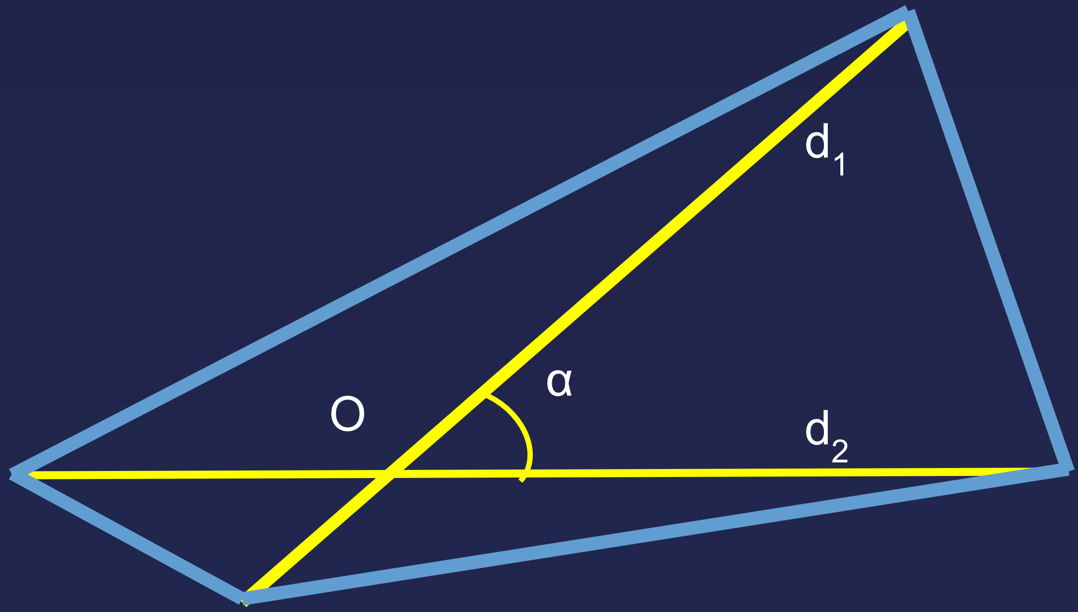
ГОСУДАРСТВЕННАЯ ИТОГОВАЯ АТТЕСТАЦИЯ
ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН
МАТЕМАТИКА 9 КЛАСС
МОДУЛЬ ГЕОМЕТРИЯ (часть 2)

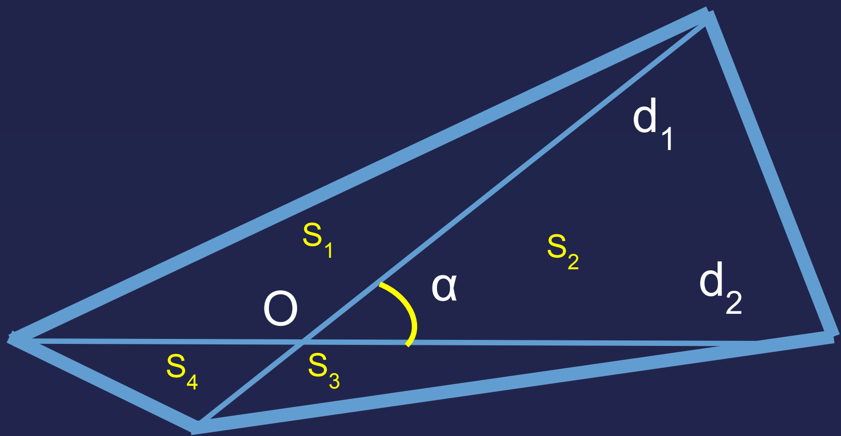
Выпуклые четырёхугольники Специфика параллелограммов Специфика трапеций

Учитель математики высшей категории Сысуева Ольга Александровна, ГБОУ СОШ№ 22 г.о. Чапаевск, Самарской области



Площадь выпуклого четырёхугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$$



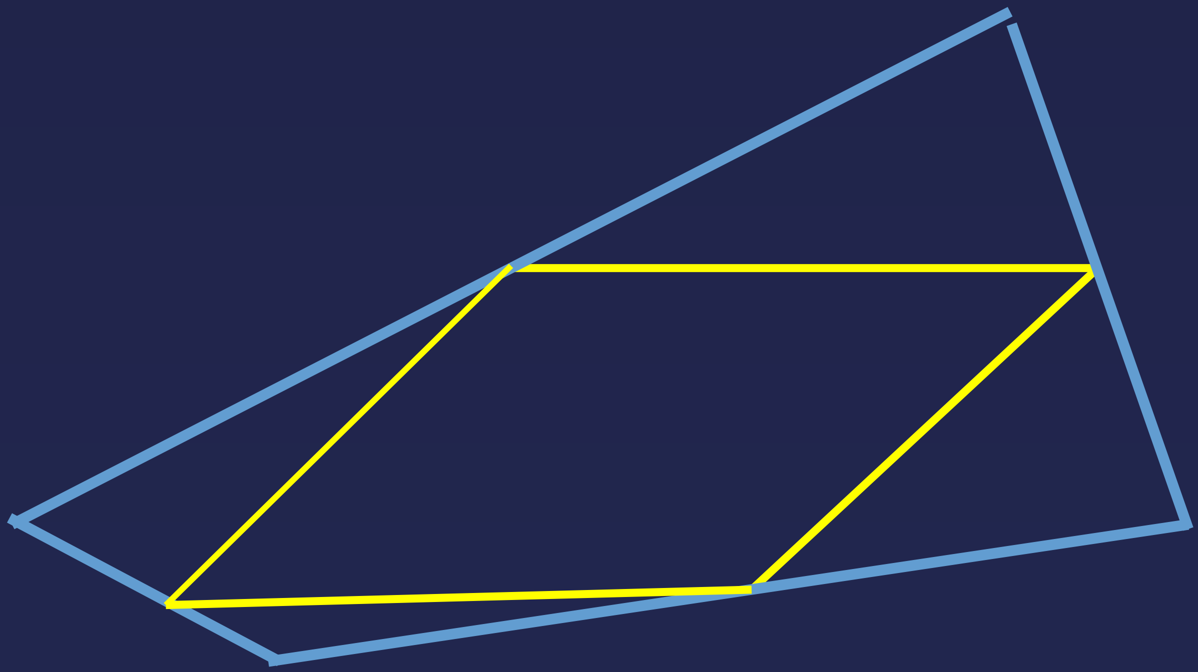
Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на части так, что произведения площадей треугольников, прилегающих к противоположным сторонам четырёхугольника, равны:

$$S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

Обоснование: **найти площадь каждого из образованных диагоналями четырёх треугольников по формуле**

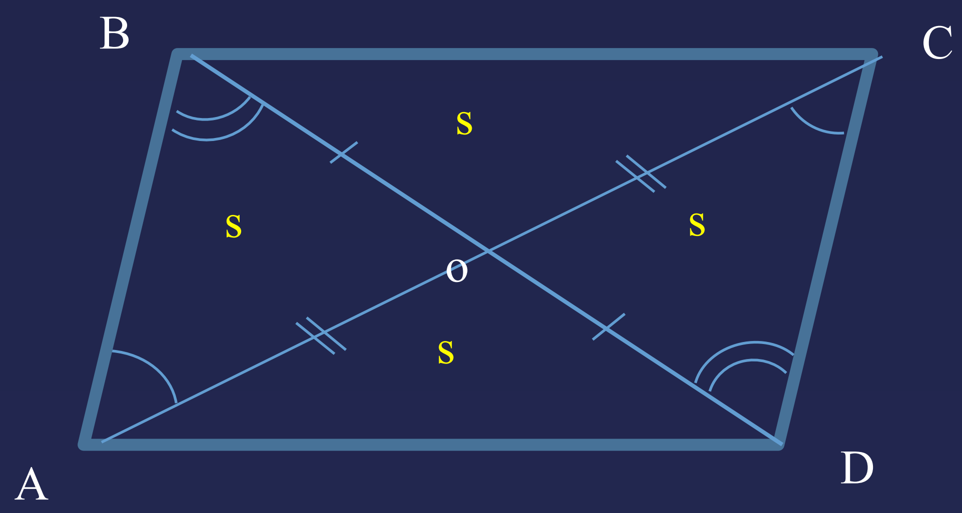
$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

Затем сложить эти площади *(свойство 1)* или перемножить (*свойство 2*).



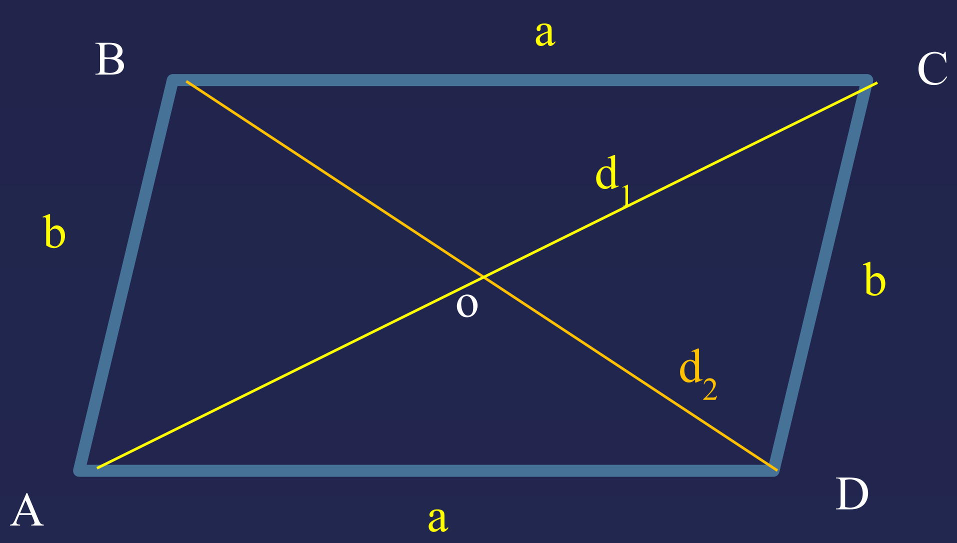
Середины сторон выпуклого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырёхугольника.

Специфика параллелограмма



1. **Диагонали параллелограмма делят его на две пары равных треугольников; площади всех этих треугольников равны между собой.**

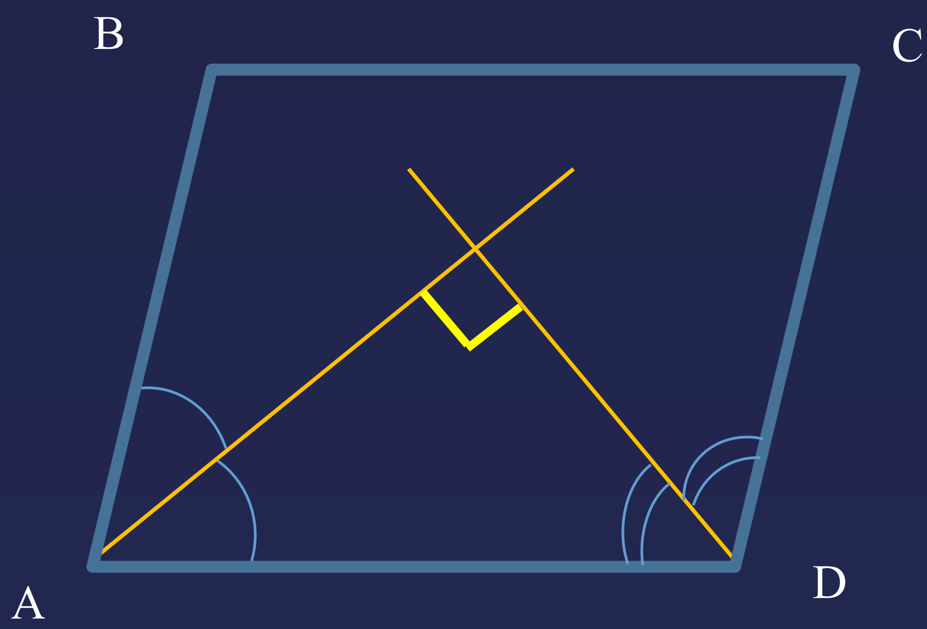
Специфика параллелограмма



2. **В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон:**

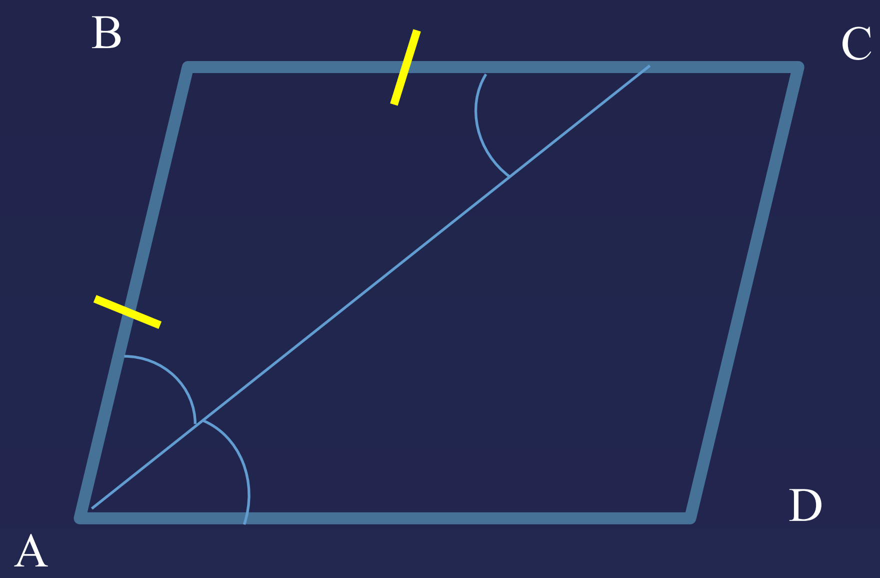
$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

Специфика параллелограмма



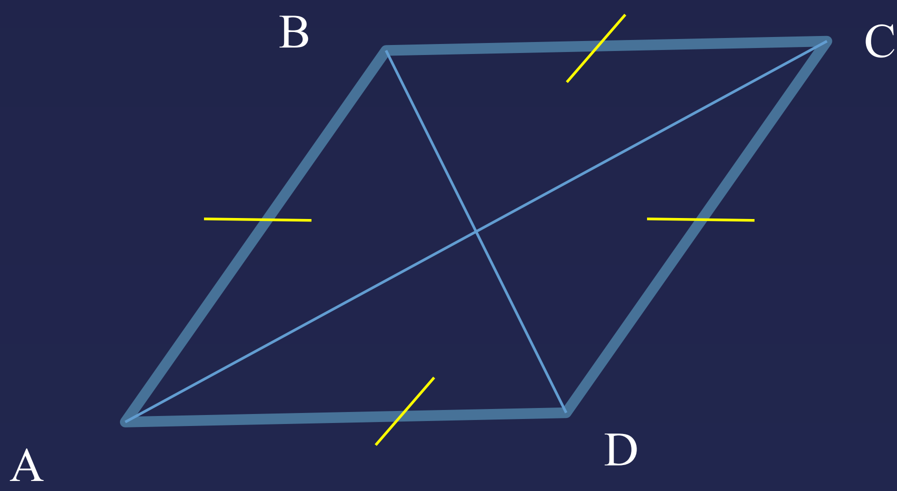
3. Биссектрисы углов, прилежащих к любой из сторон параллелограмма, перпендикулярны.

Специфика параллелограмма



4. При проведении биссектрисы любого угла параллелограмма получается равнобедренный треугольник.

Специфика параллелограмма

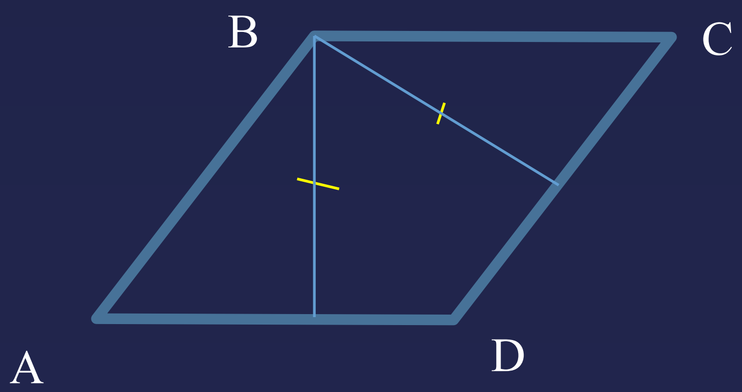


1. Параллелограмм, у которого все стороны равны, является ромбом.

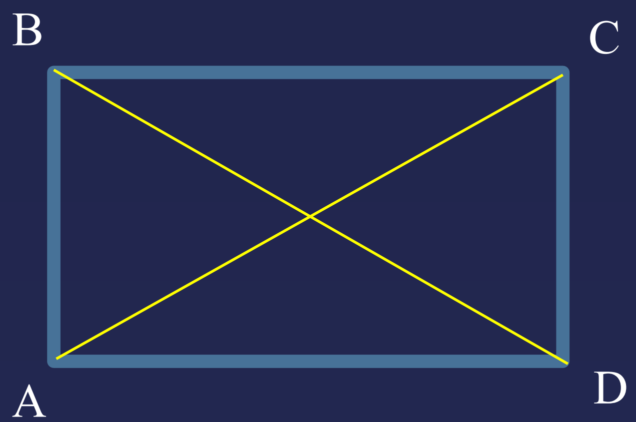
2. Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, является ромбом.

3. Параллелограмм, диагонали которого являются биссектрисами его углов, является ромбом.

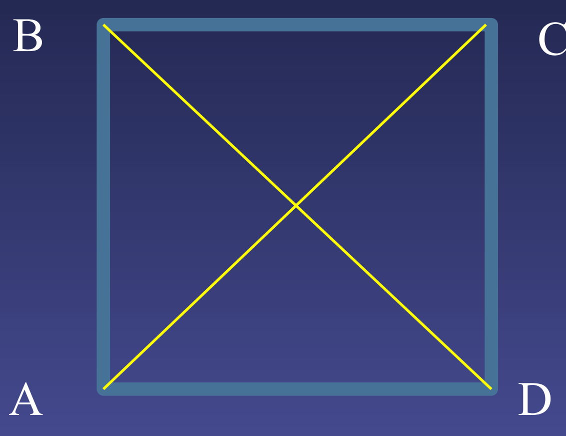
Специфика параллелограмма



4. Параллелограмм, имеющий равные высоты, является ромбом.

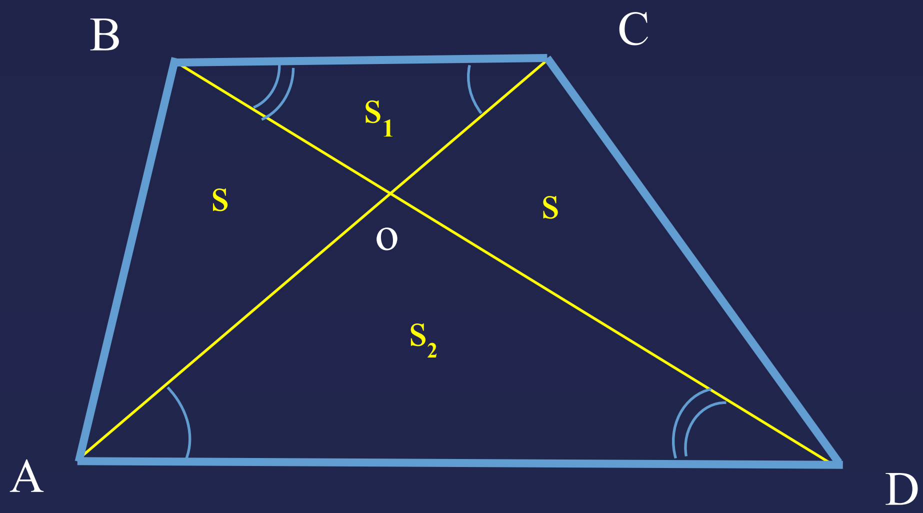


5. Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.



6. Параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны и равны, является квадратом.

Специфика трапеций

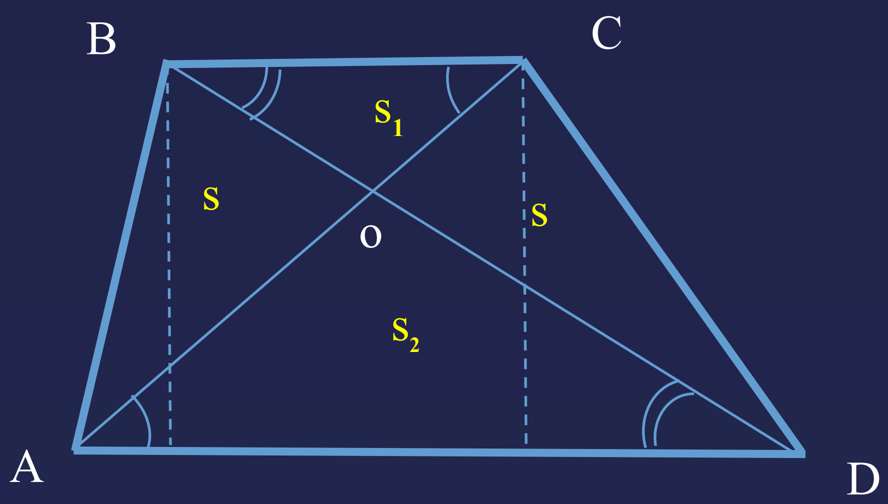


1. **Диагонали трапеции, пересекаясь, образуют четыре треугольника, два из которых равновелики, а два других – подобны с коэффициентом подобия равным отношению оснований трапеции.**

$\triangle OAD \sim \triangle OCB$ (по двум равным углам),

$S_{OAD} : S_{OCB} = k^2$, где $k = AD:BC = OA:OC = OD:OB$.

Специфика трапеций

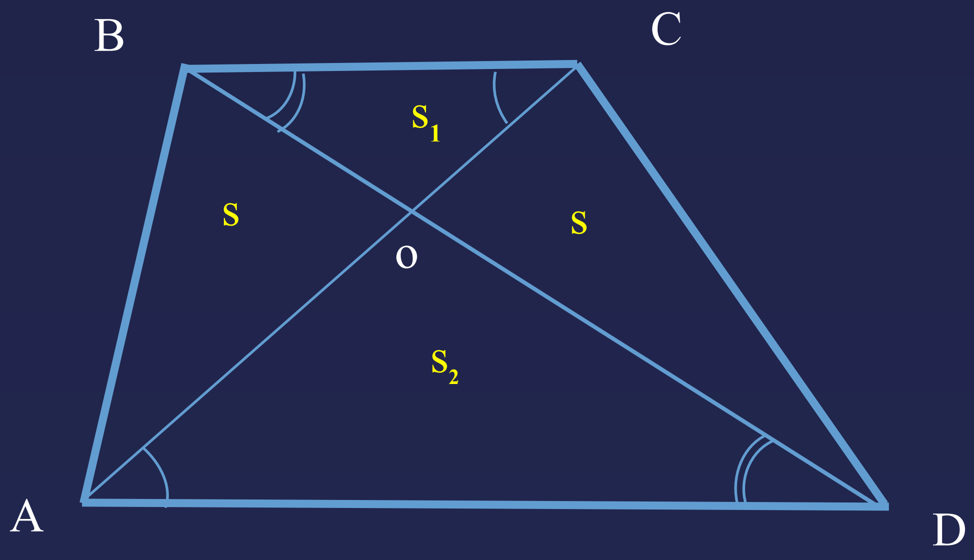


2. $S_{BAD} = S_{CAD}$, $S_{ABC} = S_{DBC}$ *(как площади треугольников, имеющих соответственно одинаковые основания и высоты).*

3. $S_{OAB} = S_{OCD}$ *(т.к.* $S_{OAB} = S_{ABC} - S_{OBC} = S_{DBC} - S_{OBC} = S_{OCD}$*).*

4. $S_{BAD} : S_{DBC} = AD : BC$ $(S_{BAD} = 0{,}5 \cdot AD \cdot h,\ S_{DBC} = 0{,}5 \cdot BC \cdot h)$.

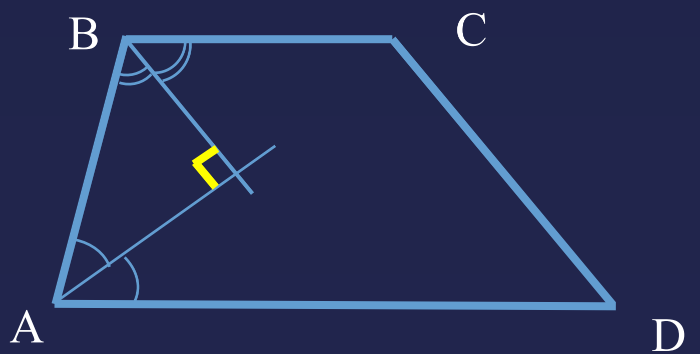
Специфика трапеций



5. Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника так, что произведение площадей тех из них, которые прилежат к основаниям, равно квадрату площади треугольника, прилежащего к любой из боковых сторон трапеции: $S_1S_2 = S^2$.

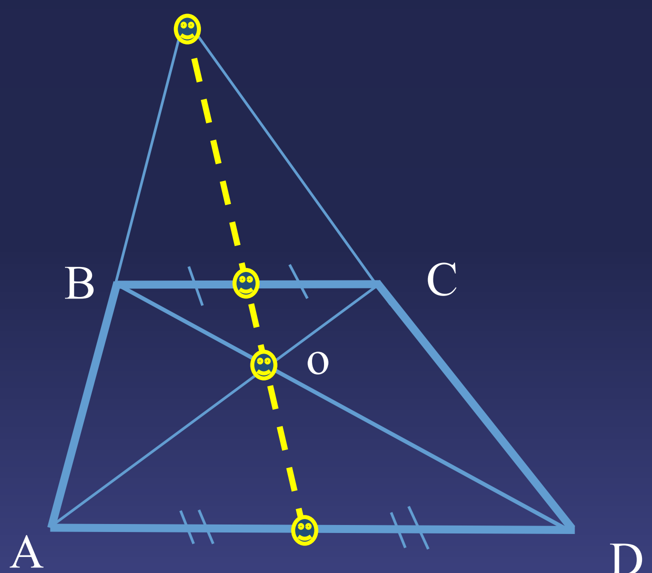
($S_{OAD} = S_1 = 0{,}5 \cdot OB \cdot OC \cdot \sin\alpha$, $S_{OCB} = S_2 = 0{,}5 \cdot OA \cdot OD \cdot \sin\alpha$,
$S_{OAB} = S = 0{,}5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin(180° - \alpha) = 0{,}5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\alpha$,
$S_{OCD} = S = 0{,}5 \cdot OC \cdot OD \cdot \sin(180° - \alpha) = 0{,}5 \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\alpha$, тогда $S_1S_2 = S^2$).

Специфика трапеций



6. **Биссектрисы углов, прилежащих к боковым сторонам трапеции, перпендикулярны**

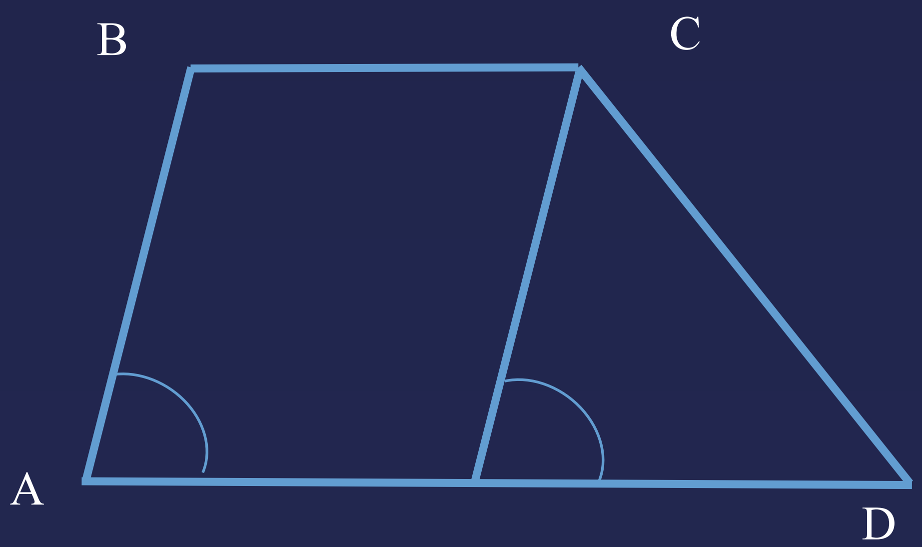
(следует из того факта, что сумма этих углов равна 180° как сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей).



7. **Точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон, середина верхнего и середина нижнего основания – лежат на одной прямой.**

Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые) дополнительные построения в задачах на трапецию.

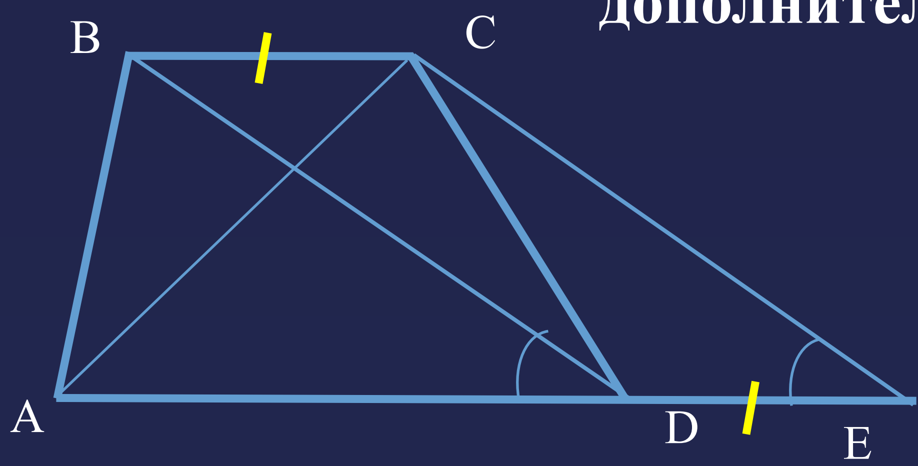


<u>Построение 1</u>

Через вершину меньшего основания трапеции провести прямую, параллельную её боковой стороне, до пересечения со вторым основанием; трапеция разбивается на параллелограмм и треугольник.

Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые) дополнительные построения в задачах на трапецию



<u>Построение 2</u>

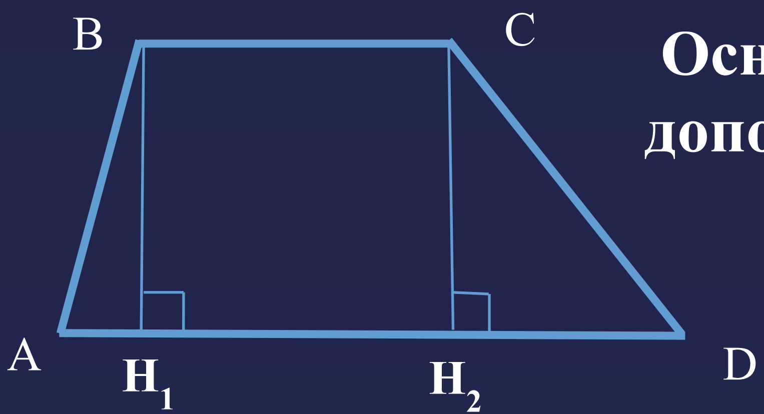
Из вершины *C* меньшего основания трапеции *ABCD* провести прямую *CE*, параллельную диагонали *BD*, до пересечения с *AD* в точке *E*; получится треугольник *ACE*, две стороны которого равны диагоналям трапеции, а длина третьей равна сумме длин оснований трапеции

$$AE = AD + DE.$$

При этом площадь трапеции *ABCD* равна площади образованного треугольника *ACE*: $S_{ABCD} = S_{ACE}$

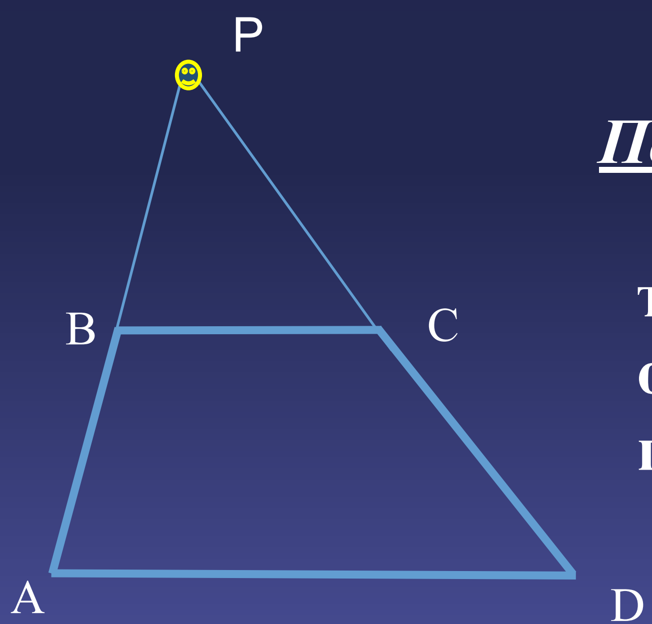
Специфика трапеций

Основные (наиболее распространённые) дополнительные построения в задачах на трапецию



Построение 3

Из вершин меньшего основания трапеции опустить две высоты *BH_1* и *CH_2*.

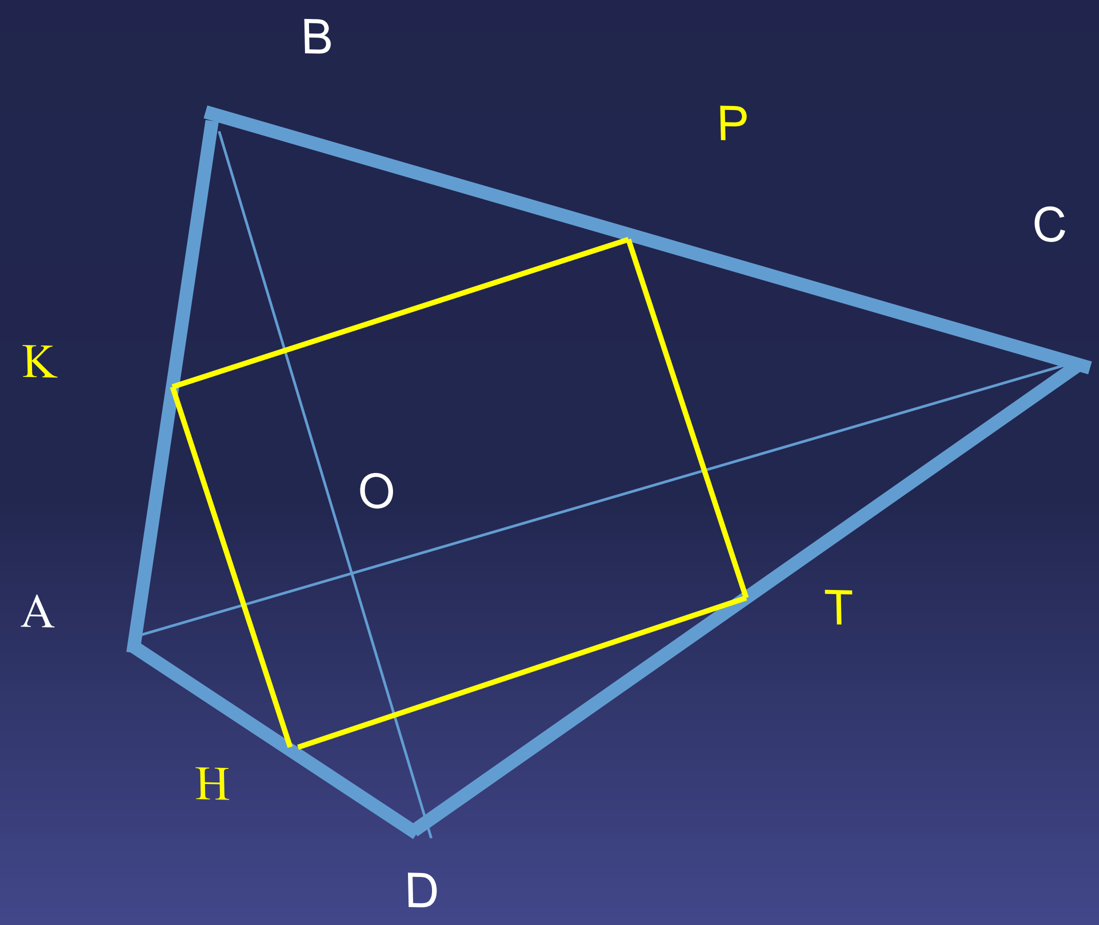


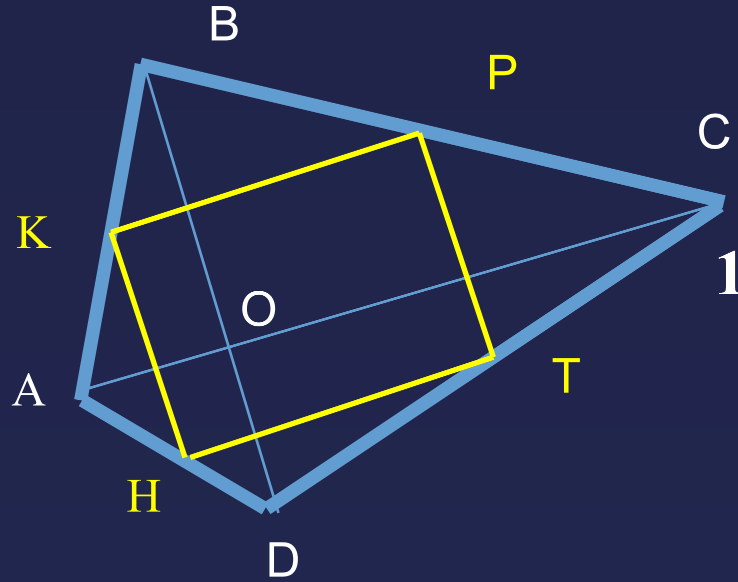
Построение 4

Достроить трапецию *ABCD* до треугольника *APD*, вершина *P* которого образуется при пересечении продолжений боковых сторон трапеции.

Задача №1. (Тренировочные варианты Иркутск 2013г.)

Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 3 и 4, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равны.





Решение.

1. Точки K, P, T, H середины сторон четырёхугольника $ABCD$. Отрезки AC и BD – диагонали четырёхугольника $ABCD$.

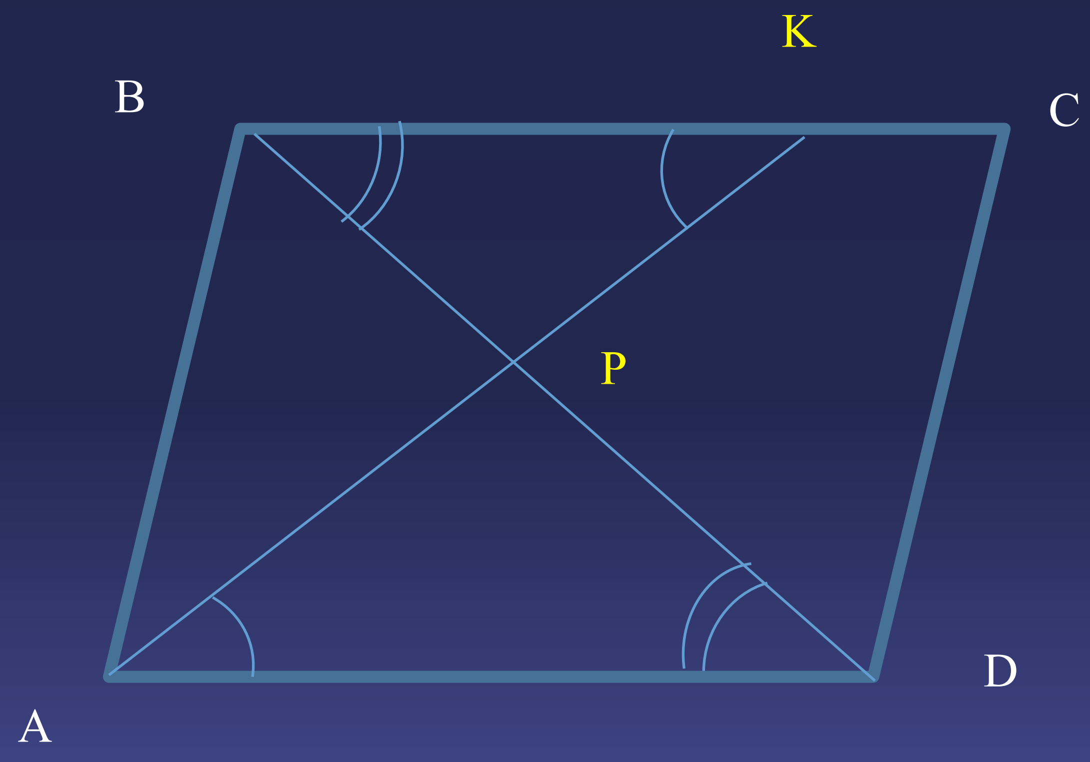
2. По свойству средней линии треугольника отрезки KH и PT параллельны диагонали BD и равны её половине; отрезки KP и HT параллельны диагонали AC и равны её половине. Значит, $KPTH$ – параллелограмм.

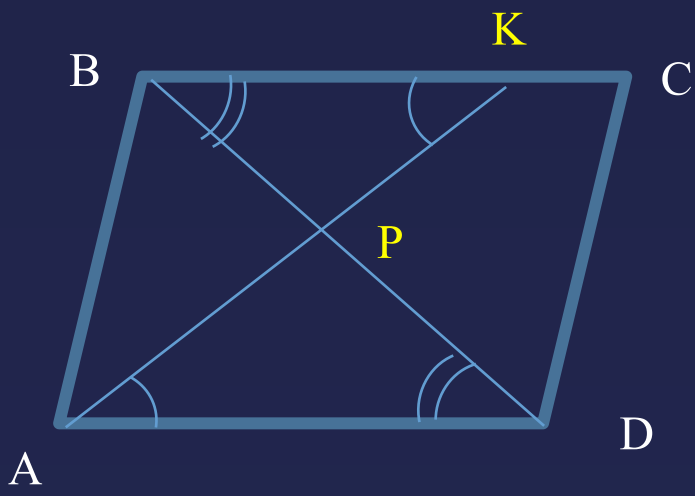
3. По условию $KT = PH$; значит, параллелограмм $KPTH$ – прямоугольник, угол KPT – прямой; следовательно, угол между диагоналями BD и AC тоже прямой, а значит,
$S_{ABCD} = 0{,}5 \cdot BD \cdot AC = 0{,}5 \cdot 3 \cdot 4 = 6.$

Ответ: 6.

Задача №2. (ФИПИ 2014г.)

На стороне *BC* параллелограмма *ABCD* выбрана точка К. Отрезки *AK* и *BD* пересекаются в точке *P*. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 24, а площадь четырёхугольника *PKCD* равна 10. Найдите площадь треугольника *APD*.





Решение.

1. $\triangle ABD = \triangle CDB$ *(по трём равным сторонам).*

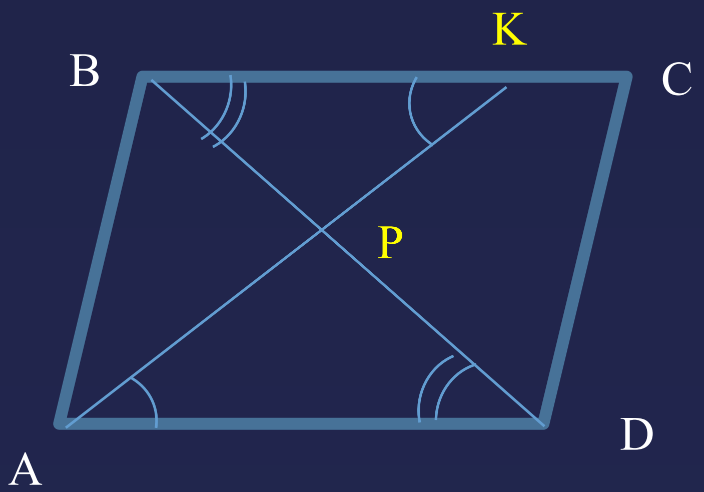
$S_{ABD} = S_{CDB} = 0{,}5 \cdot S_{ABCD} = =0{,}5 \cdot 24 = 12;$

$S_{KPB} = S_{CDB} - S_{PKCD} = 12 - 10 = 2$

2. $\triangle APD \sim \triangle KPB$ *(по двум равным углам);* $S_{APD} : S_{KPB} = k^2;$
$AP = k \cdot PK,\ DP = k \cdot PB$

3. $\triangle ABP$ и $\triangle BPK$ имеют общую высоту из вершины B, значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е.
$S_{ABP} : S_{KPB} = AP : PK = k$ (из *п.2*)

4. $\triangle APD$ и $\triangle ABP$ имеют общую высоту из вершины A, значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е.
$S_{APD} : S_{ABP} = DP : PB = k$ (из *п.2*)



5. Из *п.3* и *п.1* $S_{ABP} = k \cdot S_{KPB} = 2k$

6. Из *п.4* и *п.5*
$S_{APD} = k \cdot S_{ABP} = k \cdot 2k = 2k^2$

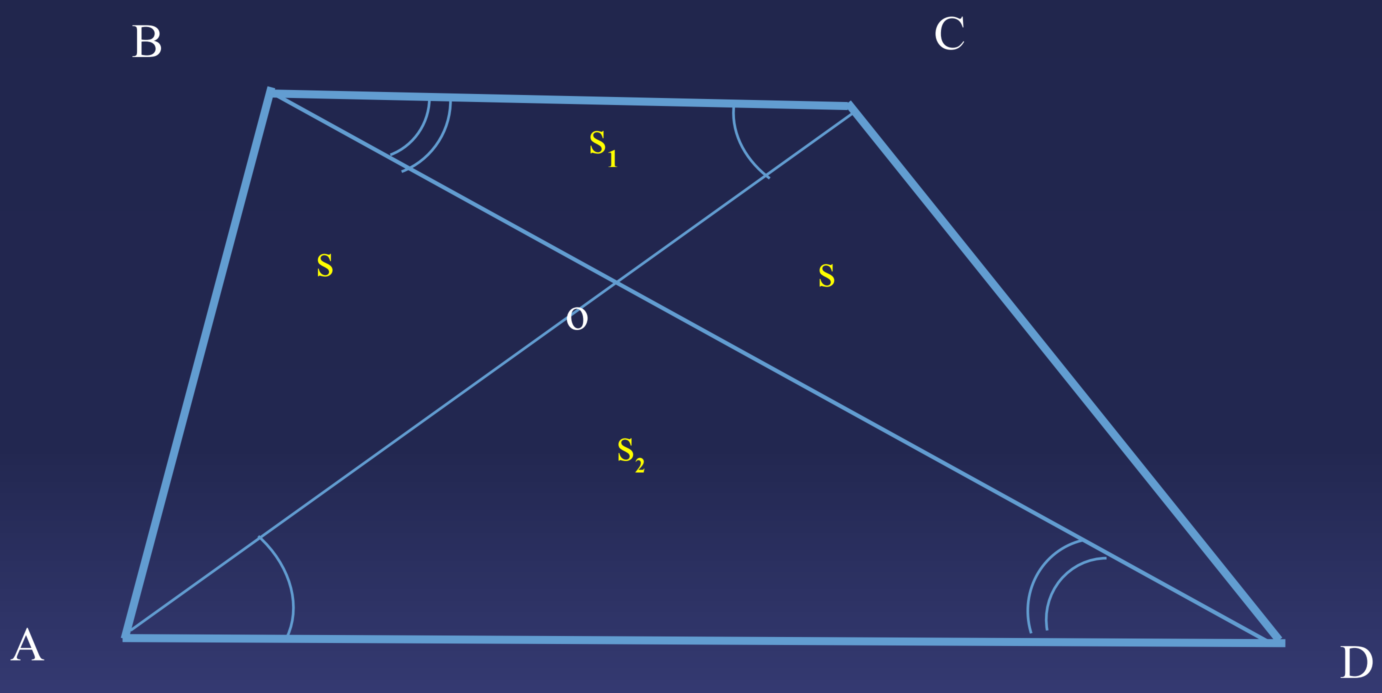
7. $S_{ABD} = S_{ABP} + S_{APD} = 2k + 2k^2$.
Из *п.1* следует $2k + 2k^2 = 12$.
Корни уравнения $k^2 + k - 6 = 0$ числа -3 и 2;
по смыслу задачи $k = 2$.

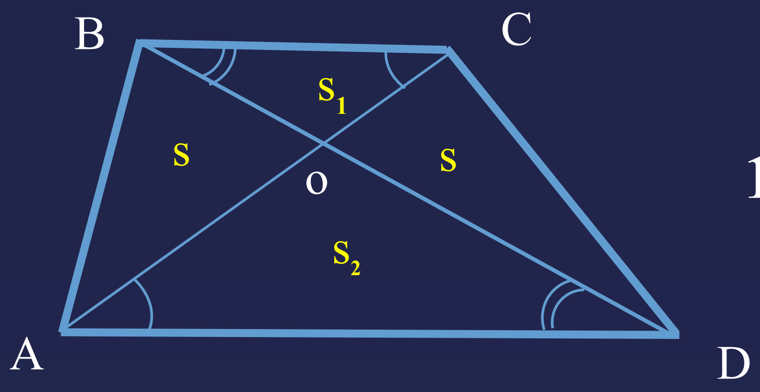
8. $S_{APD} = 2k^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Ответ: 8.

Задача №3. (МИОО 2013г.)

Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *OAD* и *OCB* равны соответственно 16 см^2 и 9 см^2. Найдите площадь трапеции.





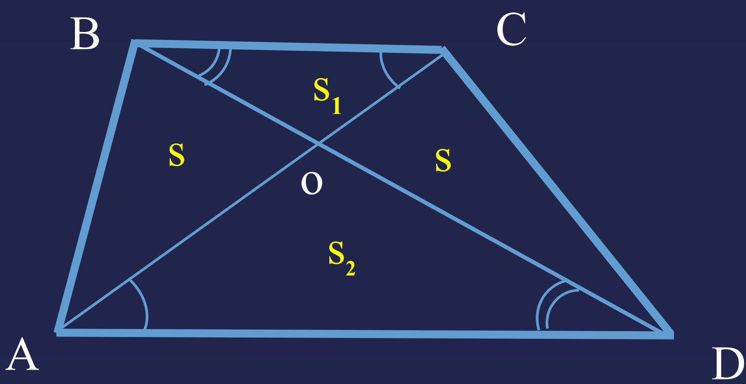
Решение.

1. **По условию S_{OAD} не равна S_{OCB}, значит, *AD* и *BC* – основания трапеции *ABCD*.**

2. $\triangle OAD \sim \triangle OCB$ *(по двум равным углам)*, $S_{OAD} : S_{OCB} = k^2$ =16:9, где k = 4:3 = *OA*:*OC*.

3. $\triangle ABO$ и $\triangle CBO$ имеют общую высоту из вершины *B*, значит, отношение их площадей равно отношению их оснований, т.е. $S_{ABO} : S_{CBO} = OA : OC$ = 4:3 (из *п.2*). Следовательно,

$$S_{ABO} = \frac{4}{3} S_{CBO} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12.$$



4. $S_{BAD} = S_{CAD}$, т. к. эти треугольники имеют общее основание AD и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции. Значит,

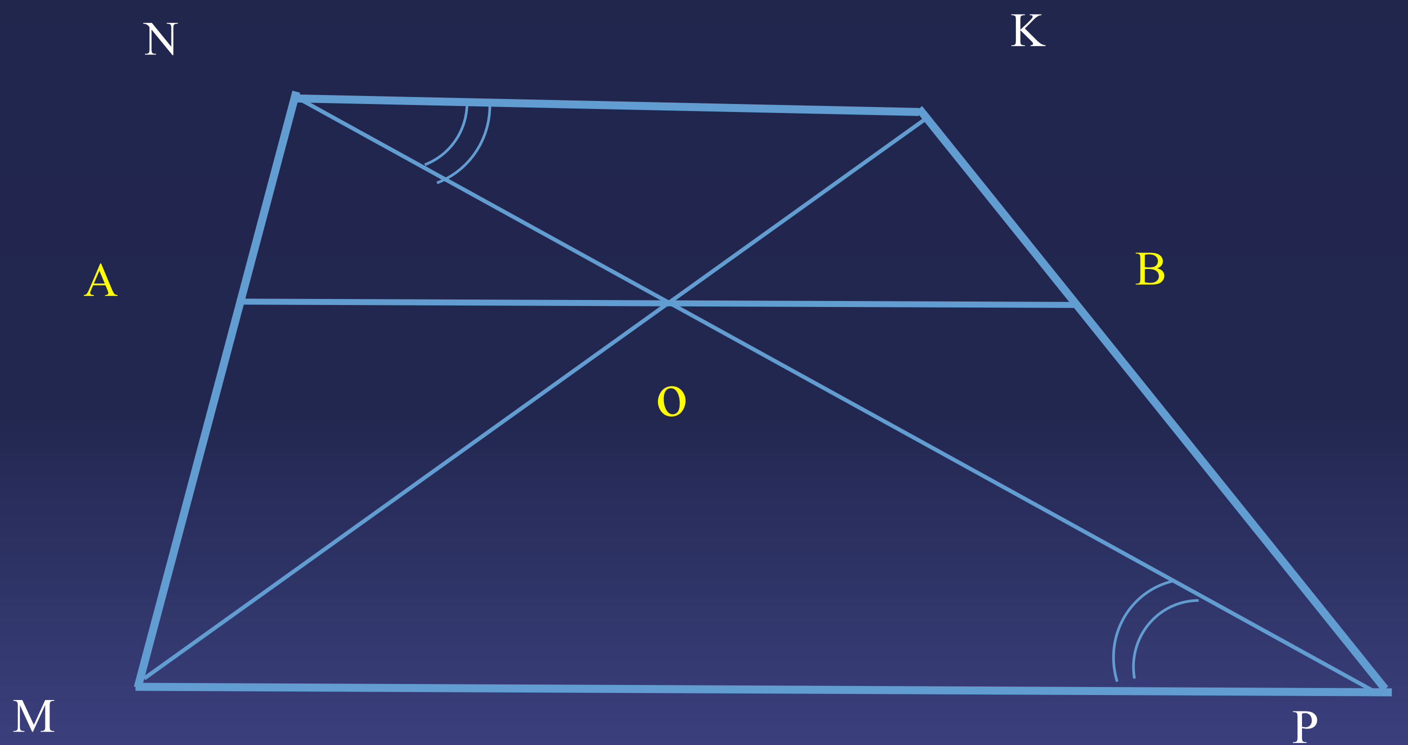
$S_{OAB} = S_{ABC} - S_{OBC} = S_{DBC} - S_{OBC} = S_{OCD}$, т. е. $S_{OCD} = S_{OAB} = 12.$

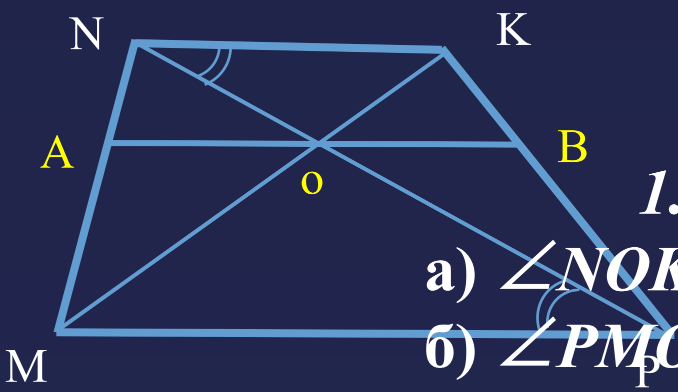
5. $S_{ABCD} = S_{OAD} + S_{OCB} + S_{OCD} + S_{OAB} = 16 + 9 + 12 + 12 = 49$ см^2.

Ответ: 49 см^2.

Задача №4. (МИОО 2010г.)

Прямая, параллельная основаниям *MP* и *NK* трапеции *MNKP*, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны *MN* и *KP* в точках *A* и *B* соответственно. Найдите длину отрезка *AB*, если *MP*=40 см, *NK*=24 см.





Решение.

1. **$\Delta MOP \sim \Delta KON$ по двум углам:**

а) $\angle NOK = \angle MOP$ как вертикальные

б) $\angle PMO = \angle NKO$ как внутренние накрест лежащие углы при NK параллельной MP и секущей MK.

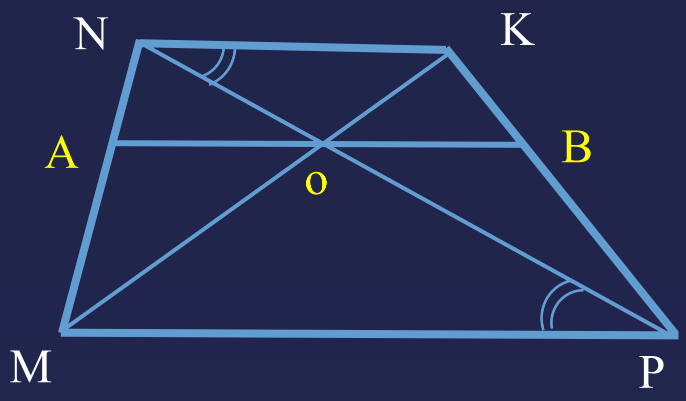
$$\frac{NO}{PO} = \frac{KO}{MO} = \frac{NK}{MP} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}; \qquad KO = \frac{3}{5}MO; \qquad NO = \frac{3}{5}PO$$

2. $\Delta AMO \sim \Delta NMK$ по двум углам:

а) $\angle M$ общий;

б) $\angle MAO = \angle MNK$ как соответственные при AO параллельной NK и секущей MN.

$$\frac{AO}{NK} = \frac{MO}{MK} = \frac{MO}{MO+KO} = \frac{MO}{MO + \frac{3}{5}MO} = \frac{5MO}{8MO} = \frac{5}{8}; \qquad AO = \frac{5}{8}NK = 15$$ см



3. Аналогично $BO = \frac{3}{5} NK = 15$ см

4. ***AB* = 30 см.**

Ответ: 30 см.

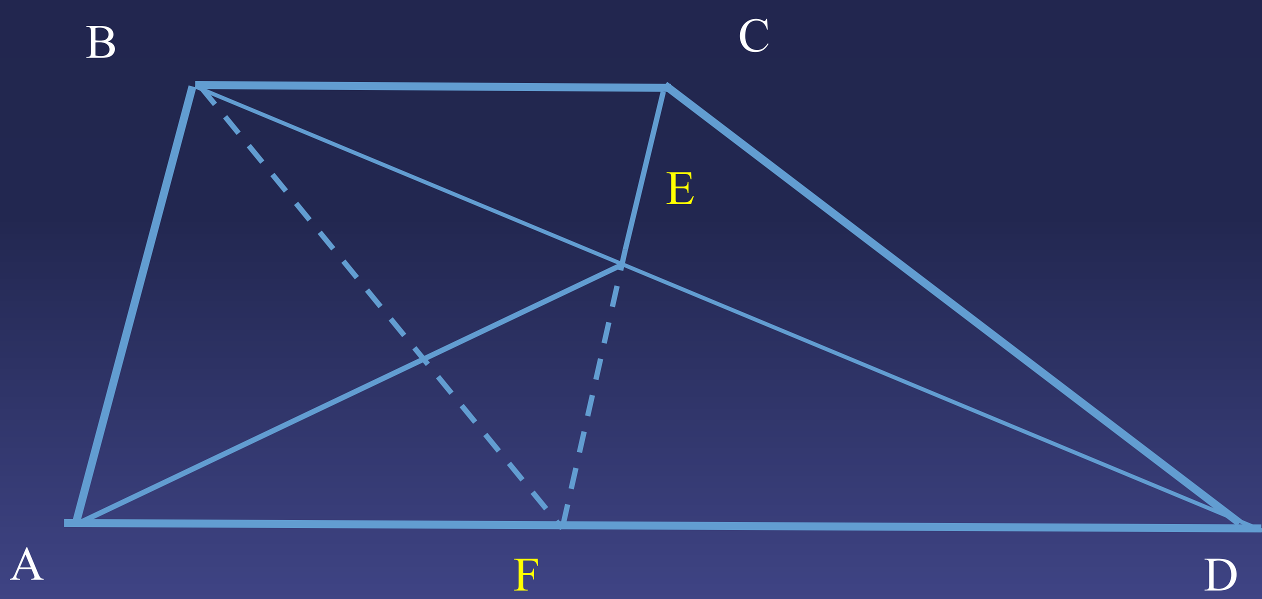
Задача №5. (МИОО 2013г.)

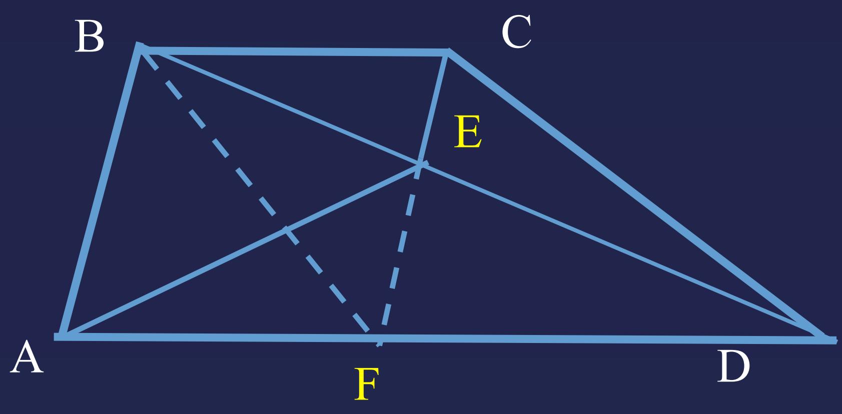
В трапеции *ABCD* $(AD \parallel BC, AD > BC)$

на диагонали *BD* выбрана точка *E* так, что

$CE \parallel AB.$

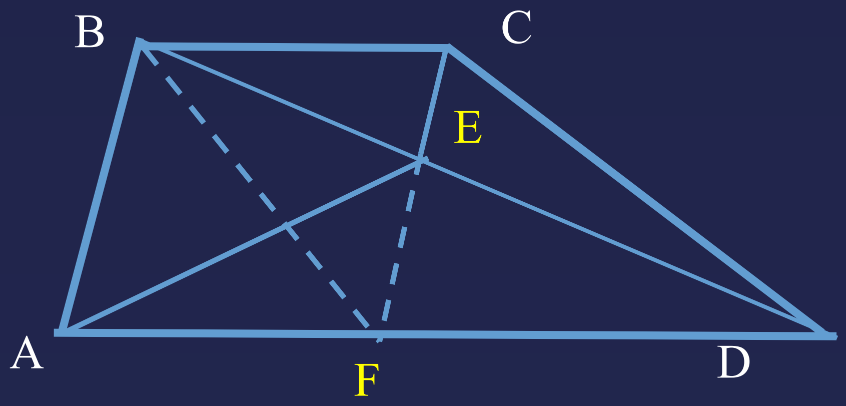
Площадь треугольника *DCB* равна 15. Найдите площадь треугольника *ABE*.





Решение.

1. Пусть точка F – точка пересечения прямых CE и AD. Тогда $ABCF$ – параллелограмм (по определению параллелограмма). BF – диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника; $S_{FCB} = 0{,}5 \cdot S_{ABCF}$



2. $S_{DCB} = S_{FCB}$ (как площади треугольников, имеющих общее основание и одинаковую высоту – высоту трапеции). Значит,

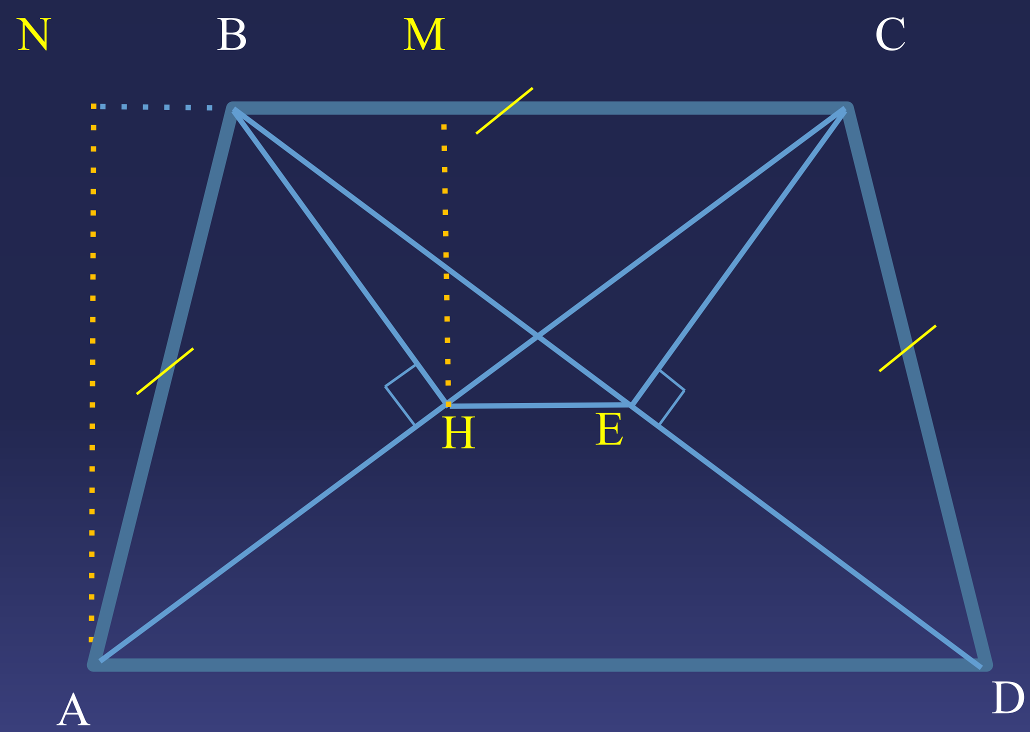
$$S_{DCB} = S_{FCB} = 0{,}5 \cdot S_{ABCF} = 15.$$

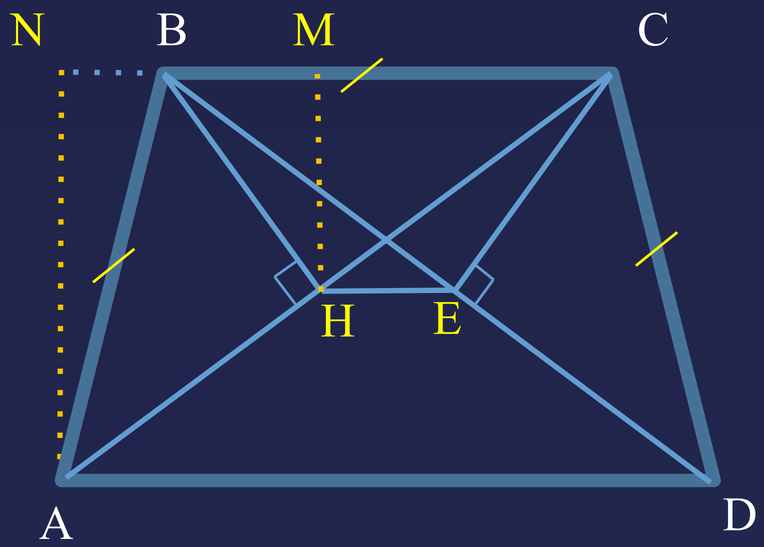
3. $\triangle ABE$ и параллелограмм $ABCF$ имеют одно и то же основание AB и общую высоту, проведённую к AB. Значит, $S_{ABE} = 0{,}5 \cdot S_{ABCF} = S_{DCB} = 15.$

Ответ: 15.

Задача № 6 (МИОО 2013г.)

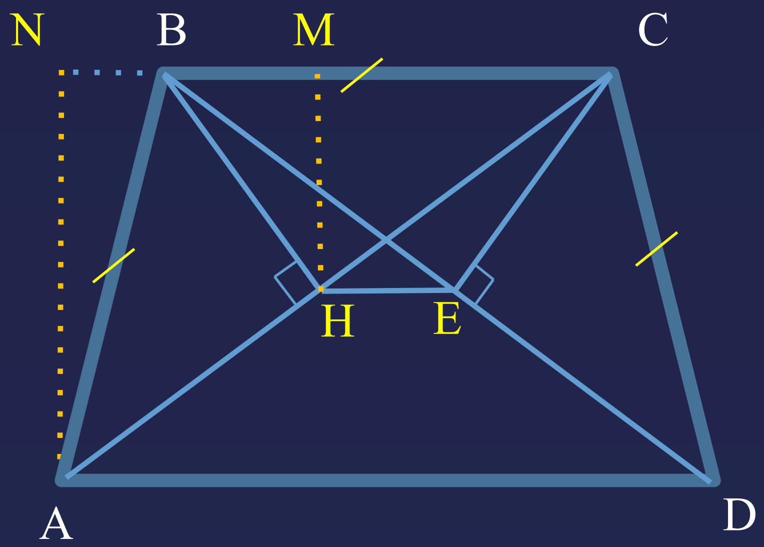
В равнобедренной трапеции *ABCD* боковые стороны равны меньшему основанию *BC*.
К диагоналям трапеции провели перпендикуляры *BH* и *CE*.
Найдите площадь четырёхугольника *BCEH*, если площадь трапеции *ABCD* равна 36.





Решение.

По свойству равнобедренной трапеции *AC=BD*, следовательно, треугольники *ABC* и *DCB* равны. Так как *AB=BC=CD*, треугольники *ABC* и *DCB* равнобедренные, следовательно, *BH* и *CE* – соответствующие медианы этих треугольников. Значит, *AH=HC=BE=ED*.
Отрезок *HE* соединяет середины диагоналей трапеции, следовательно, прямые *HE*, *AD* и *BC* параллельны, поэтому, *BCEH* – трапеция.



Площадь трапеции $\boldsymbol{ABCD}$**:**

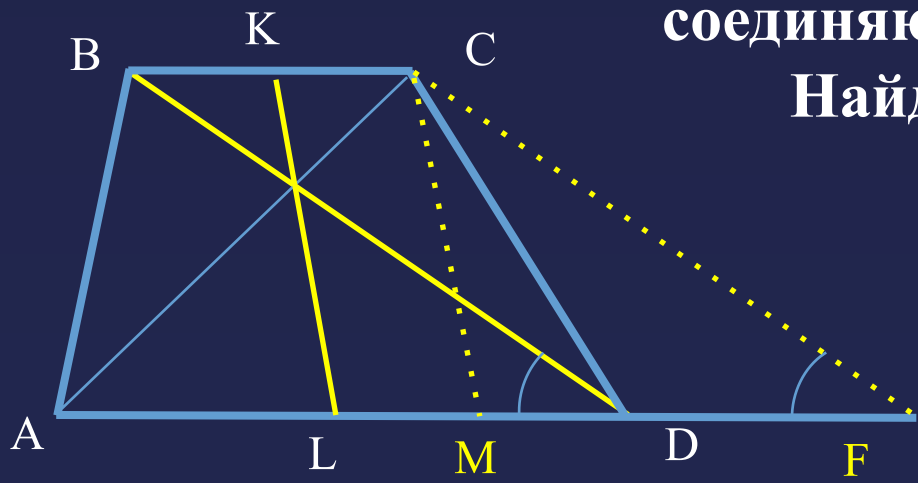
$$S=\frac{1}{2}HM\cdot(BC+HE)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AN\cdot\left(BC+\frac{AD-BC}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}AN\cdot(AD+BC)=\frac{1}{4}S_1=9$$

Ответ: 9.

Задача № 7.

Диагонали трапеции 3 и 5; отрезок, соединяющий середины оснований 2. Найдите площадь трапеции.

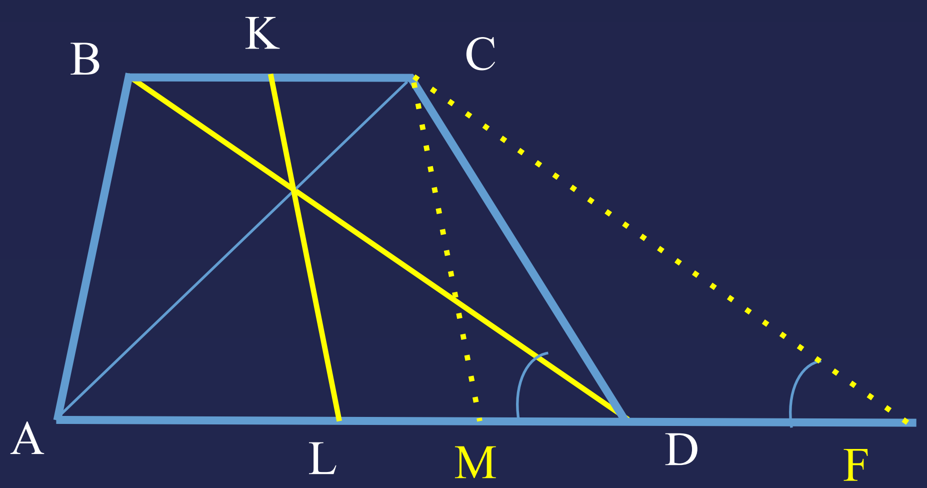


Решение. **1. Дополнительное построение: *CM* параллельна *KL*, *CF* параллельна *BD*.**

2. Из построения следует: *LKCM* и *DBCF* параллелограммы;
LM = KC = 0,5·BC, DF= BC, AM = AL+LM = 0,5· AD + 0,5·BC.

3. *CM* – медиана треугольника *ACF.* По формуле медианы

$$2 = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CF^2 - AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{68 - AF^2}, AF = 2\sqrt{13}.$$



Полупериметр треугольника *ACF* равен $4+\sqrt{13}.$

По формуле Герона

$$S_{ACF}=\sqrt{p\left(p-3\right)(p-5)(p-2\sqrt{13})}=\sqrt{(4+\sqrt{13})(1+\sqrt{13})(\sqrt{13}-1)(4-\sqrt{13})}=6.$$

4. Пусть *h* – высота трапеции *ABCD* или треугольника *ACF*. Тогда

$$S_{ABCD}=0{,}5\cdot(AD+BC)\cdot h=0{,}5\cdot(AD+DF)\cdot h=0{,}5\cdot AF\cdot h=S_{ACF}=6.$$

Ответ: 6.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника с диагоналями 8 и 5, если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон равны.

Ответ: 20.

2. В выпуклом четырёхугольнике *ABCT* длина отрезка, соединяющего середины сторон *AB* и *CT*, равна одному метру. Прямые *BT* и *AC* перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей *AC* и *BT*.

Ответ: 1 метр.

3. На стороне *BC* параллелограмма *ABCD* выбрана точка К. Отрезки *AK* и *BD* пересекаются в точке *P*. Площадь параллелограмма *ABCD* равна 80, а площадь четырёхугольника *PKCD* равна 31. Найдите площадь треугольника *APD*.

Ответ: 25.

Задачи для самостоятельного решения

4. Диагонали *AC* и *BD* трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *AOD* и *BOC* равны соответственно 25 см^2 и 16 см^2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 81 см^2.

5. Прямая, параллельная основаниям *BC* и *AD* трапеции *ABCD*, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции и пересекает её боковые стороны *AB* и *CD* в точках *E* и *F* соответственно. Найдите длину отрезка *EF* , если *AD*= =12 см, *BC*=24 см.

Ответ: 16 см.

6. В трапеции *ABCD* (*AD* параллельна *BC, AD* > *BC*) на диагонали *AC* выбрана точка *E* так, что *BE* параллельна *CD*. Площадь треугольника *ABC* равна 10. Найдите площадь треугольника *DEC*.

Ответ: 10.

Использованные источники

- ✔ А.С. Зеленский, И.И. Панфилов «Геометрия в задачах». Учебное пособие для учащихся старших классов и поступающих в вузы. – Москва, НТЦ «Университетский» УНИВЕР-ПРЕСС, 2008.
- ✔ И.В. Ященко, С.А. Шестаков и др. Математика. 9 класс. Типовые тестовые задания. – «Экзамен», Москва, 2013.
- ✔ Образовательный портал для подготовки к экзаменам РЕШУ ЕГЭ
- ✔ http://pedsovet.su/load/321
- ✔ http://www.mathvaz.ru/
- ✔ http://alexlarin.net/