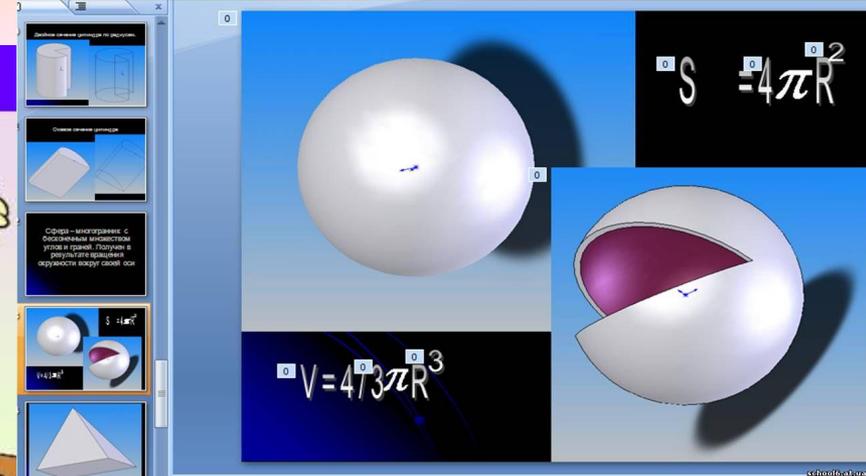
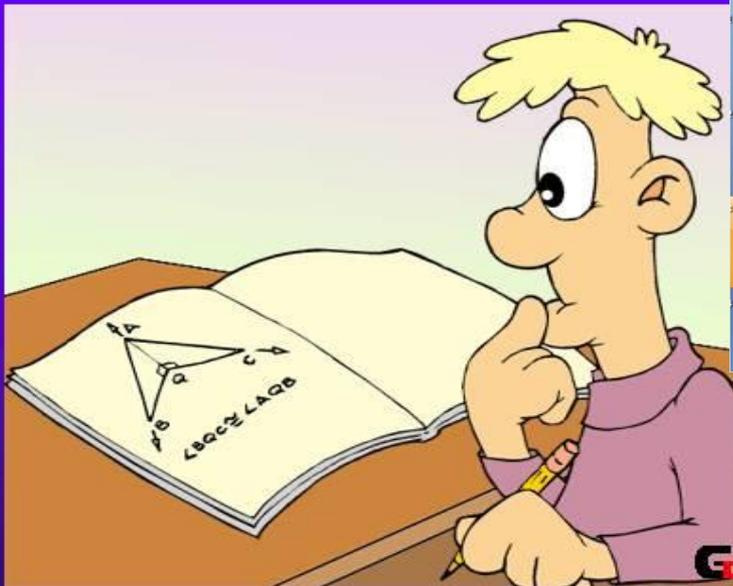
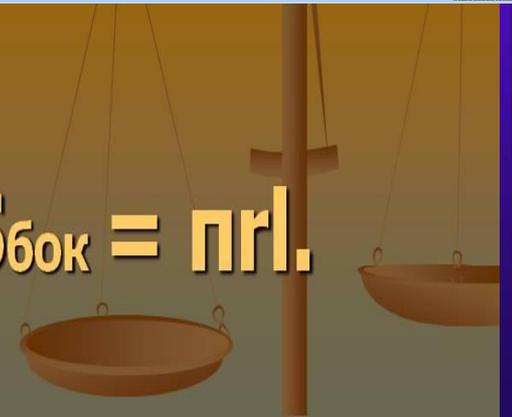


# Комбинации тел с шаром

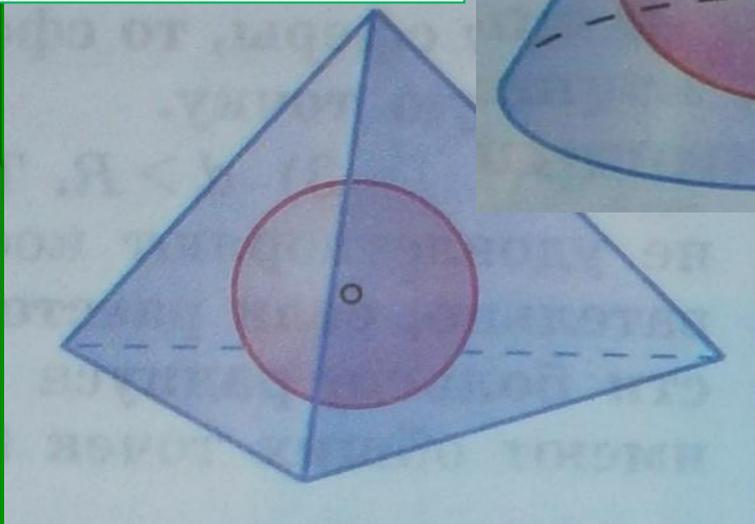
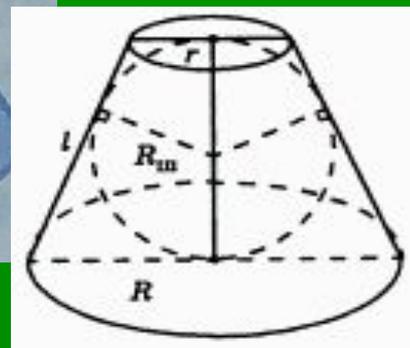
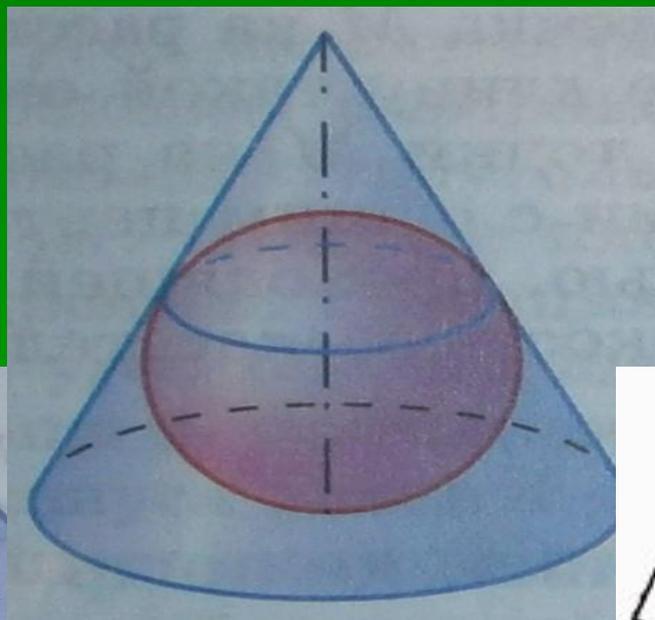
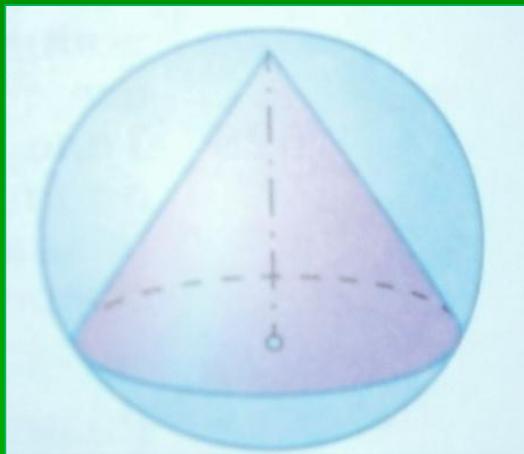
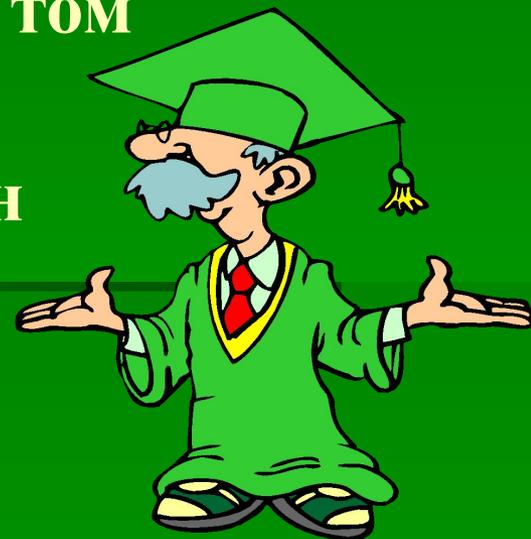


$$S_{\text{бок}} = \pi r l.$$



Никакую проблему нельзя решить на том же уровне, на котором она возникла.

А. Эйнштейн



# Необходимо помнить!



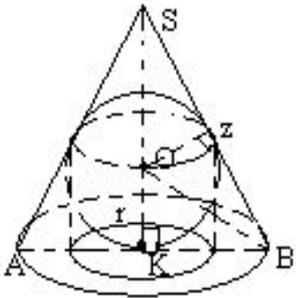
- около любого треугольника можно описать окружность;
- около четырехугольника можно описать окружность, если суммы его противоположных углов равны  $180^{\circ}$  (прямоугольник, квадрат, равнобокая трапеция и т.д.);
- около любого правильного многоугольника можно описать окружность.

# Необходимо помнить:

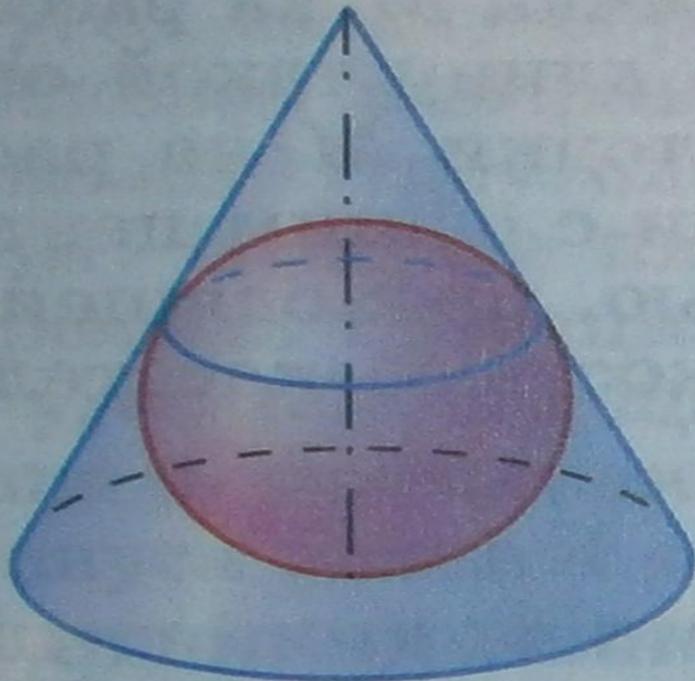


- в любой треугольник можно вписать окружность;
- в четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны (квадрат, ромб и т.д.);
- в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

# Шар, вписанный в конус



а) *ОПРЕДЕЛЕНИЕ:* Шар называется *вписанным в конус*, если он касается основания конуса в его центре и конической поверхности.



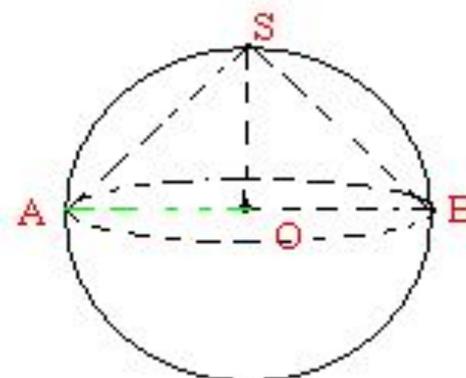
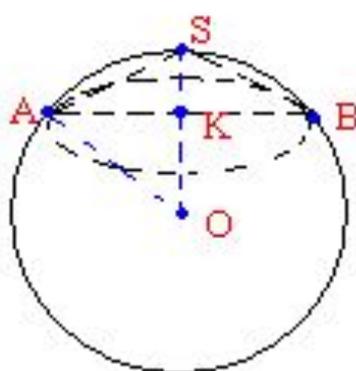
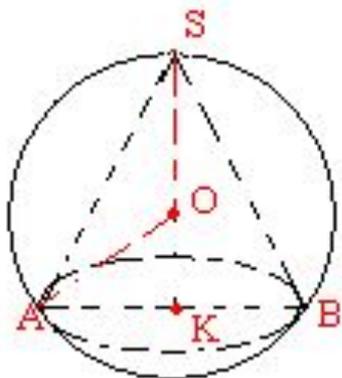
б) Множество точек касания с конической поверхностью образует окружность, центр которой лежит на высоте конуса. Её радиус  $r$  зависит от радиуса шара  $R$  и расстояния  $d$  от центра шара до плоскости, в которой лежит окружность.  $R^2 = r^2 + d^2$ ;  $r^2 = R^2 - d^2$

# Шар, описанный около конуса

центр шара внутри конуса

центр шара вне конуса

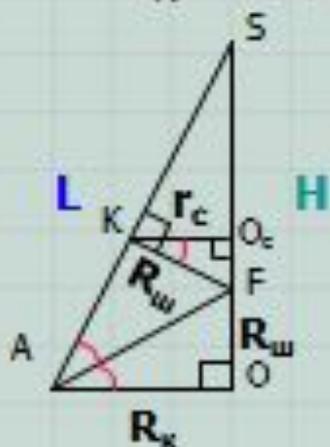
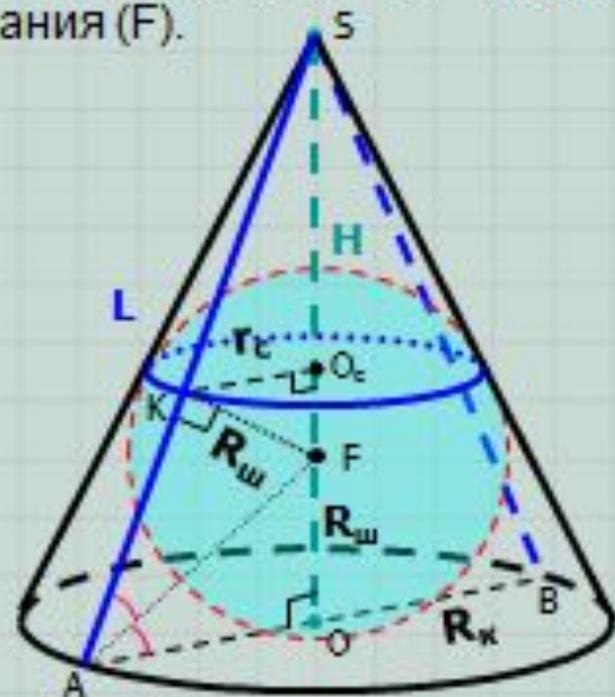
центр на основании  
конуса



- Конус вписан в шар, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара. Центр шара находится на высоте или её продолжении.
- $AO=SO=OB=R_{\text{ш}}$                        $SO=AO=OB= R_{\text{ш}}$                        $SO=AO=OB =R_{\text{ш}}$

### Шар (сфера), вписанные в конус

Центр – точка пересечения высоты конуса и биссектрисы угла между образующей конуса и плоскостью основания (F).



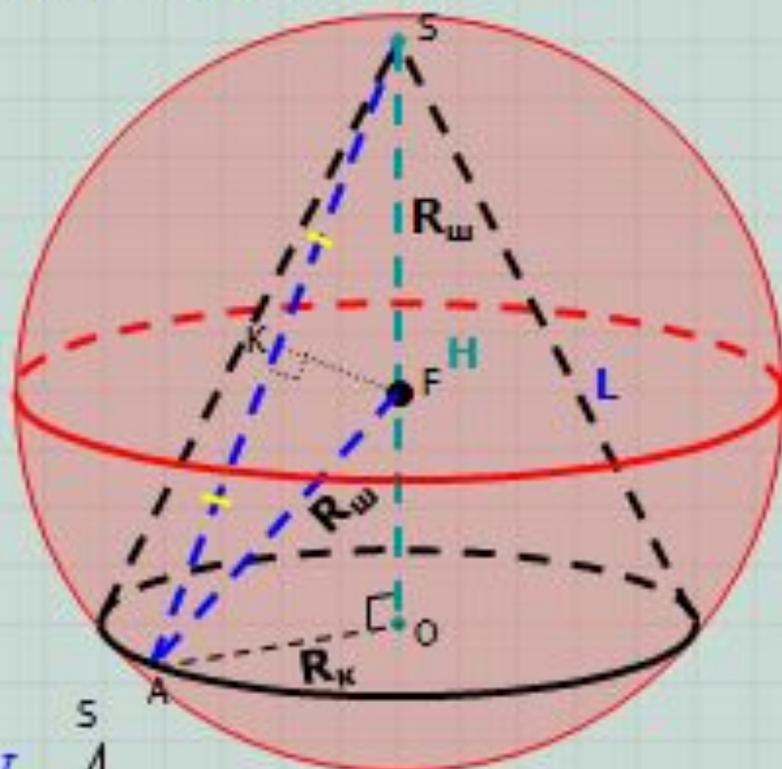
$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_w}{H - R_w} = \frac{R_c}{L}$$

### Шар (сфера), описанные около конуса

Центр – точка пересечения высоты конуса и серединного перпендикуляра к образующей конуса (F).

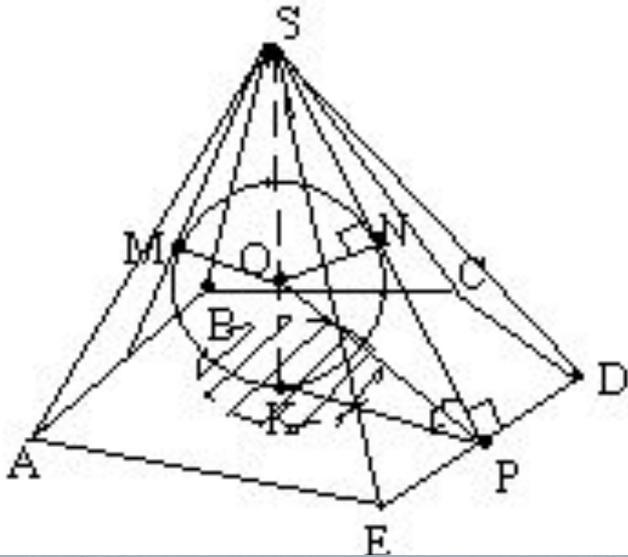


$$\triangle SKF : \triangle SOA$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{R_w}{L} = \frac{L/2}{H} = \frac{KF}{R_c}$$

# Шар, вписанный в пирамиду.

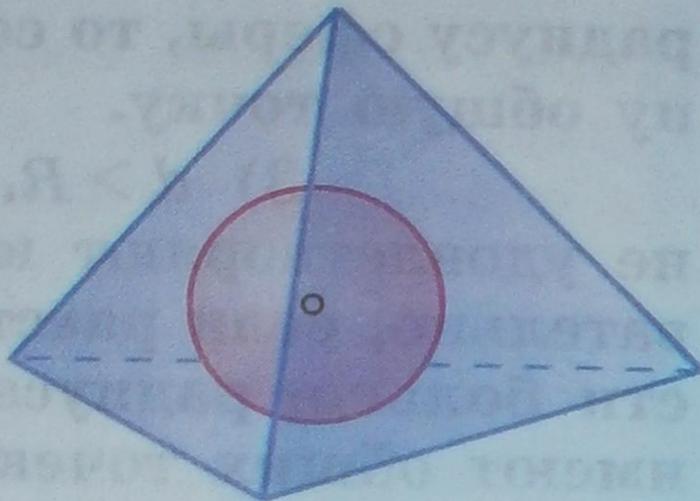


Шар называется **вписанным** в произвольную пирамиду, если он касается всех граней пирамиды (как боковых, так и основания).

O – точка равноудалённая от всех граней пирамиды

$OM=ON=OK=r_{ш}$ .

M, N, K – точки касания.



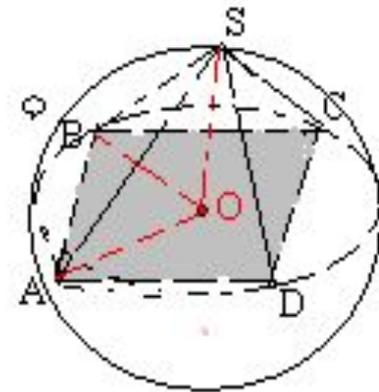
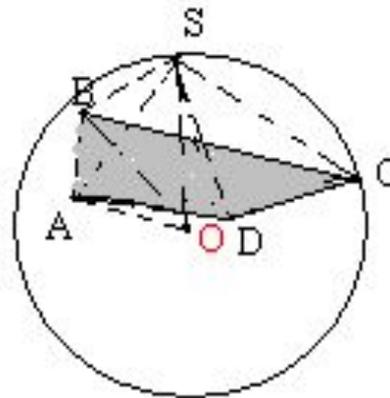
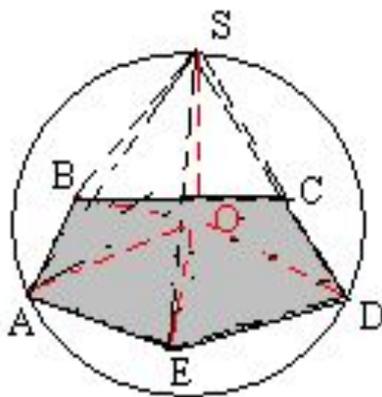
**Замечание.** Ортогональной проекцией шара является круг, который не является вписанным в многоугольник, являющийся основанием.

# Шар, описанный около пирамиды

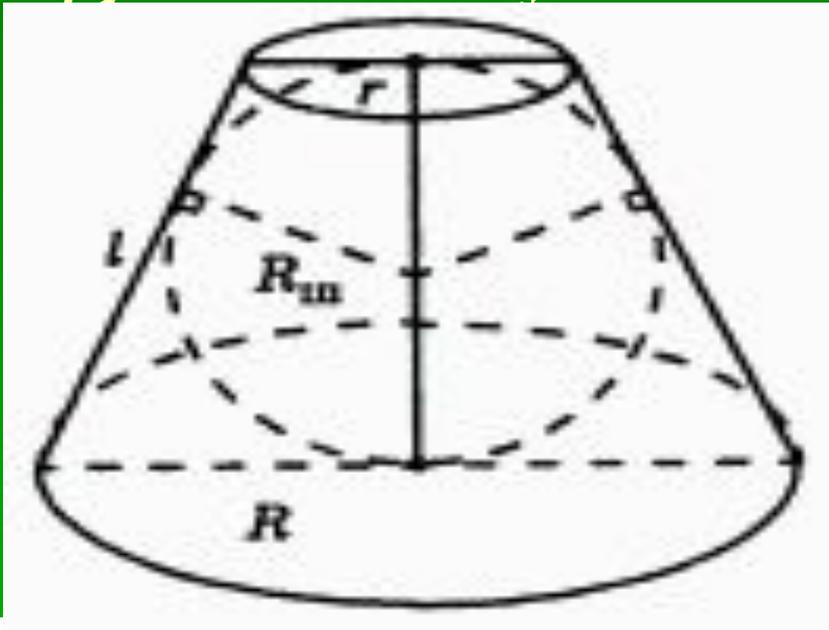
- Определение: Шар называется описанным около произвольной пирамиды, если все вершины пирамиды лежат на его поверхности

3 случая взаимного расположения:

- центр шара внутри пирамиды
- вне пирамиды ;
- в плоскости её основания

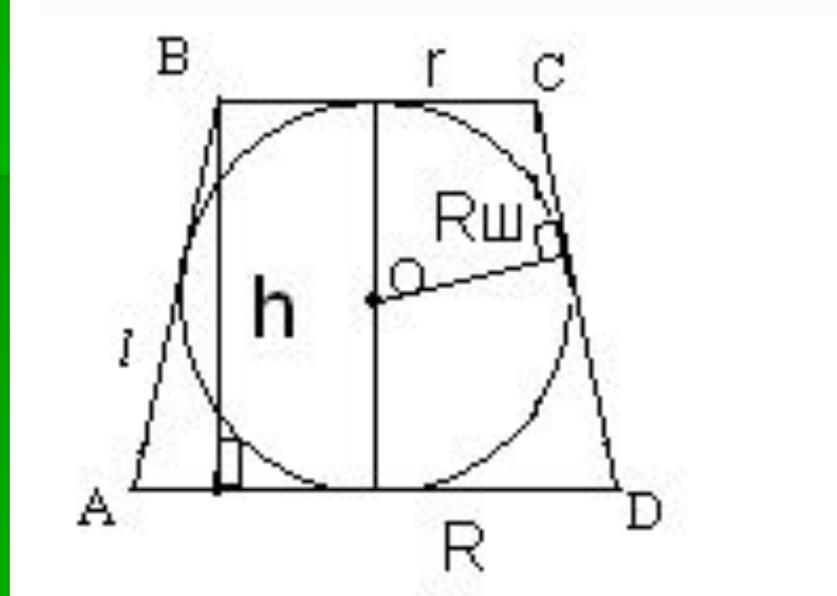


## Шар, вписанный в усечённый конус



а) **Шар называется вписанным в усечённый конус**, если он касается оснований конуса в их центрах и конической поверхности.

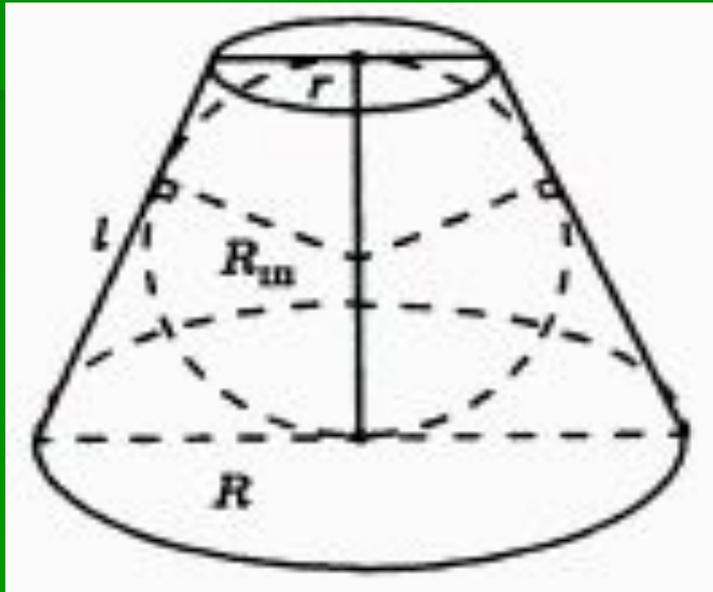
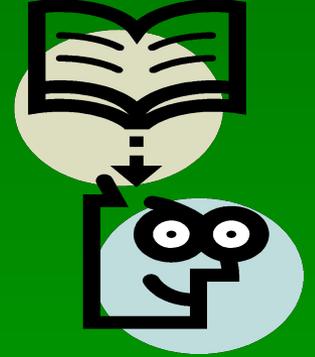
б) Осевым сечением данной комбинации тел является окружность, вписанная в равнобедренную трапецию, радиус которой равен радиусу вписанного шара.



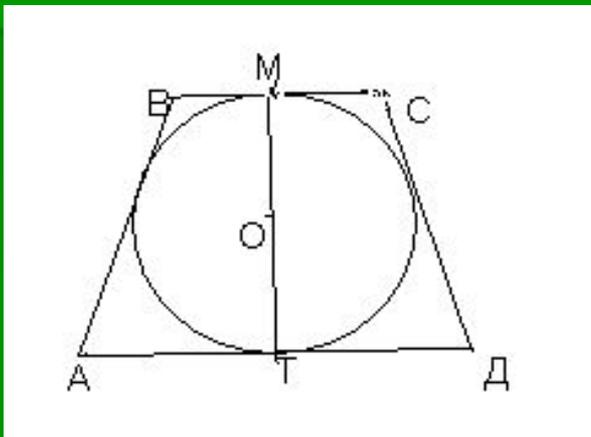
в) Для того, чтобы в усечённый конус можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы сумма его диаметров равнялась удвоенной длине образующей.

$d + D = 2l$  или  $r + R = l$ ,  $l$  - образующая конуса,  $r, R$  - радиусы оснований конуса.  $H = 2 R_{\text{ш}}$

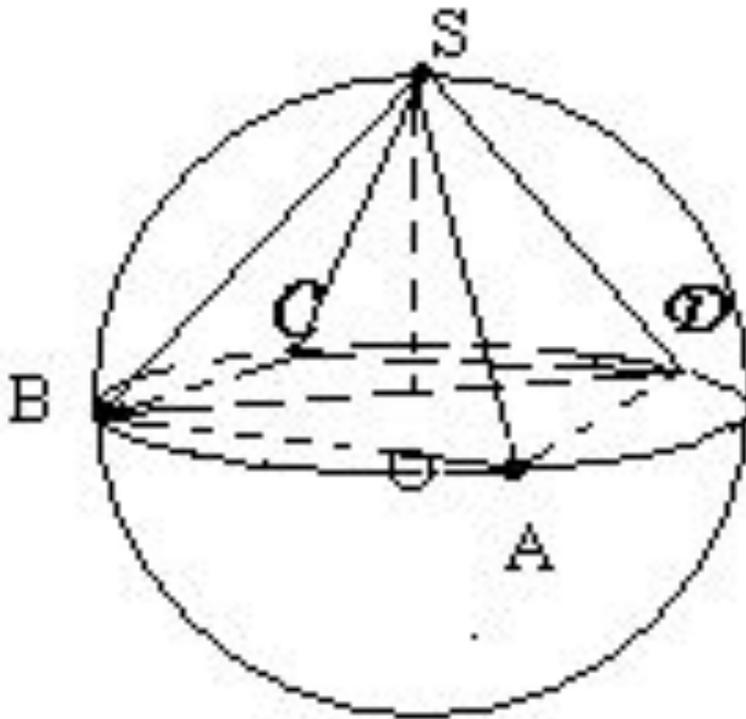
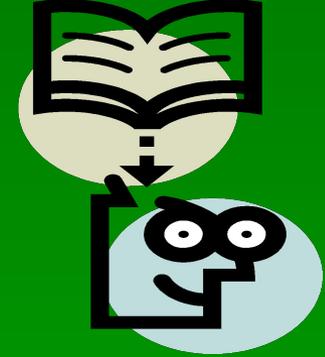
# ПРОВЕРЬ СЕБЯ:



1. В усечённый конус вписан шар. Радиусы оснований конуса 3 см и 5 см. Образующая конуса наклонена к основанию под углом  $30^\circ$ . Найти радиус шара.

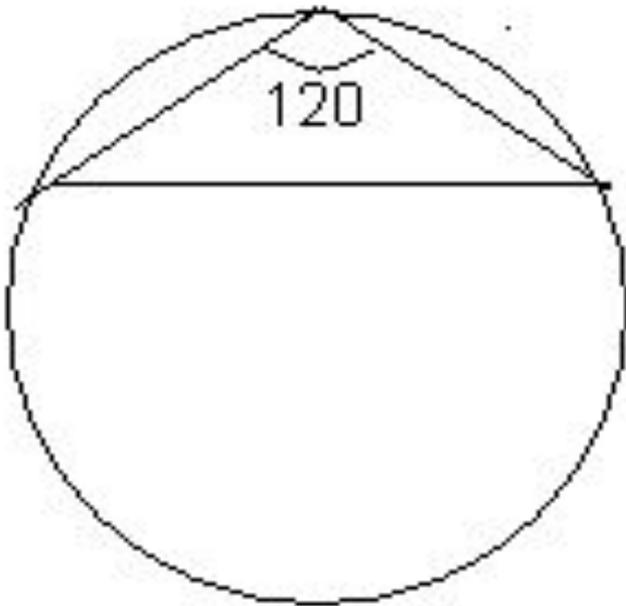
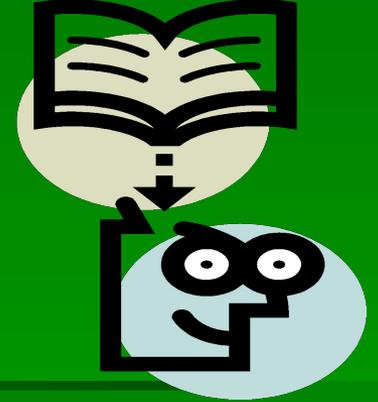


# ПРОВЕРЬ СЕБЯ:



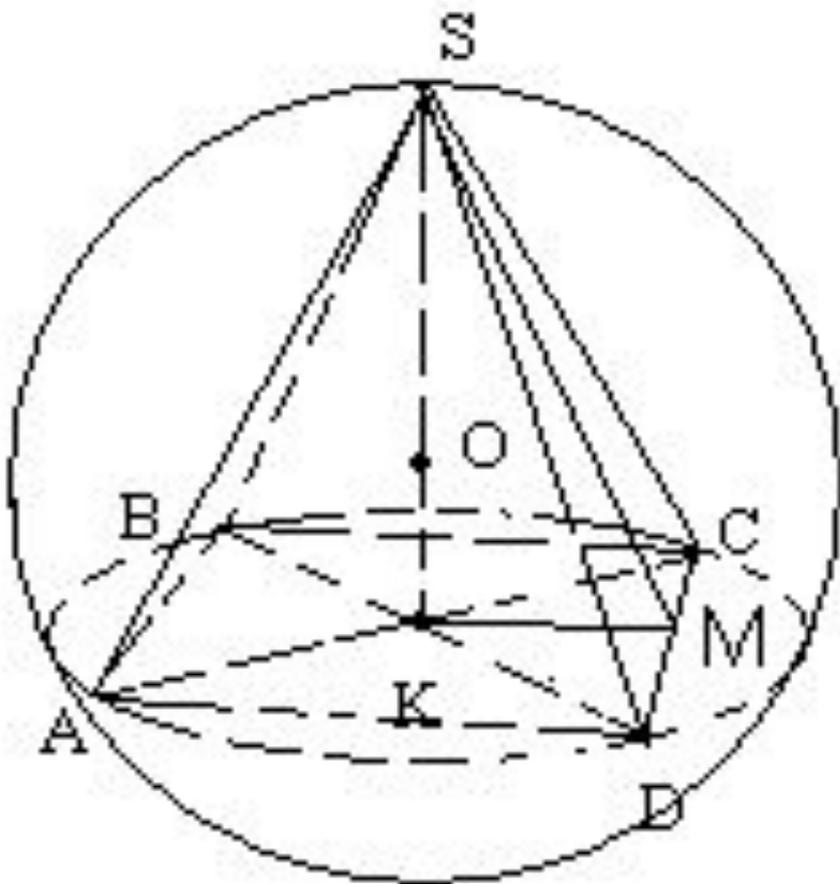
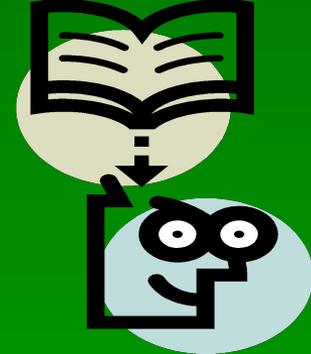
2. В шар вписана правильная четырёхугольная пирамида. Угол между противоположными боковыми рёбрами равен  $90^\circ$ . Сторона основания 4 см. Найти радиус описанного шара и высоту пирамиды.

# ПРОВЕРЬ СЕБЯ:



3. В шар вписан конус, угол между его образующими равен  $120^\circ$ . Образующая конуса 6 см. Где лежит центр шара? Чему равен его радиус?

# ПРОВЕРЬ СЕБЯ:



4. Апофема правильной четырёхугольной пирамиды 12 см. Двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Найти радиус описанного шара.

# ПРОВЕРЬ СВОИ ОТВЕТЫ:

Задача №1	2 см
Задача №2	$4\sqrt{2}$ см
Задача №3	6 см
Задача №4	$5\sqrt{3}$ см

