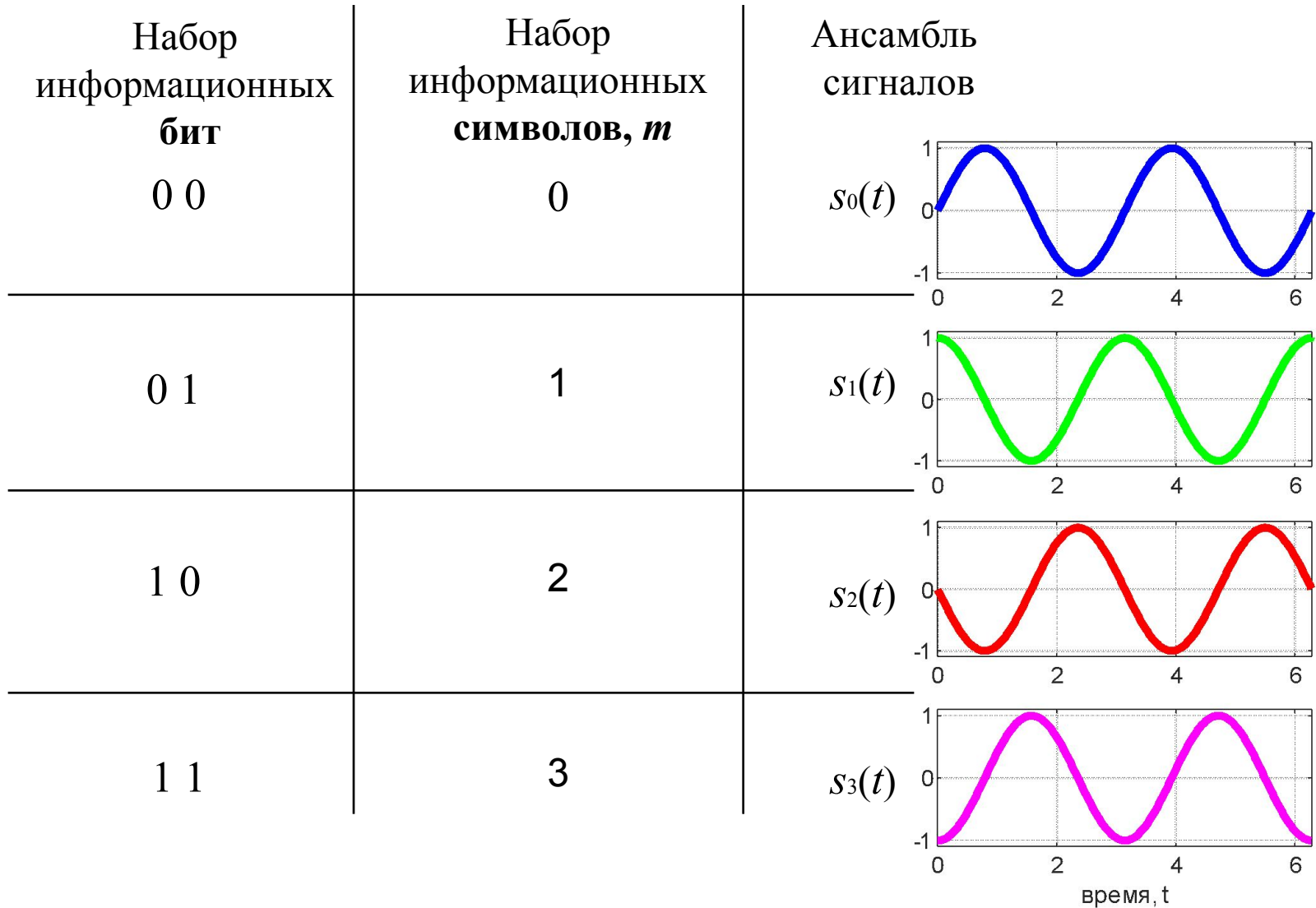


Оптимальный прием сигналов без памяти

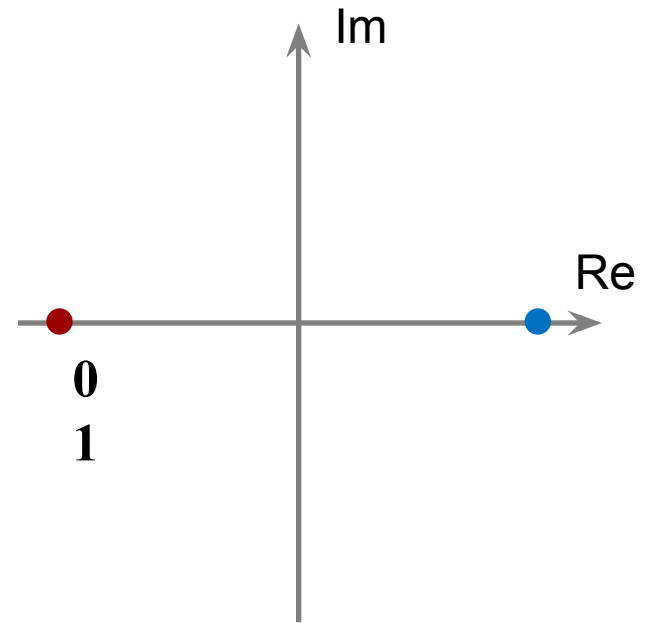
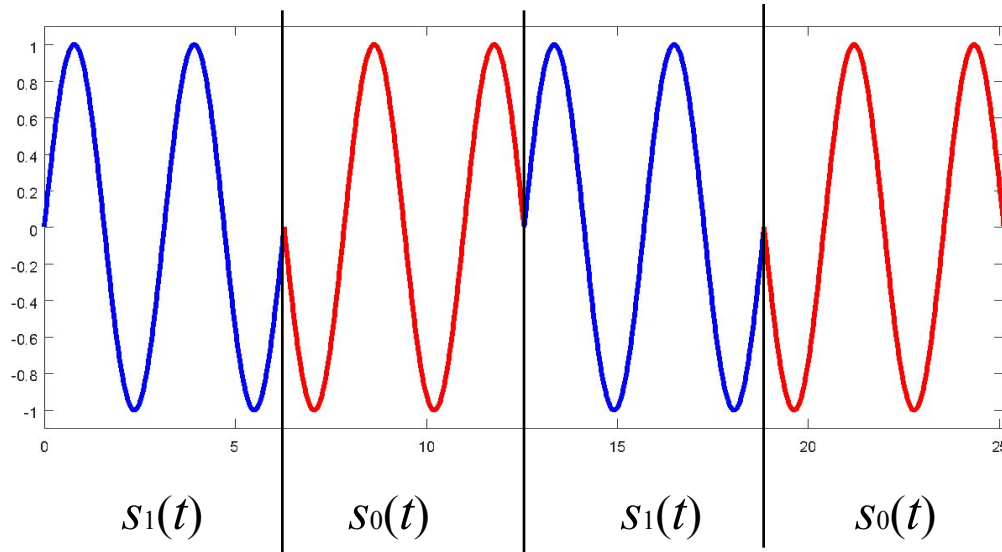
Лекция № 3

При модуляции без памяти каждому информационному символу m ставится в соответствие сигнал конечной длительности $s_m(t)$.



Манипулированный сигнал $s(t)$ можно рассматривать как совокупность сигналов конечной длины $s_m(t)$, которые передают один информационный символ.

Набор различных сигналов $s_m(t)$ называется сигнальным ансамблем.

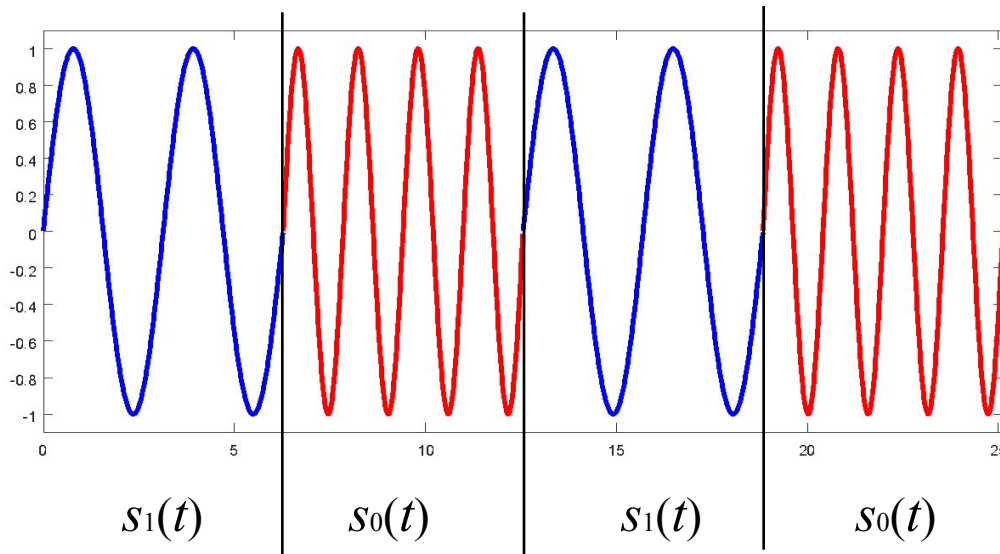


$$s(t) = \sum_n s_n(t + nT_s)$$

где T_s - длительность символа.

Манипулированный сигнал $s(t)$ можно рассматривать как совокупность сигналов конечной длины $s_m(t)$, которые передают один информационный символ.

Набор различных сигналов $s_m(t)$ называется сигнальным ансамблем.



Для ЧМн сигналов не имеет смысла строить «звездную» диаграмму.

$$s(t) = \sum_n s_n(t + nT_s)$$

где T_s - длительность символа.

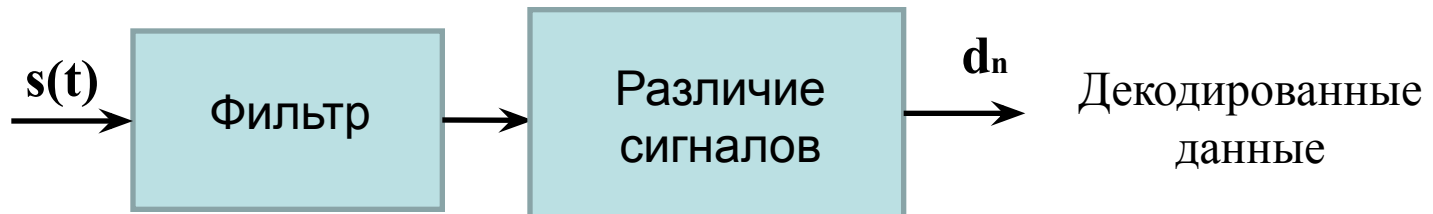
Прием манипулированного сигнала

Прием манипулированного сигнала без памяти $s(t)$ сводится к приему сигналов $s_m(t)$ по отдельности и их различии друг от друга.

Такой прием называется **ПОСИМВОЛЬНЫМ**.

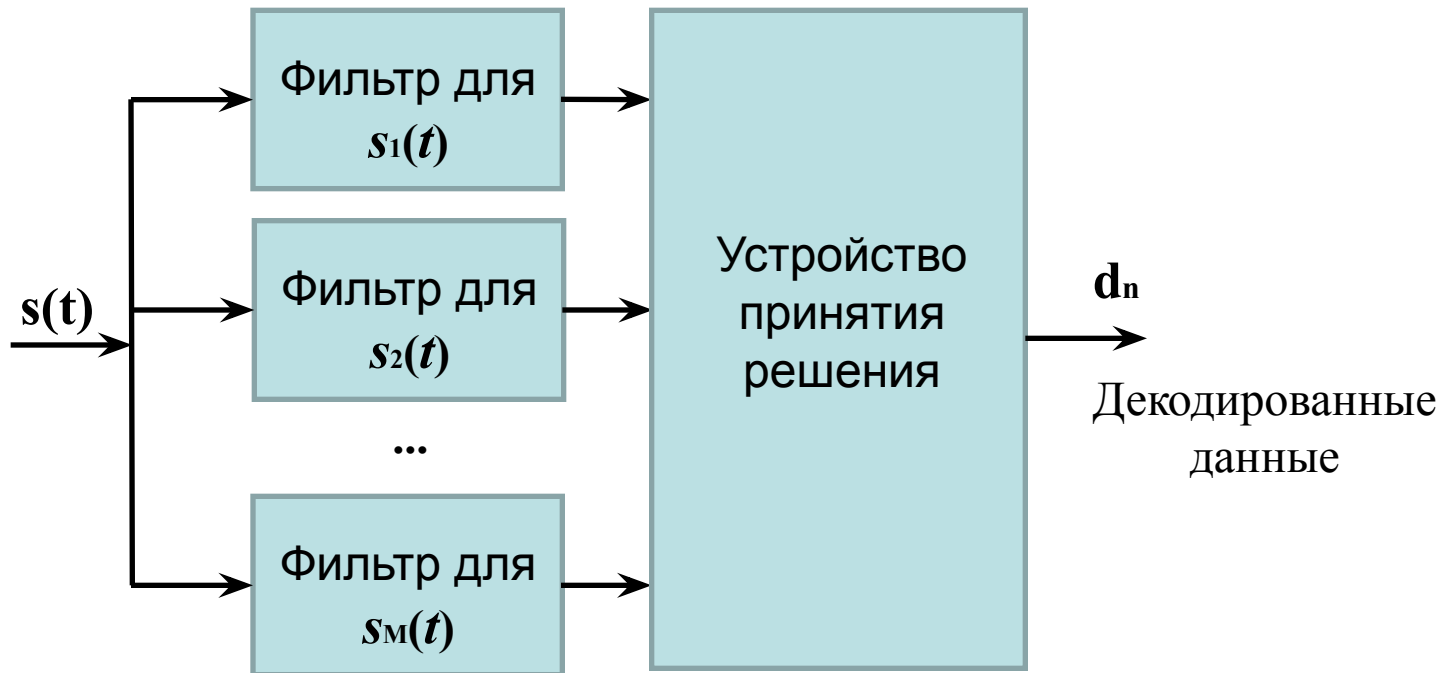
Этапы приема:

1. выделение из шумов;
2. различие сигналов $s_m(t)$ – демодуляция и декодирование.



Прием манипулированного сигнала

Наиболее эффективный фильтр можно реализовать в том случае, когда известна форма передаваемого сигнала. А манипулированный сигнал как раз состоит из совокупности сигналов $s_m(t)$, форма которых известна.



M – размер ансамбля сигналов (количество различных $s_m(t)$)

Согласованный фильтр

Согласованный фильтр — линейный оптимальный фильтр, позволяющий получить *максимальное отношение сигнал/шум* на выходе фильтра для сигналов известной формы.

Сигнал на выходе любого линейного фильтра, в том числе и согласованного, определяется выражением:

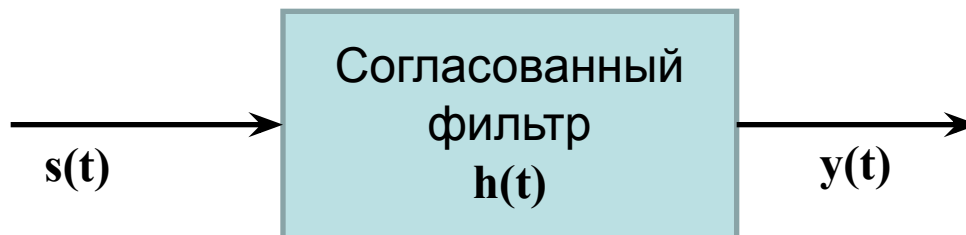
$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

где $s(t)$ — входной сигнал;

$y(t)$ — выходной сигнал;

$h(t)$ — импульсная характеристика фильтра;

* — операция свертки



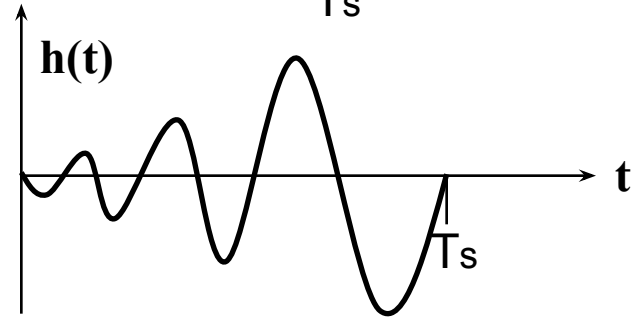
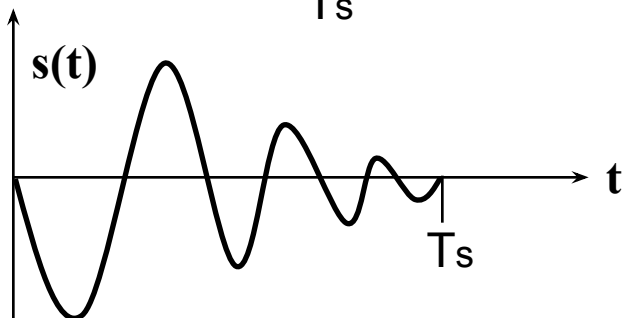
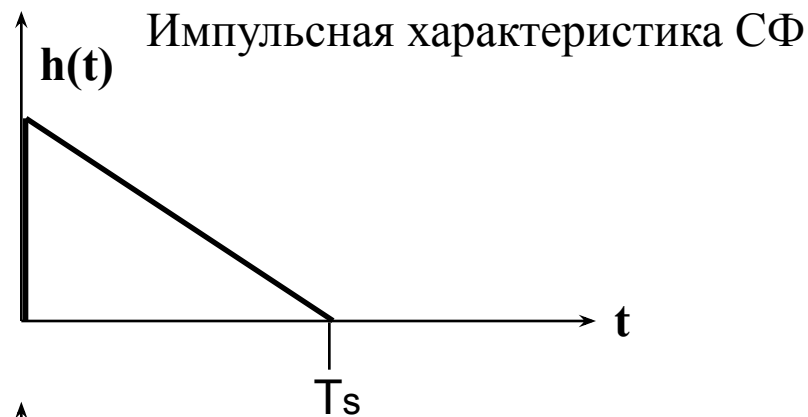
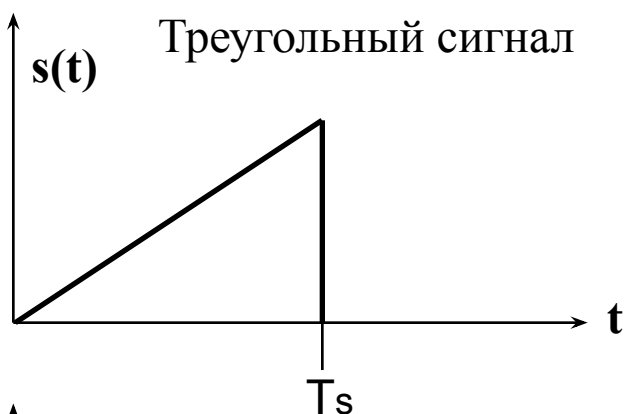
Свойства согласованного фильтра

Импульсная характеристика СФ имеет отзеркаленную форму сигнала, для которого фильтр согласован:

$$h(t) = k \cdot s(T_s - t)$$

где T_s – длительность сигнала;

k – константа.



Свойства согласованного фильтра

Комплексная частотная характеристика (она же АФЧХ) согласованного фильтра комплексно сопряжена с Фурье-образом сигнала.

$$H(f) = k \cdot S^*(f) e^{-i2\pi T f}$$

где $H(f)$ – частотная характеристика фильтра;

$S(f)$ – Фурье-образ сигнала;

T – длительность сигнала;

k – константа.

Комплексная экспонента $e^{-i2\pi T f}$ говорит о сдвиге фаз, возникшем в результате задержки сигнала в фильтре на время T .

АЧХ согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента k повторяет амплитудный спектр сигнала:

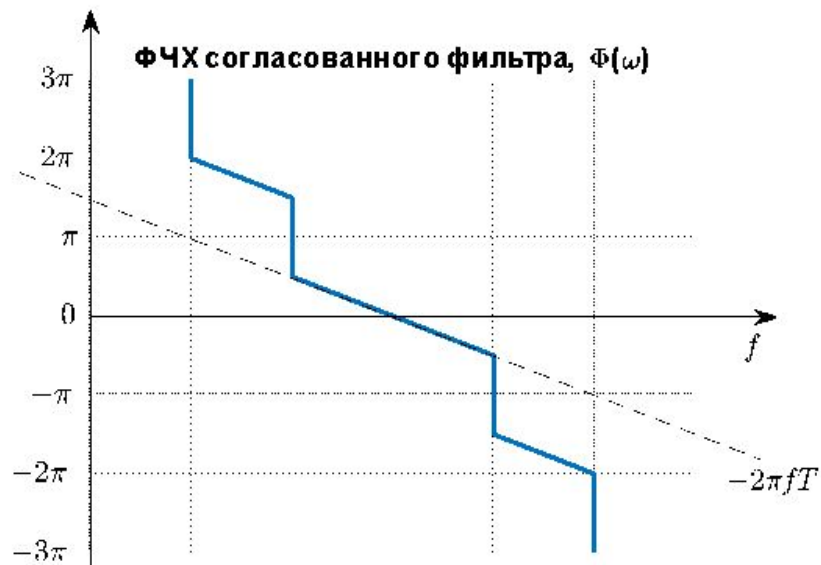
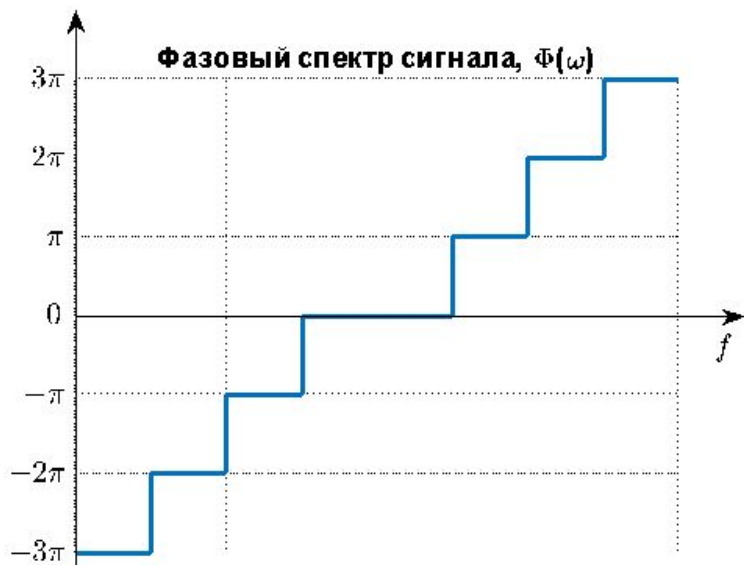
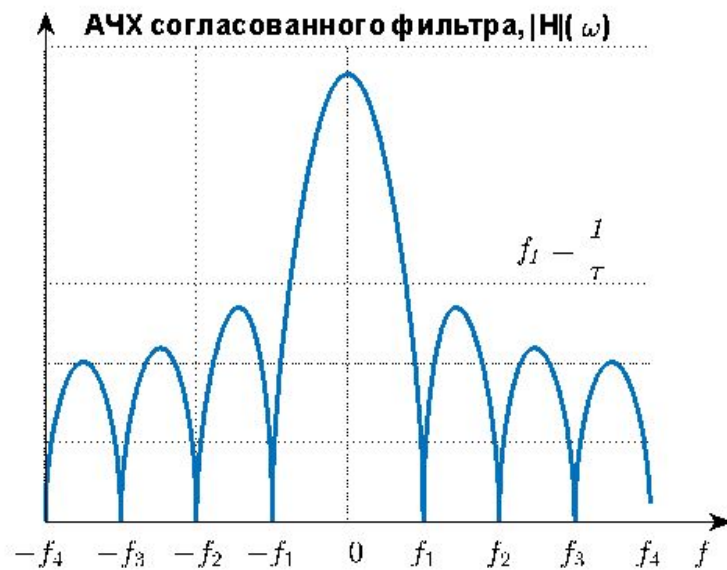
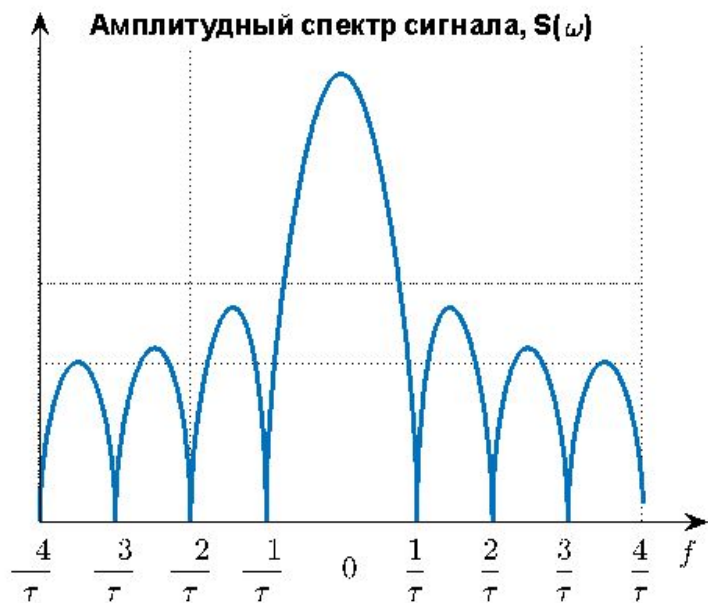
$$|H(f)| = k \cdot |S(f)|$$

ФЧХ согласованного фильтра повторяет фазовый спектр сигнала с обратным знаком и с учетом задержки:

$$\theta_{C\Phi}(f) = -2\pi T f - \psi_S(f)$$

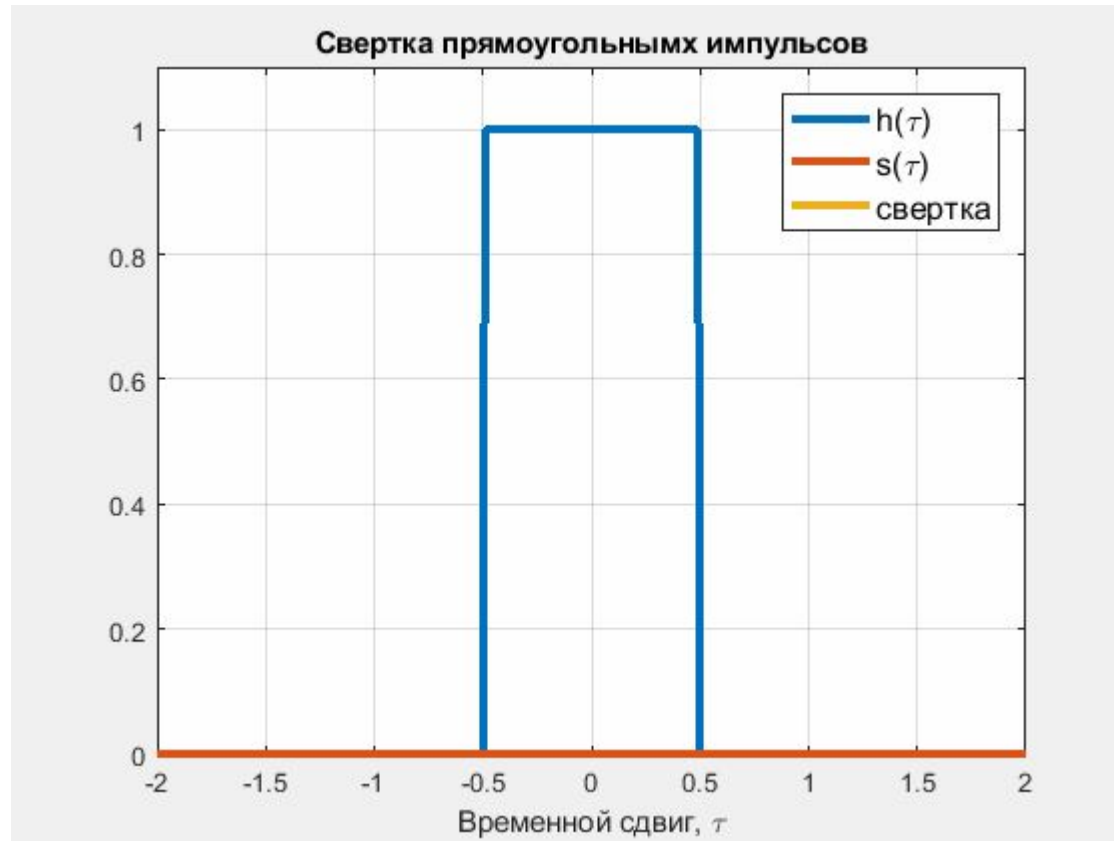
где $\psi_S(f)$ – фазовый спектр сигнала.

Свойства согласованного фильтра



Отклик согласованного фильтра

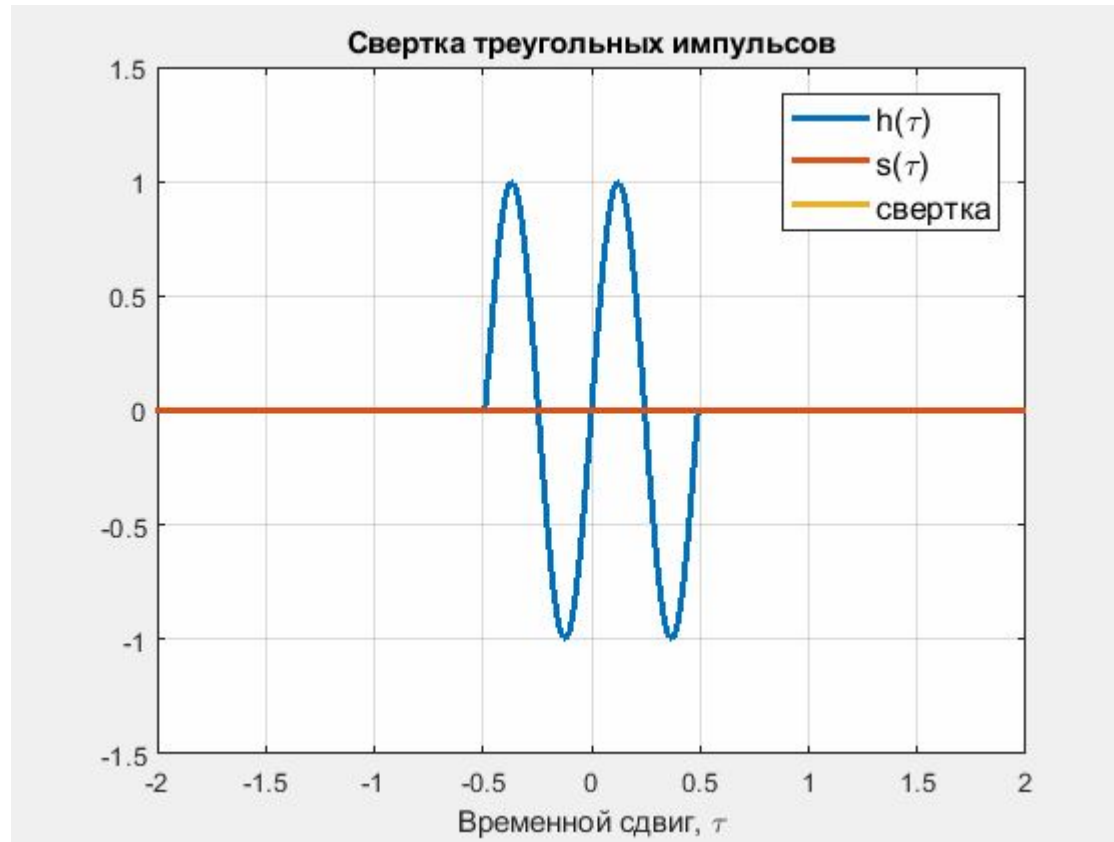
Отклик СФ на сигнал определяется сверткой импульсной характеристики $h(t)$ и сигналом $s(t)$



Сигнал, проходя через СФ, не сохраняет свою форму.

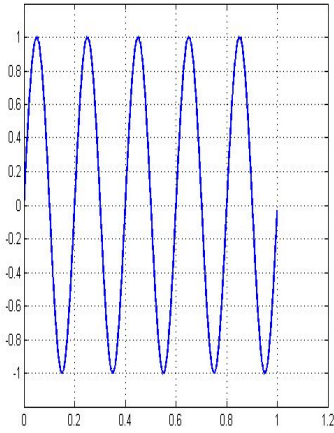
Отклик согласованного фильтра

Отклик СФ на сигнал определяется сверткой импульсной характеристики $h(t)$ и сигналом $s(t)$

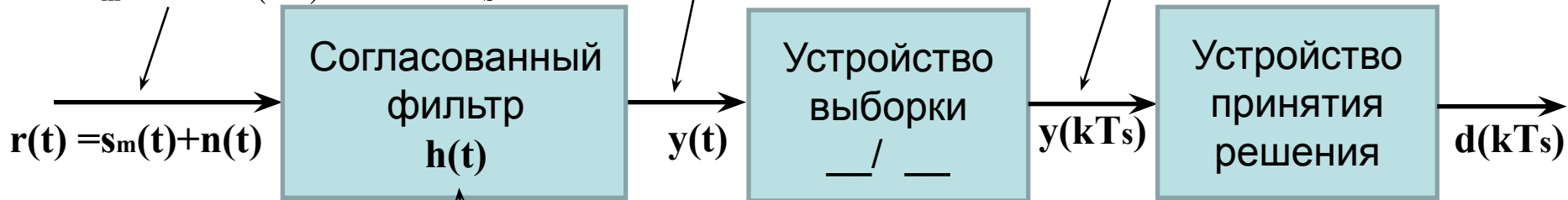
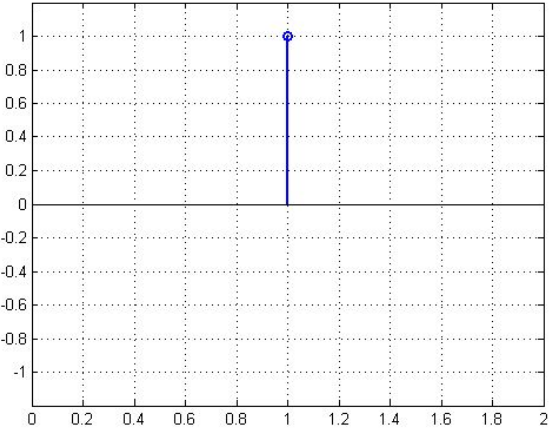
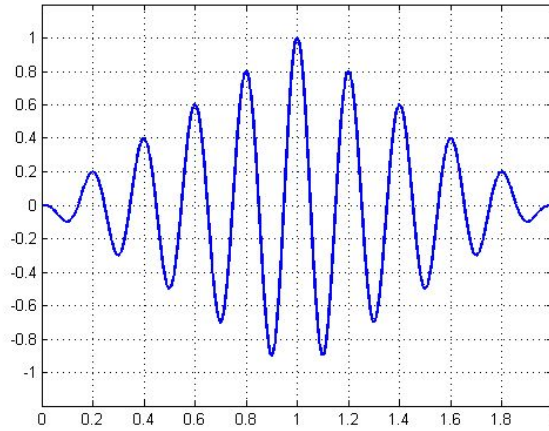


Сигнал, проходя через СФ, не сохраняет свою форму.

Оптимальный приемник

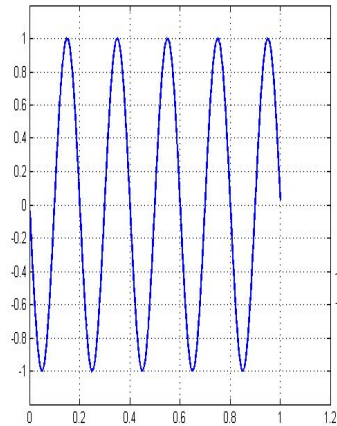


$$s_m(t) = \sin(\omega t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$



$$t = kT_s$$

$$k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

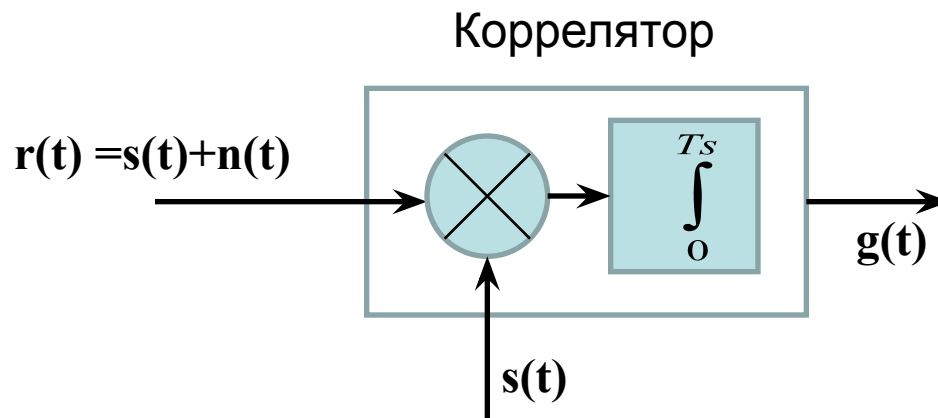


$$h(t) = \sin(T_s - \omega t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

Коррелятор

Коррелятором называется устройство, выполняющее операцию корреляции:

$$g(t) = \int_0^t r(\tau)s(\tau)d\tau$$



Коррелятор как и согласованный фильтр обеспечивает максимум отношения сигнал/шум для сигналов известной формы.

Связь согласованного фильтра и коррелятора

Сигнал на выходе СФ выражается как:

$$y(t) = r(t) * h(t) = \int_0^t r(\tau)h(t - \tau)d\tau$$
$$y(t) = \int_0^t r(\tau)s[T_S - (t - \tau)]d\tau = \int_0^t r(\tau)s(T_S - t + \tau)d\tau$$

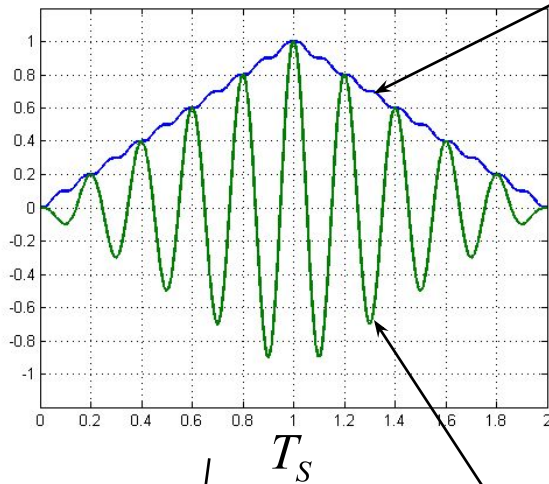
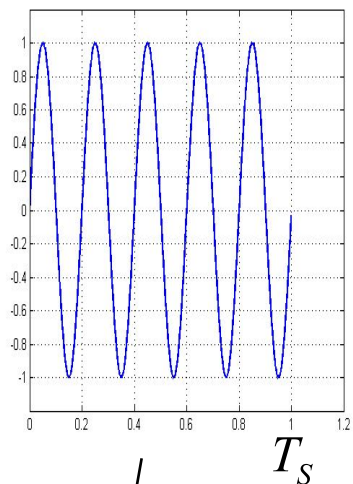
А в моменты времени $t = T_S$ выражение можно переписать в следующем виде:

$$y(T_S) = \int_0^{T_S} r(\tau)s(\tau)d\tau = g(T_S)$$

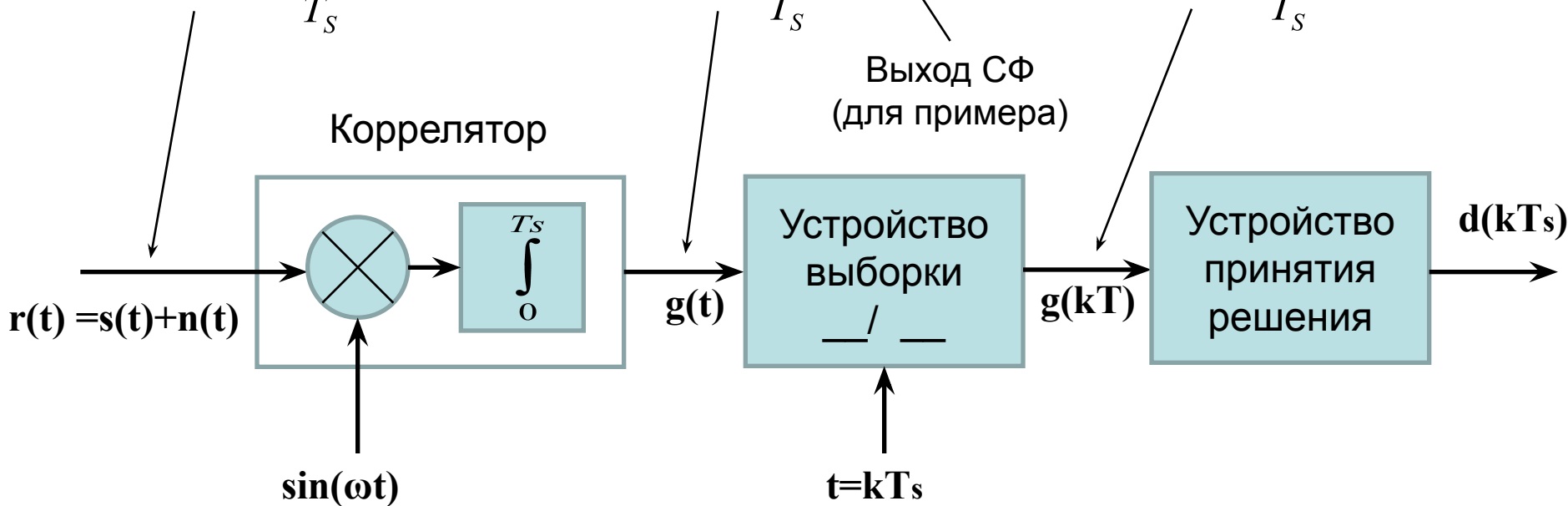
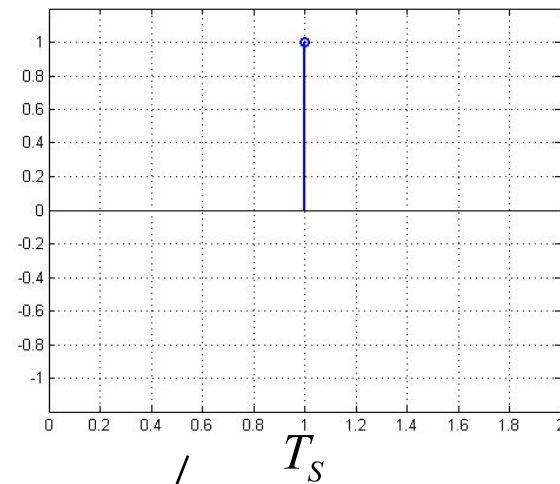
Данное выражение представляет собой выражение корреляции сигналов $r(t)$ и $s(t)$. Из этой формулы следует очень важный вывод, о том, что в момент времени $t=T_S$ значение сигнала на выходе согласованного фильтра равно значению сигнала на выходе коррелятора.

Оптимальный приемник на корреляторе

$$s(t) = \sin(\omega t), \quad 0 \leq t \leq T_S$$



Выход
коррелятора



Когерентный и некогерентный прием

$$z(t) = A(t)e^{i(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0)}$$

Когерентным приемом называется прием, при котором начальная фаза φ_0 принимаемого сигнала известна.

Если начальная фаза φ_0 не известна, то прием называется **некогерентным**.

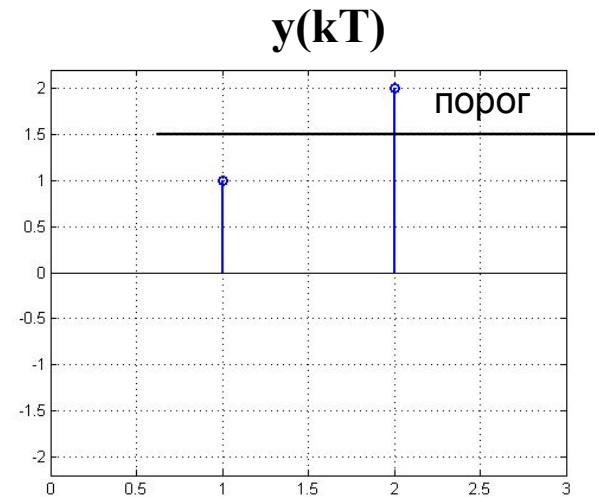
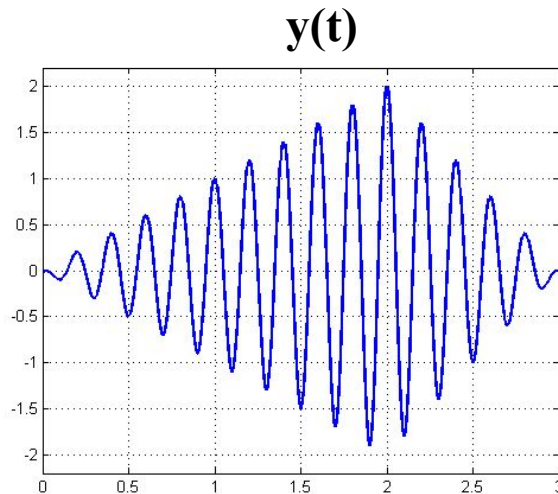
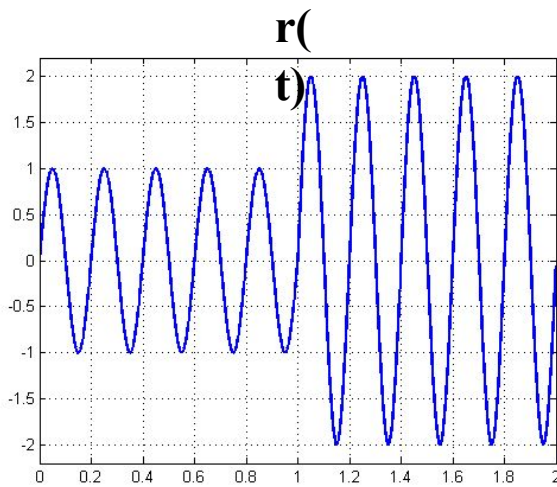
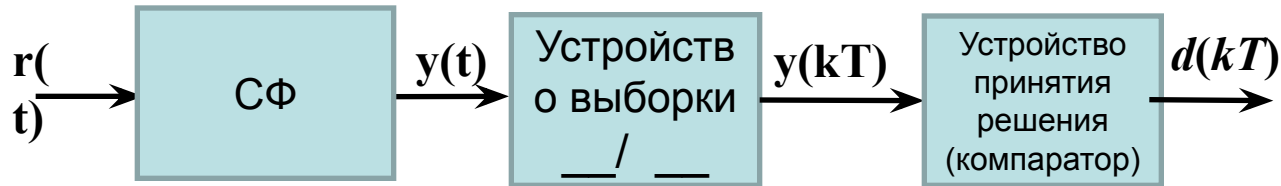
Со стороны приемника практически всегда начальная фаза неизвестна, но она может быть восстановлена. Процесс восстановления начальной фазы φ_0 называется фазовой синхронизацией.

Оптимальный когерентный приемник АМн сигналов

Оптимальный приемник сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) = k s_2(t)$$

На согласованном фильтре

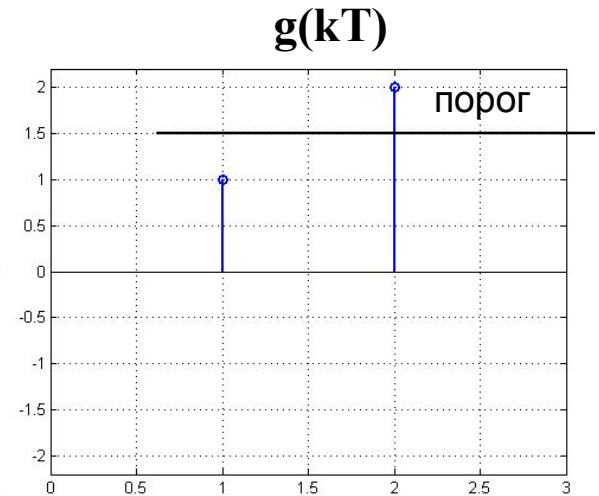
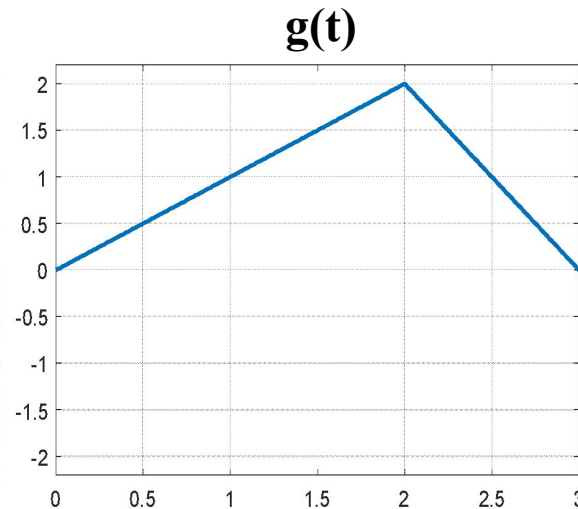
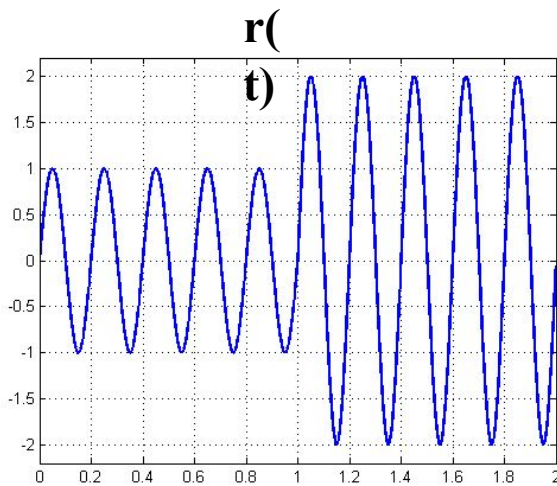
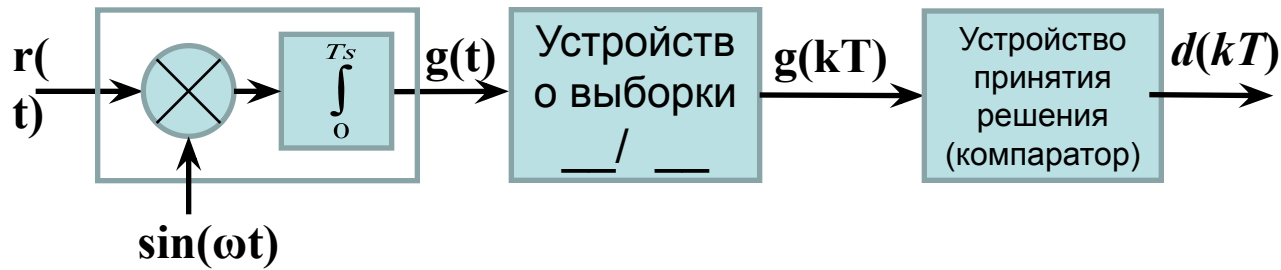


Оптимальный когерентный приемник АМн сигналов

Оптимальный приемник сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) = k s_2(t)$$

На корреляторе

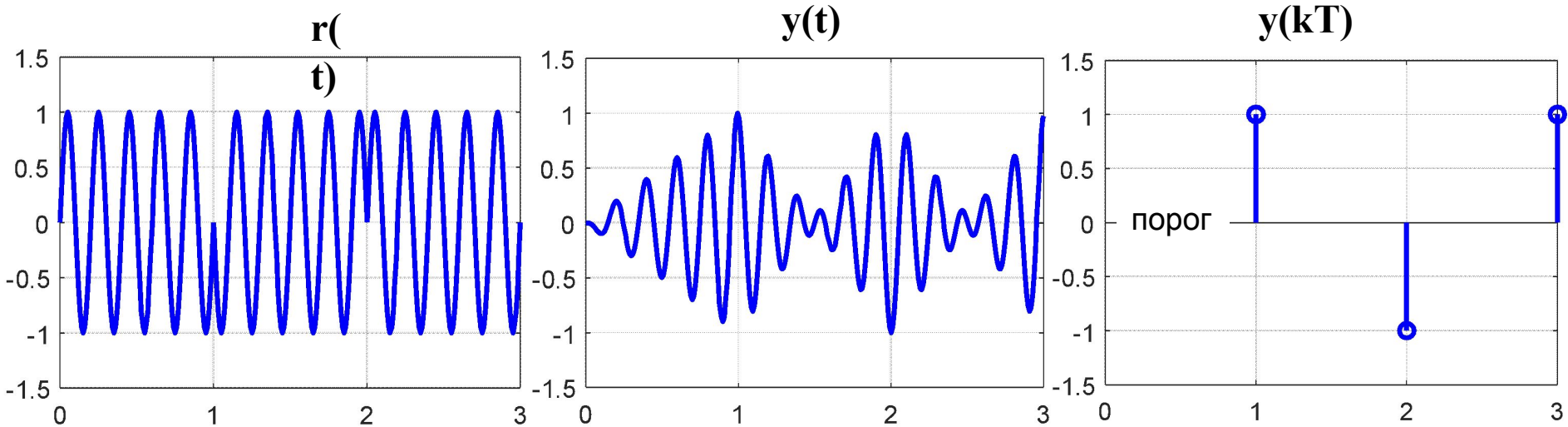
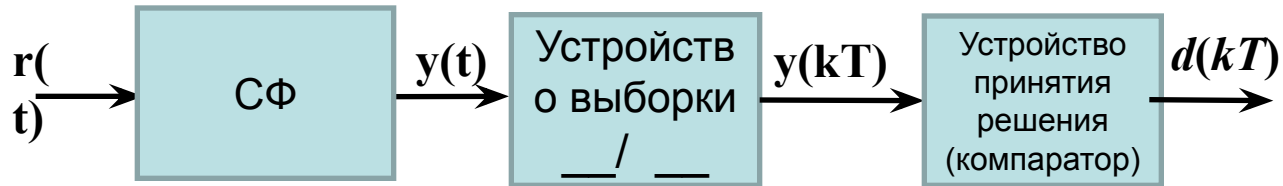


Оптимальный когерентный приемник 2-ФМн сигналов

Оптимальный приемник сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) = -s_2(t)$$

На согласованном фильтре

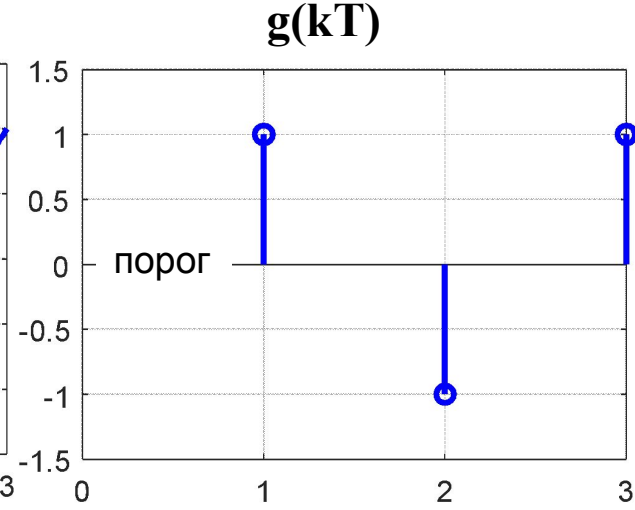
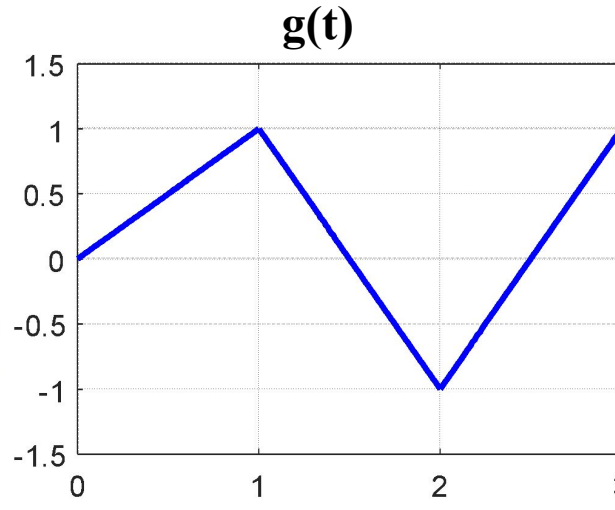
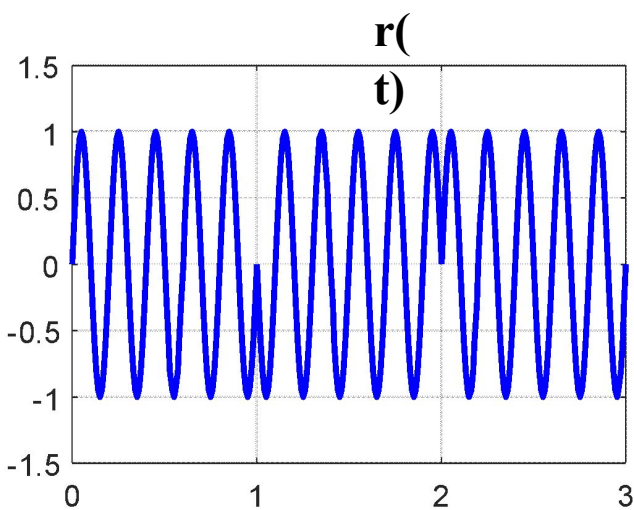
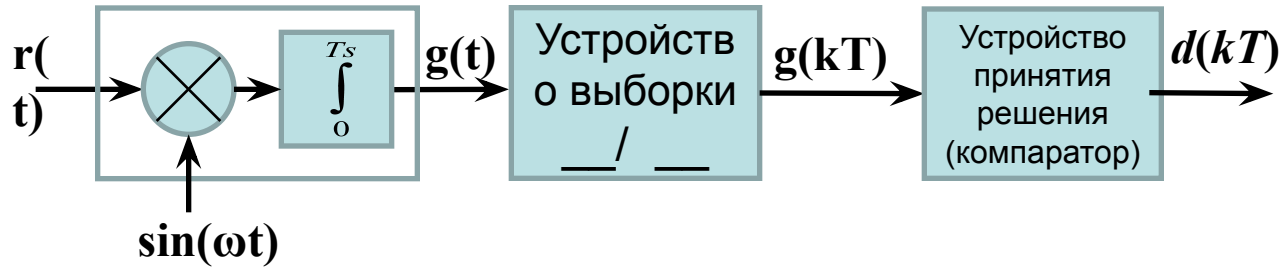


Оптимальный когерентный приемник 2-ФМн сигналов

Оптимальный приемник сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) = -s_2(t)$$

На корреляторе



Оптимальный когерентный приемник 2-ЧМн сигналов

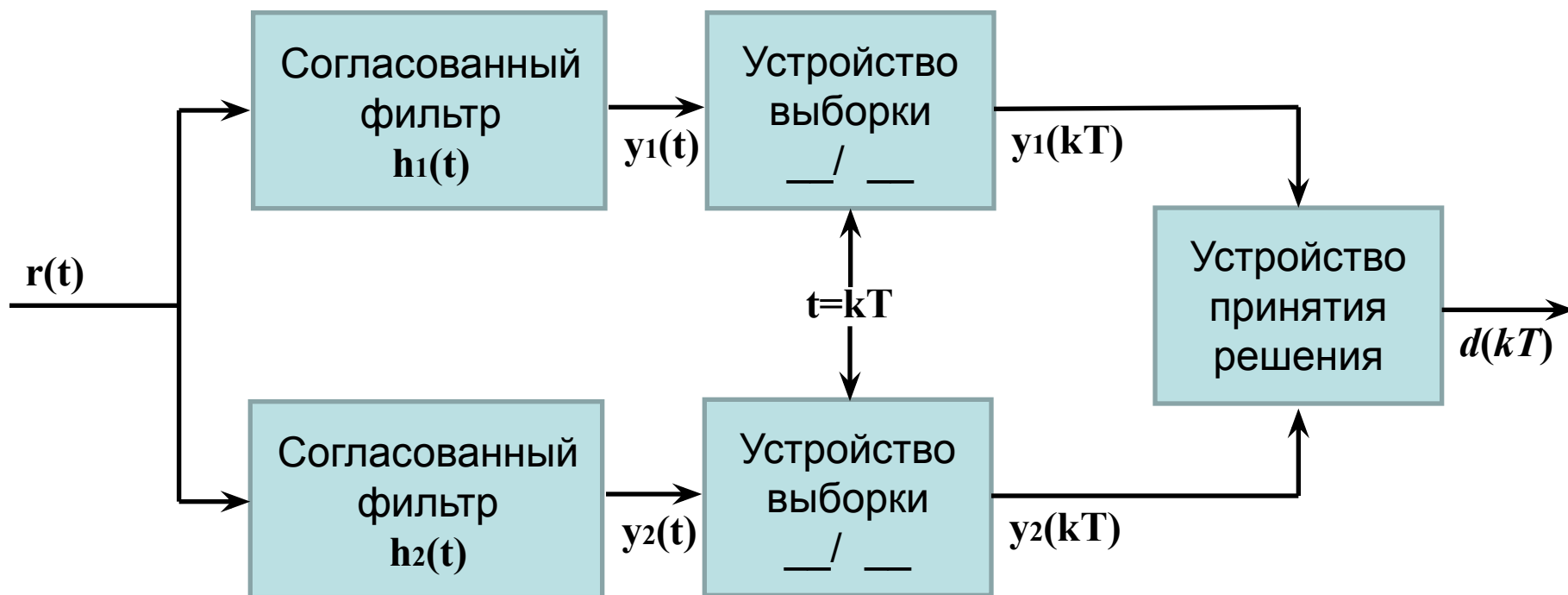
Оптимальный приемник двоичный сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) \neq ks_2(t)$$

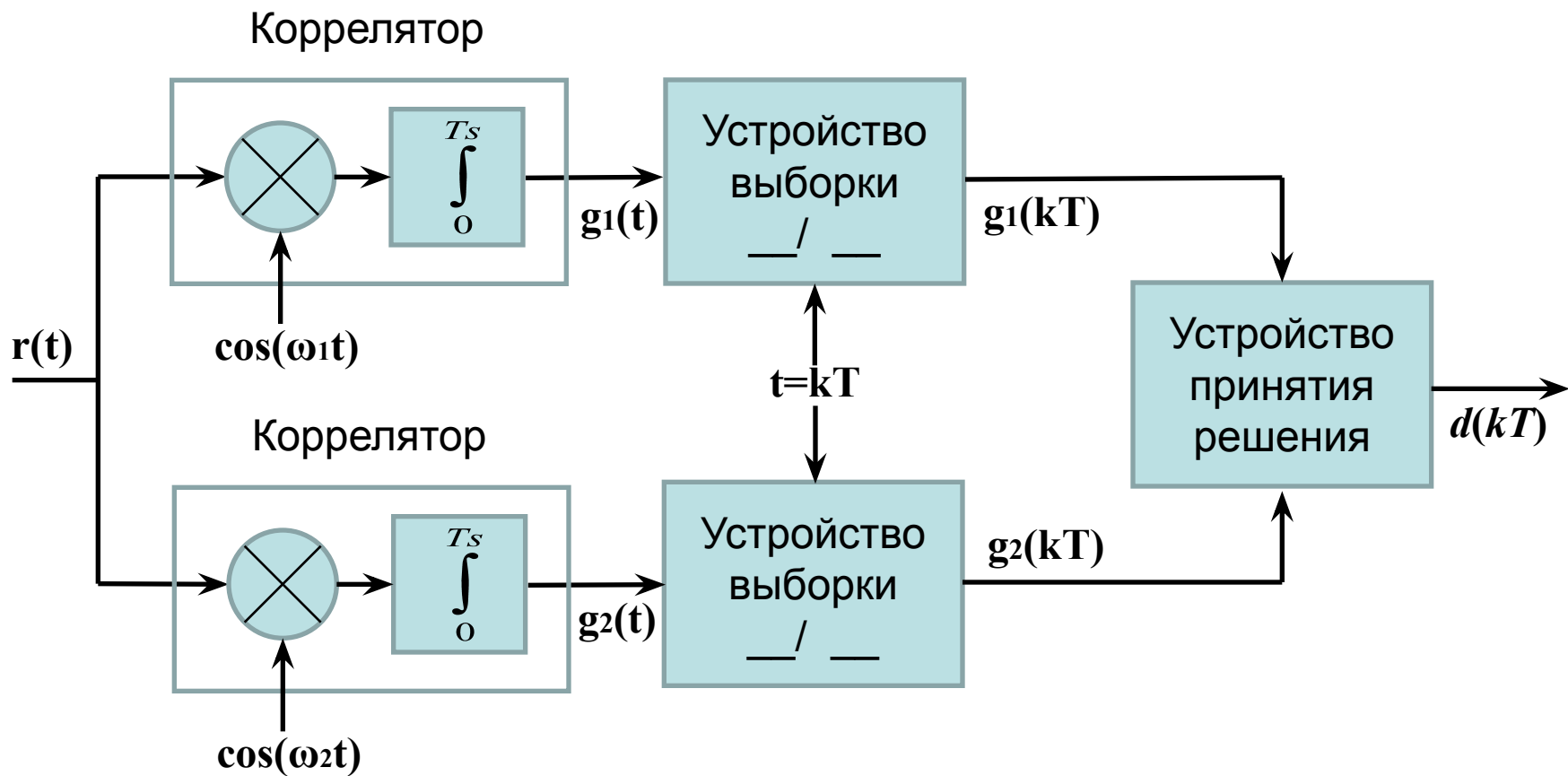
Такому случаю соответствует 2-ЧМн сигнал.

Устройство принятия решения производит работу по правилу :

$$d(nT) = \begin{cases} 1, & y_1(kT) \geq y_2(kT) \\ 0, & y_1(kT) < y_2(kT) \end{cases}$$



Оптимальный когерентный приемник 2-ЧМн



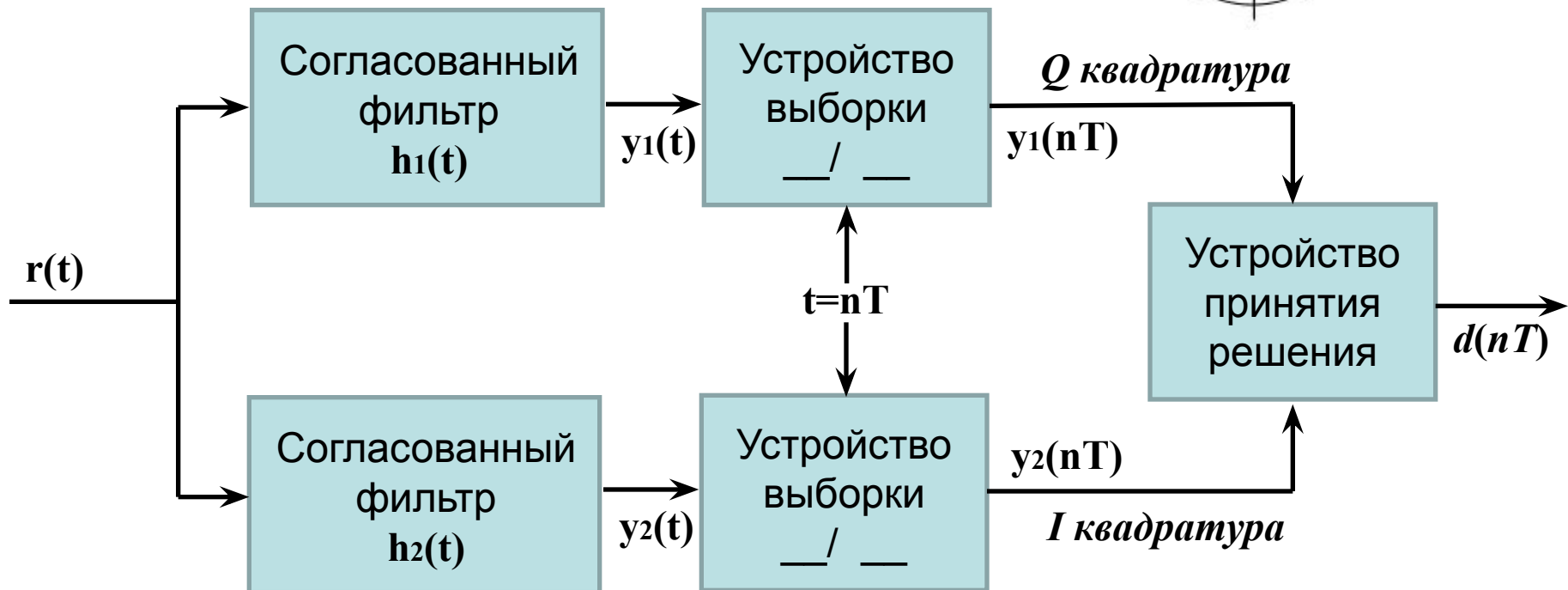
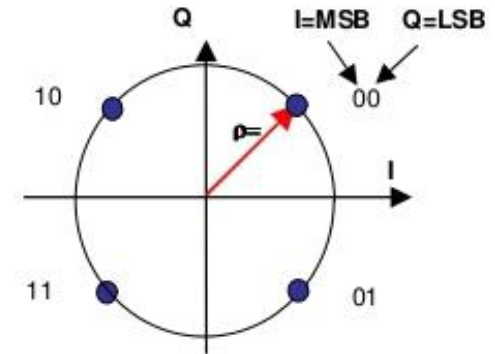
Оптимальный приемник 4-ФМн

Для приема 4-ФМн достаточно всего 2 согласованных фильтра.

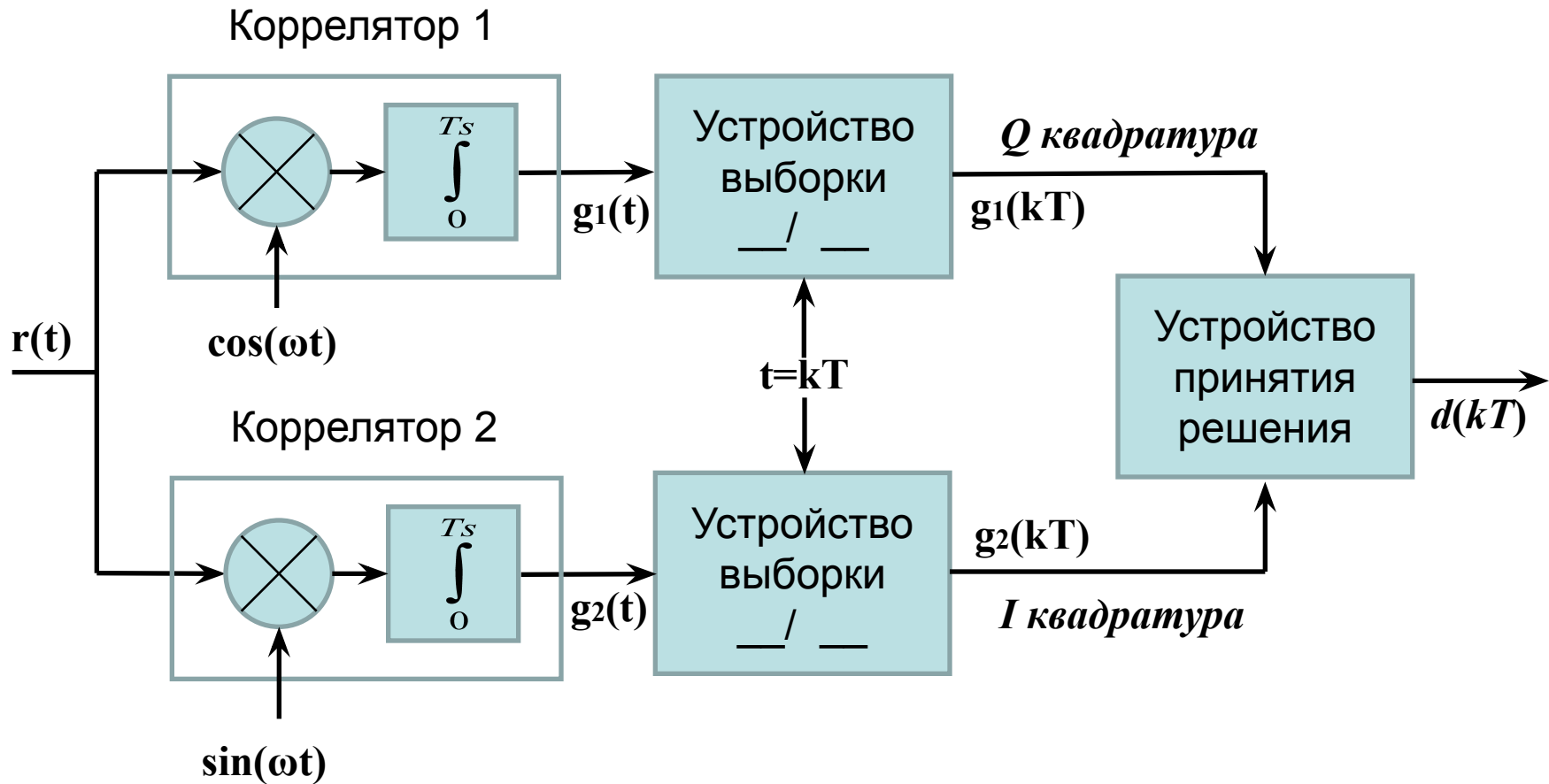
Это справедливо для всех М-ФМн и КАМ сигналов.

Для 4-ФМн устройство принятия решения работает по правилу:

$$d(kT) = \begin{cases} 11, & y_1(kT) < 0, y_2(kT) < 0 \\ 10, & y_1(kT) < 0, y_2(kT) \geq 0 \\ 01, & y_1(kT) \geq 0, y_2(kT) < 0 \\ 00, & y_1(kT) \geq 0, y_2(kT) \geq 0 \end{cases}$$



Оптимальный приемник М-ФМн и КАМ сигналов на корреляторах



Оптимальный приемник М-ФМн и КАМ

Для М-ФМн и КАМ устройство принятия решения выбирает тот символ, евклидово расстояние до которого минимально.

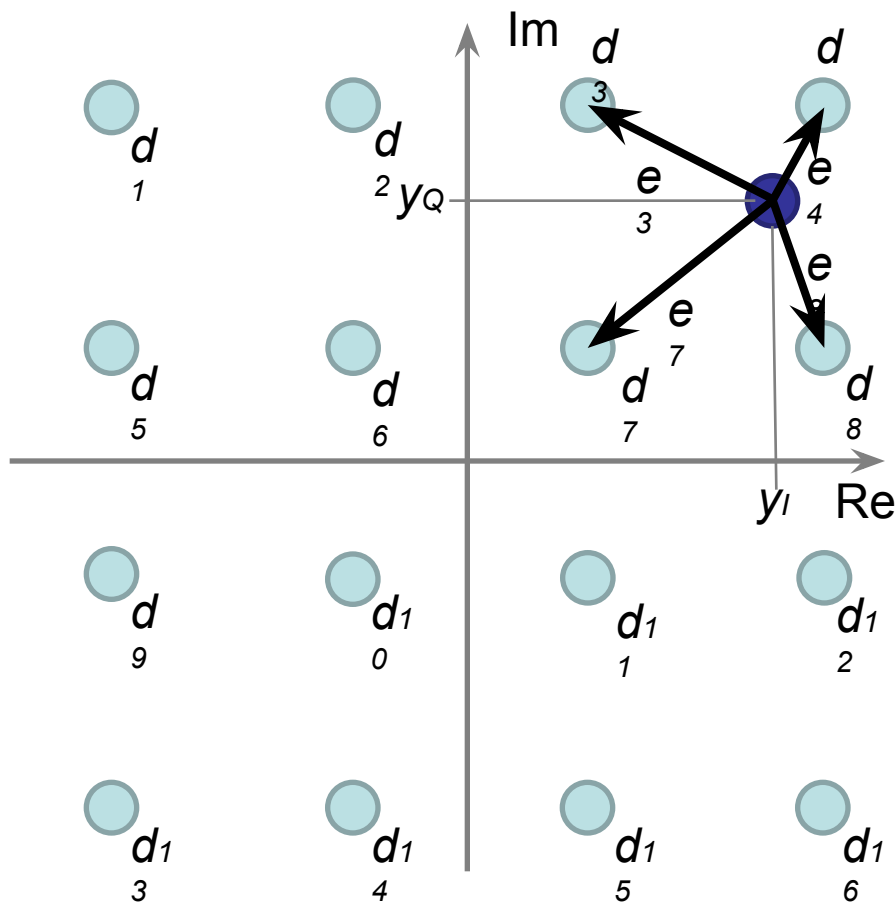
Евклидово расстояние определяется через выражение:

$$e_m = \sqrt{(y_I - d_{I,m})^2 + (y_Q - d_{Q,m})^2}$$

e_m – евклидово расстояние до m -го символа d_m ;

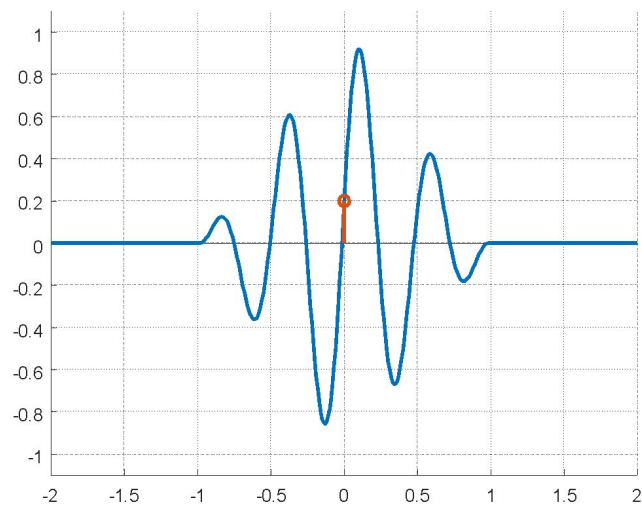
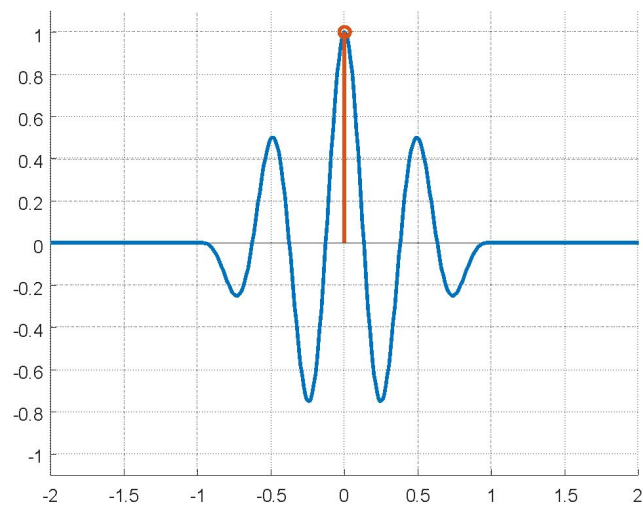
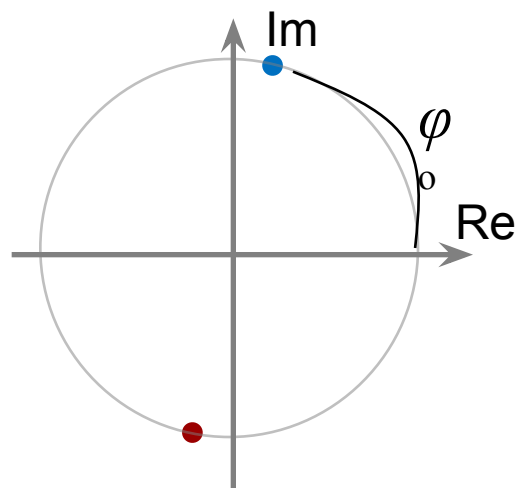
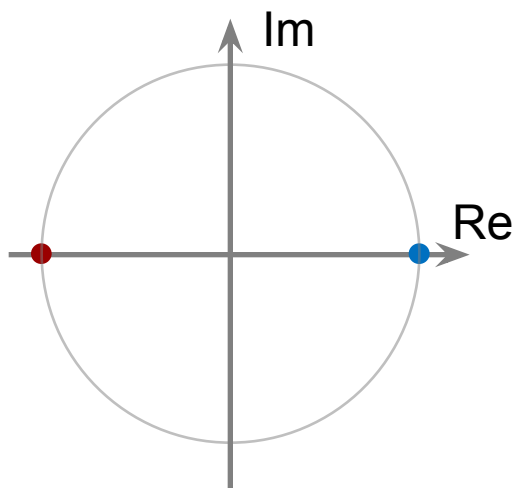
$d_{I,m}$ и $d_{Q,m}$ – проекция на оси I и Q (координаты) m -го символа d_m ;

y_I и y_Q – проекция на оси I и Q (координаты) принятого значения.



Когерентный и некогерентный прием

Что будет если начальная фаза φ_0 будет не такая, какую мы ожидаем?

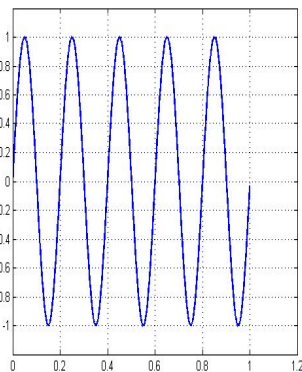


Ортогональность сигналов

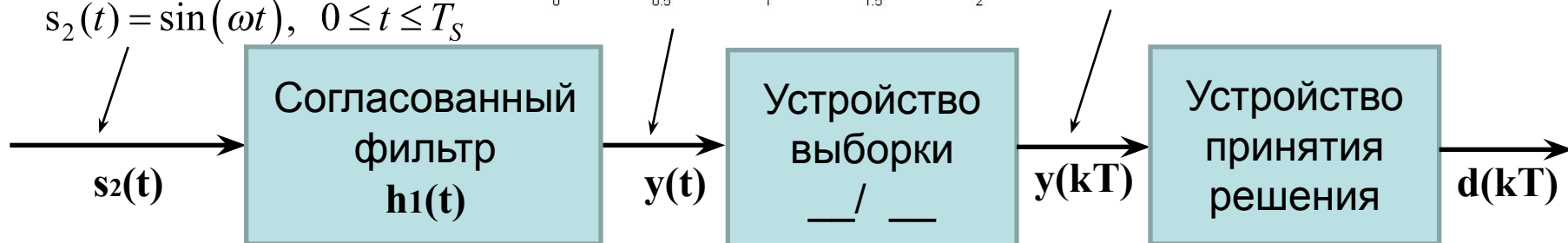
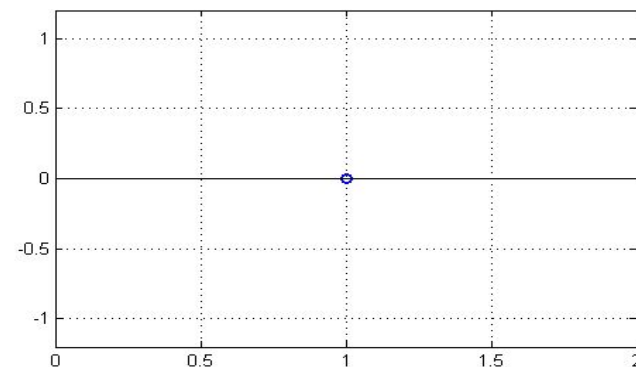
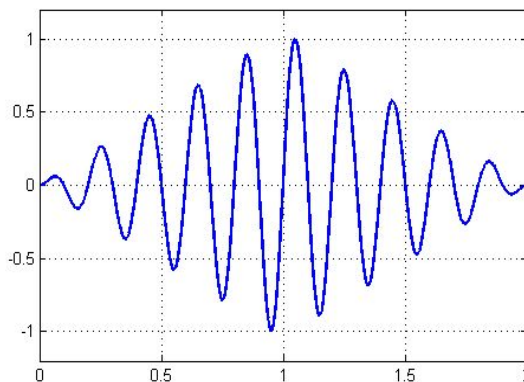
Сигналы $s_1(t)$ и $s_2(t)$ длительностью T_s называются ортогональными, если их коэффициент корреляции равен нулю:

$$R = \int_0^{T_s} s_1(\tau)s_2(\tau)d\tau = 0$$

Если на коррелятор или фильтр, согласованный с сигналом $s_1(t)$, подать ортогональный сигнал $s_2(t)$, то на выходе коррелятора или СФ при $t=T_s$ будет ноль.



$$s_2(t) = \sin(\omega t), \quad 0 \leq t \leq T_s$$

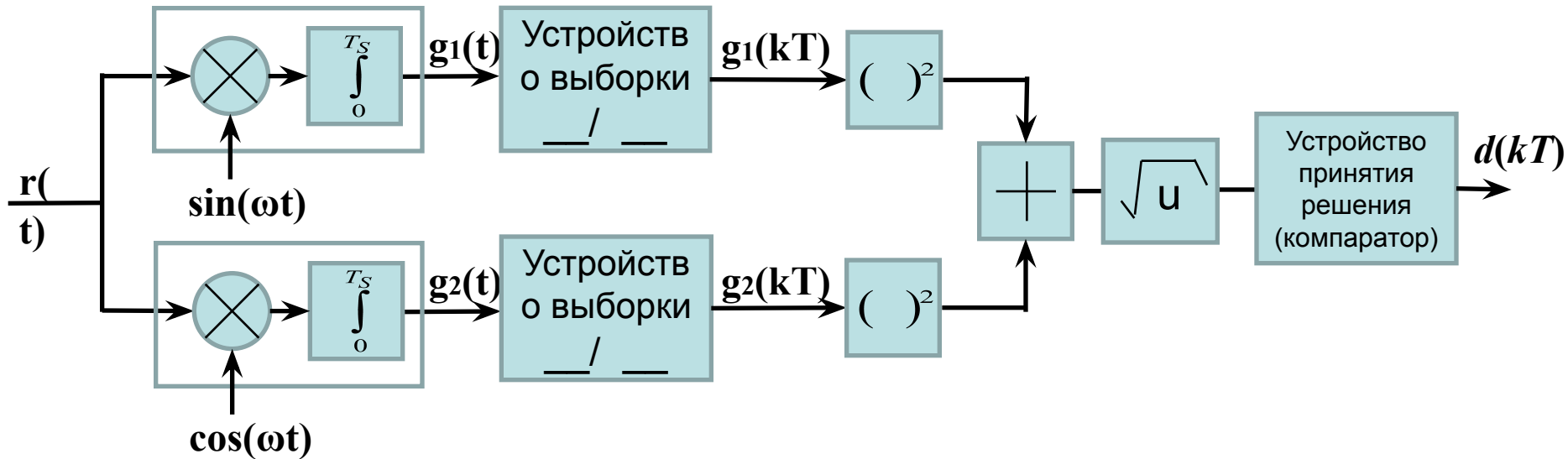


Оптимальный некогерентный приемник АМн сигналов

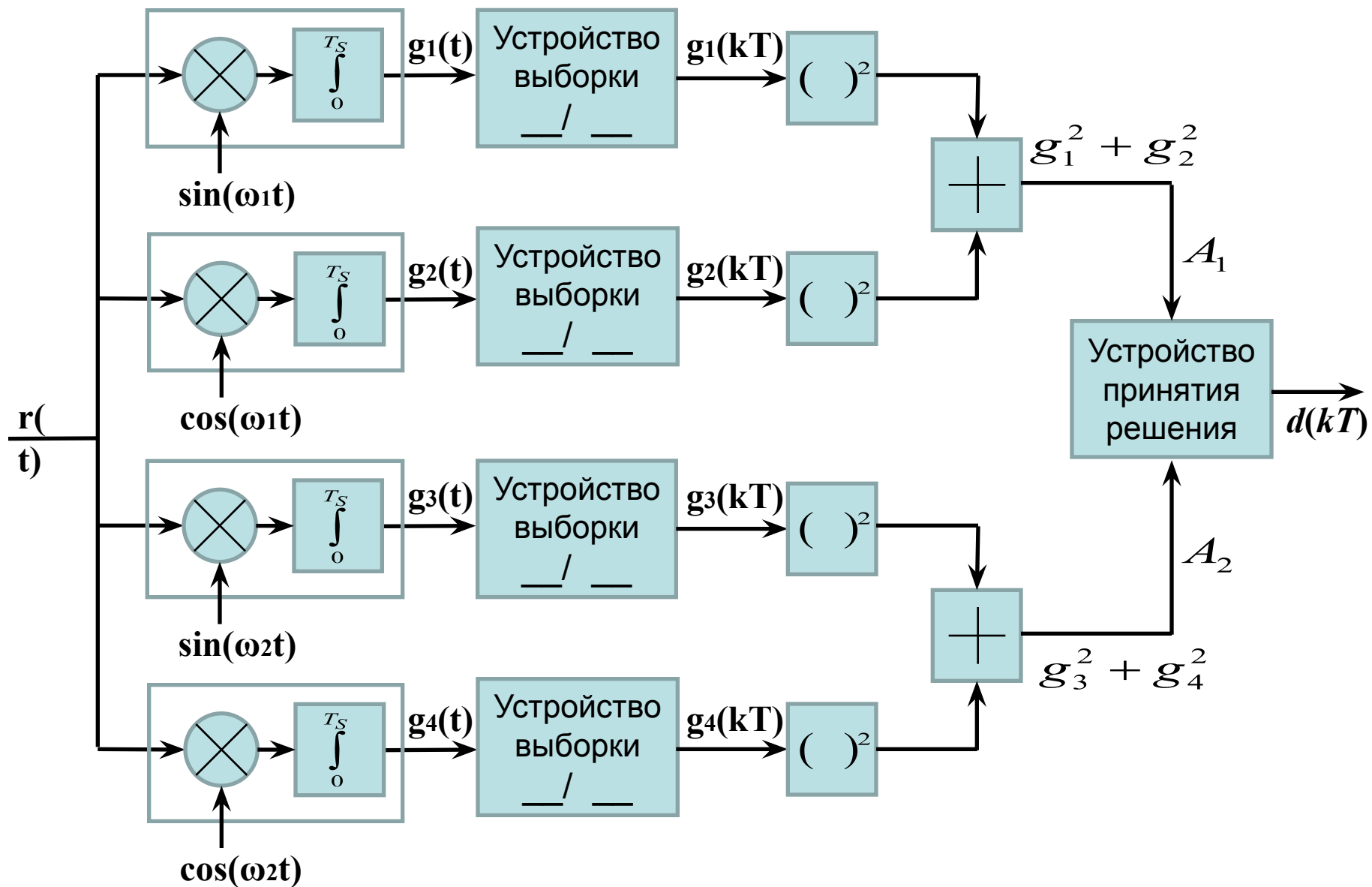
Оптимальный приемник двоичный сигналов для случая, когда:

$$s_1(t) = ks_2(t)$$

На корреляторах



Некогерентный приемник 2-ЧМн



Вероятность ошибки

Вероятность ошибки двоичных равновероятных сигналов определяется выражением:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b(1 - R_b)}{N_0}}\right)$$

где R_b – нормированный коэффициент взаимной корреляции:

$$R_b = \frac{1}{E_b} \int_0^T s_1(\tau)s_2(\tau)d\tau$$

E_b – энергия двоичного символа (бита):

$$E_b = \int_0^T |s_1(t)|^2 dt = \int_0^T |s_2(t)|^2 dt$$

$Q(x)$ – Q-функция, определяется как: $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt, \quad x \geq 0$

Для ортогональных сигналов $R_b = 0$, поэтому :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Вероятность ошибки

Для биполярного антиподного сигнала, для которого выполняется условие $s_1(t) = -s_2(t)$ коэффициент взаимной корреляции $R_b = -1$, следовательно вероятность ошибки будет определяться выражением:

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

Для 2-ЧМн сигнала коэффициент взаимной корреляции зависит от разницы частот между сигналами. При когерентном приеме определяется через выражение:

$$R_b = \frac{\sin(\omega_2 - \omega_1)T}{(\omega_2 - \omega_1)T} = \frac{\sin[2\pi(f_2 - f_1)T]}{2\pi(f_2 - f_1)T}$$

Коэффициент взаимной корреляции можно считать пренебрежимо малой величиной при разности частот $(\omega_2 - \omega_1)T \gg 2$ при которой $|R_b| < 0.07$.

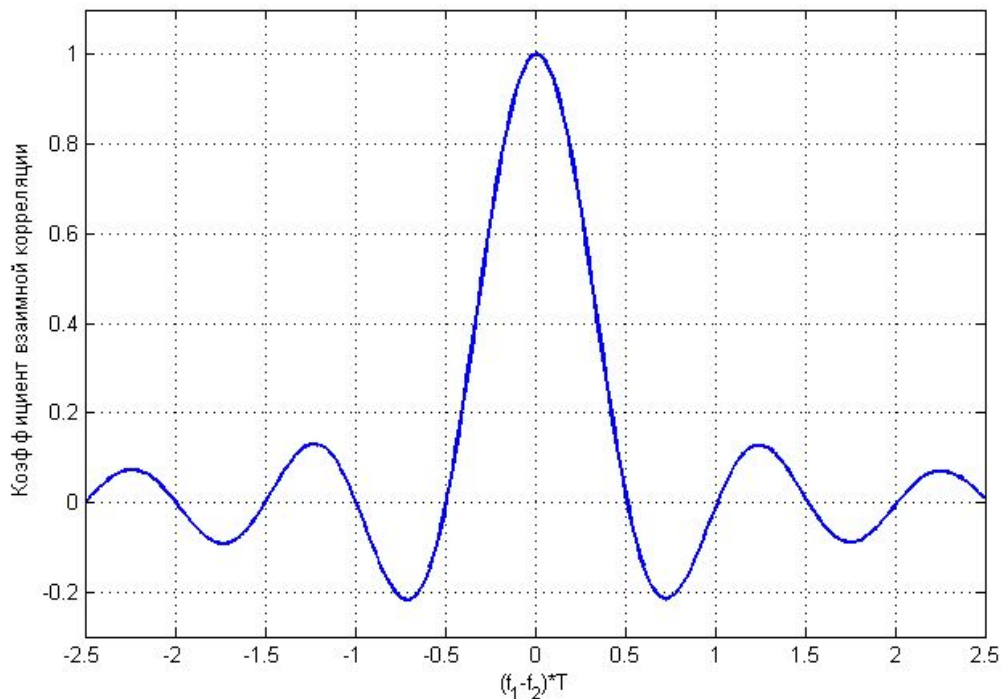
Коэффициент взаимной корреляции для 2-ЧМн при когерентном приеме

Встает вопрос, какая минимальная разность частот обеспечит нулевой коэффициент корреляции при минимальной ширине спектра.

Легко заметить, что $Rb=0$ в значениях:

$$f_2 - f_1 = \frac{n}{2T}$$

Минимальная разность при этом достигается при $f_2 - f_1 = \frac{1}{2T}$

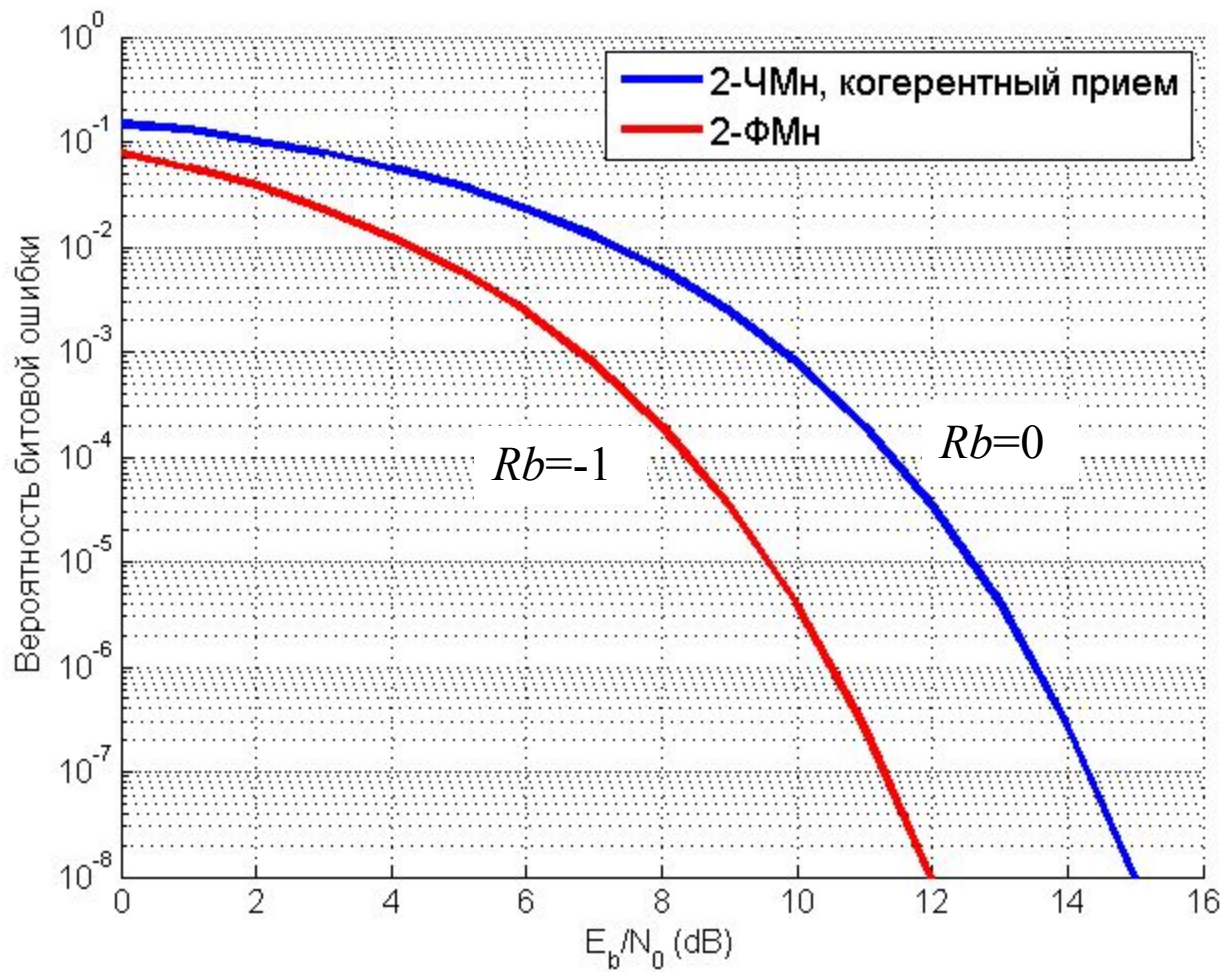


2-ЧМн для которой выполняется условие

$$f_2 - f_1 = \frac{1}{2T}$$

называется модуляцией с минимальным сдвигом (MSK).

Вероятность ошибки



Б. Скляр – Цифровая связь

- Импульсная характеристика и свертка – стр. 61.
- Согласованный фильтр – стр. 151.
- Цифровой согласованный фильтр – стр. 211.
- Связь свертки и корреляции – стр. 153.
- Когерентный прием (детектирование) – стр. 210.
- Когерентный прием М-ФМн – стр. 215.
- Некогерентный прием – стр. 221.
- Некогерентный прием ЧМн (FSK) – стр. 225