

*Квадратные
уравнения.*



*Квадратные
уравнения на
средневековом*

Название
Востоке.
проекта



Чапанова Тамара и Нестерова Диана

Авторы

«Квадратные уравнения. Квадратные уравнения на средневековом Востоке»

- ❖ Решение Брахмагупта.
- ❖ Задача Магавира
- ❖ Бхаскара Ачарья
- ❖ Задача про обезьян
- ❖ Развитие Европейской алгебры.
- ❖ Классы квадратных уравнений
- ❖ Геометрический способ решения уравнения «квадраты и корни равны числу»
- ❖ Геометрический способ решения квадратного уравнения с произвольными коэффициентами.



Решение Брахмагупта

В Индии задачи на квадратные уравнения встречаются с глубокой древности. И именно индийцы впервые исследовали эти уравнения с любыми коэффициентами, как положительными, так и отрицательными.

Общее правило решения уравнений вида: Квадратное уравнение с одним неизвестным после алгебраических преобразований может быть представлено в виде:

$ax^2 + bx = c$, где $a > 0$, b и c – любые, сформулировал Брахмагупта (VII в. н. э.).

Вот как оно выводилось. Умножим обе части уравнения на $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac,$$

прибавим к каждой части b^2 :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = 4ac + b^2$$

Так как левая часть брассается в квадрат, то:

$$2ax + b = \sqrt{4ac + b^2}$$

Откуда

$$x = \frac{-b + \sqrt{4ac + b^2}}{2a}$$

Задача Магавира

Брахмагупта еще не знал, что квадратный корень может иметь два значения – положительное и отрицательное – и что, соответственно, у квадратного уравнения также может быть два корня.

Однако математик IX в. Магавира уже знал не только о двузначности квадратного корня, но и о двух решениях квадратного уравнения: а ведь ни египтяне, ни вавилоняне, ни греки (даже Диофант) этого не заметили.

Вот одна из задач Магавиры, в которой проявляется эта двузначность: «Найти число павлинов в стае, $1/16$ которой, умноженная на себя, сидит на манговом дереве, а квадрат одной девятой остатка вместе с 14 другими павлинами – на дереве тамала».



Задача Магавира

Решение:

$$x = (x/16)^2 + ((1/9) \cdot (15x/16))^2 + 14 \\ (17 / (9 \cdot 128)) x^2 - x + 14 = 0,$$

$$x_{1,2} = \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{7 \cdot 17}{9 \cdot 16}}\right) \cdot 9 \frac{64}{17}.$$

$$x_1 = 48, x_2 = 7 \cdot 48/17.$$

Ответом в задаче служит только x_1 , т. к. число павлинов не может быть дробным.

Бхаскара Ачарья

Бхаскара Ачарья (XII в.) сформулировал, соотношения между коэффициентами уравнения, при которых оно имеет два положительных корня. Знаете ли вы, когда это бывает?

Решение:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = c, \text{ где } a > 0.$$

Задача про обезьян

Вот одна из задач, составленных Бхаскарой.

«На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны,
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще»

Решение:

$$x = (x/8)^2 + 12.$$

$$(1/64) x^2 - x + 12 = 0.$$

$$x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1 - 3/4}) \cdot 32$$

$$x_1 = 48, x_2 = 16.$$

На европейскую алгебру непосредственное влияние оказала арабская математика и, прежде всего, основополагающий трактат ал-Хорезми «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы». «Ал-джабр» и «ал-мукабала» – две операции, которые используются при решении уравнений: ал-джабр (дословно «восполнение») – это перенос вычитаемых членов уравнения в другую часть в виде прибавляемых членов; ал-мукабала («противопоставление») – это сокращение равных членов в обеих частях (обе операции встречаются уже у Диофанта). Слово «алгебра» произошло от термина «ал-джабр», также как слово «алгоритм» – от имени ал-Хорезми.

Арабы, в отличие от индийцев, не рассматривали отрицательных чисел. С помощью ал-джабра и ал-мукабалы ал-Хорезми приводил уравнения к одной из шести форм, в которых обе части содержат лишь положительные члены, и рассматривал каждую из этих форм отдельно. При этом все квадратные уравнения разбиваются на шесть классов, каждый из которых соответствует одной из этих форм (везде $a, b, c > 0$):

Классы квадратных уравнений

- 1. $ax^2 = bx$ (в терминологии ал-Хорезми «квадраты равны корням»);
- 2. $ax^2 = c$ («квадраты равны числу»);
- 3. $bx = c$ («корни равны числу»);
- 4. $ax^2 + bx = c$ («квадраты и корни равны числу»);
- 5. $ax^2 + c = bx$ («квадраты и числа равны корням»);
- 6. $bx + c = ax^2$ («корни и числа равны квадратам»).



Алгебраических обозначений не было, все записывалось словами; например, четвертую форму ал-Хорезми обозначал так: «квадраты и корни равны числу».

Правила решения уравнения в каждой из форм формулировались для случая, когда коэффициент при старшем члене равен 1; соответственно, в противном случае надо было поделить обе части уравнения на a . Среди корней рассматривались только положительные. Ал-Хорезми установил, сколько корней имеет уравнение каждого из шести классов, и при каких условиях.

Решение:

$$x^2 + px + g = 0.$$

Поскольку у ал-Хорезми не было алгебраических обозначений, он формулировал правила нахождения корней для каждого из его классов на примере конкретных уравнений; тем не менее, правила носили общий характер.

Обоснование проводилось с помощью преобразований геометрических фигур, что напоминало античную геометрическую алгебру. Например, вот как обосновывается решение уравнения четвертого класса:

$$x^2 + 10x = 39.$$

Рисуется квадрат со стороной x , на каждой из четырех его сторон строится прямоугольник со сторонами x и $10/4$, а в углах – четыре квадрата со сторонами $10/4$. Тогда площадь центрального квадрата будет равняться x^2 , площадь четырех прямоугольников $4 \cdot (10x/4) = 10x$, площадь четырех угловых квадратов $4 \cdot (10/4)^2 = 100/4 = 25$. Если площадь центрального квадрата вместе с четырьмя прямоугольниками равна 39, то площадь всего большого квадрата равна $39 + 25 = 64$, а значит, его сторона равна 8. Зная это, можно найти:

$$X = 8 - 2 \cdot (10/4) = 8 - 5 = 3.$$

Геометрический способ решения уравнения «квадраты и корни равны числу»

Ясно, что данный ход решения не зависит от конкретных чисел. Пусть уравнение имеет вид:

$$x^2 + px = q.$$

Тогда каждый из четырех прямоугольников, имеющих вместе площадь px , должен иметь стороны x и $p/4$ каждый угловой квадрат будет иметь сторону $p/4$ площадь $(p/4)^2$, а все четыре вместе – площадь $p^2/4$. Если площадь центрального квадрата и четырех прямоугольников равна q , то площадь всего большого квадрата равна $(q + p^2/4)$, его сторона – а сторона центрального квадрата что соответствует формуле единственного положительного корня квадратного уравнения $x^2 + px = q$.

Геометрическое решение квадратного уравнения с произвольными коэффициентами

- В дальнейшем арабские математики для обоснования правил решения квадратных уравнений использовали и другие геометрические методы, в т. ч. восходящие к античному приложению площадей (которое, впрочем, представляло аналог уравнениям 4-го и 5-го, но не 6-го класса). Так, например, поступал Омар Хайям, с этой целью приводивший решение задачи о приложении с недостатком в простейшей форме, когда недостаток является квадратом: построить на данном отрезке два прямоугольника равной высоты, один из которых квадрат, а другой равновелик данному квадрату, т. е. при данных отрезках a и b найти построением отрезок x такой, что $ax - x^2 = b^2$. Ход решения, в общем, совпадает с евклидовым; Хайям в явном виде указывает, как строить квадрат, равный разности площадей квадратов со сторонами $a/2$ и b : а именно, для этого надо построить прямоугольный треугольник с гипотенузой $a/2$ и вторым катетом b . Квадрат, построенный на другом катете, и есть искомый.



Спасибо за
внимание! Удачи
и всем!



Конец

