $x\in[-\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{12}].$

Решение.

$10\sin^2 x = -\cos 2x + 3;$

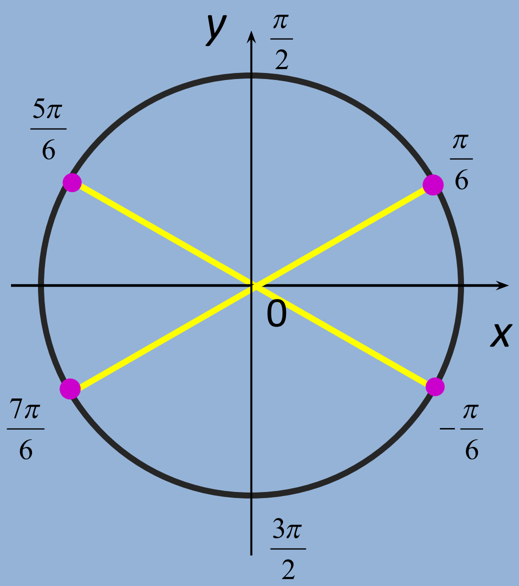
$10\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 + 3,$

$8\sin^2 x = 2;$

$$\sin^2 x=\frac{1}{4};$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z, \\ x=(-1)^m\cdot(-\frac{\pi}{6})+\pi m, m\in Z; \end{array}\right.$$



С помощью числовой окружности получим:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$$

Выберем корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \le \frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$$

$$-8\pi \le 2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-10 \le 12n \le 17, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{array}\right.$$

Из второй серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \le -\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$$

$$-8\pi \le -2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-6 \le 12n \le 21, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$$

$$Ответ: \{\pm\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}.$$