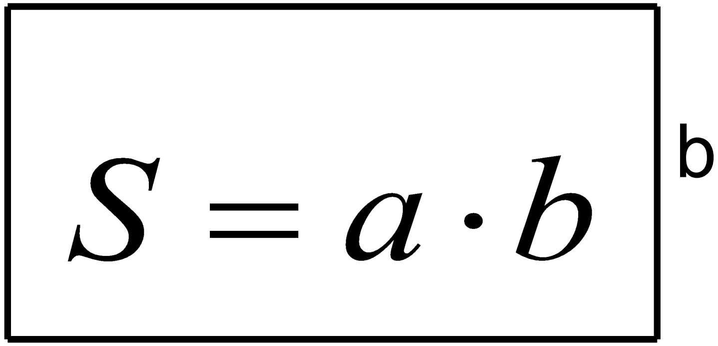
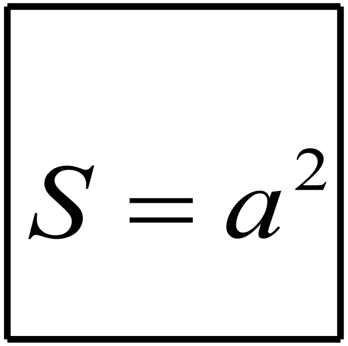
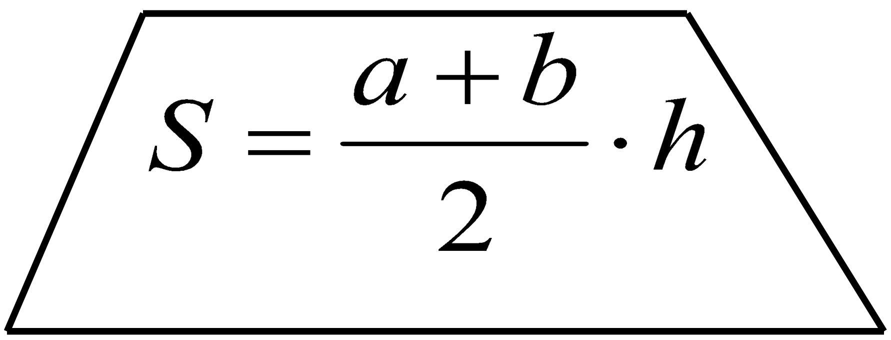
Тема: Определенный интеграл. Его основные свойства. Методы вычислений.

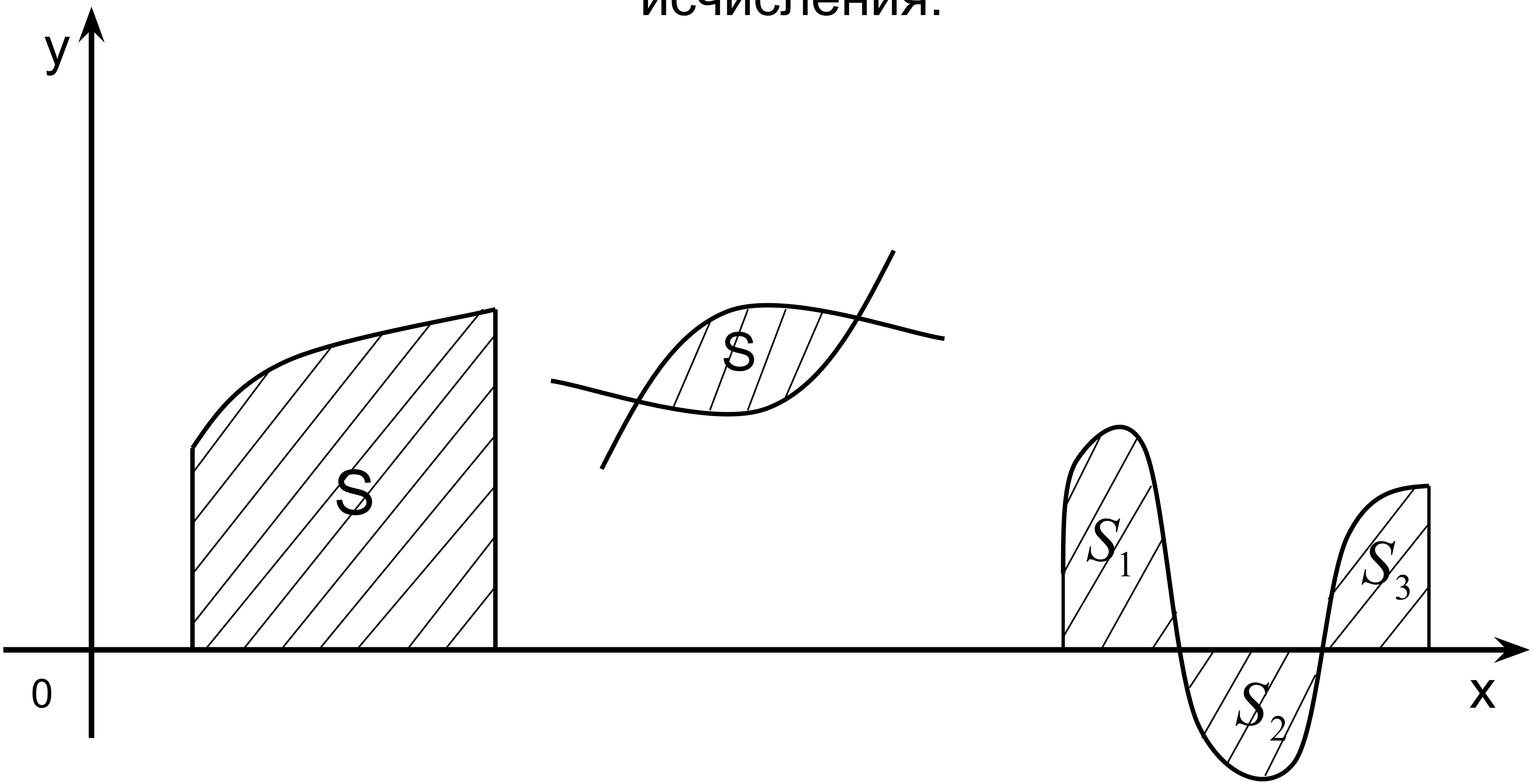
До 17 века:



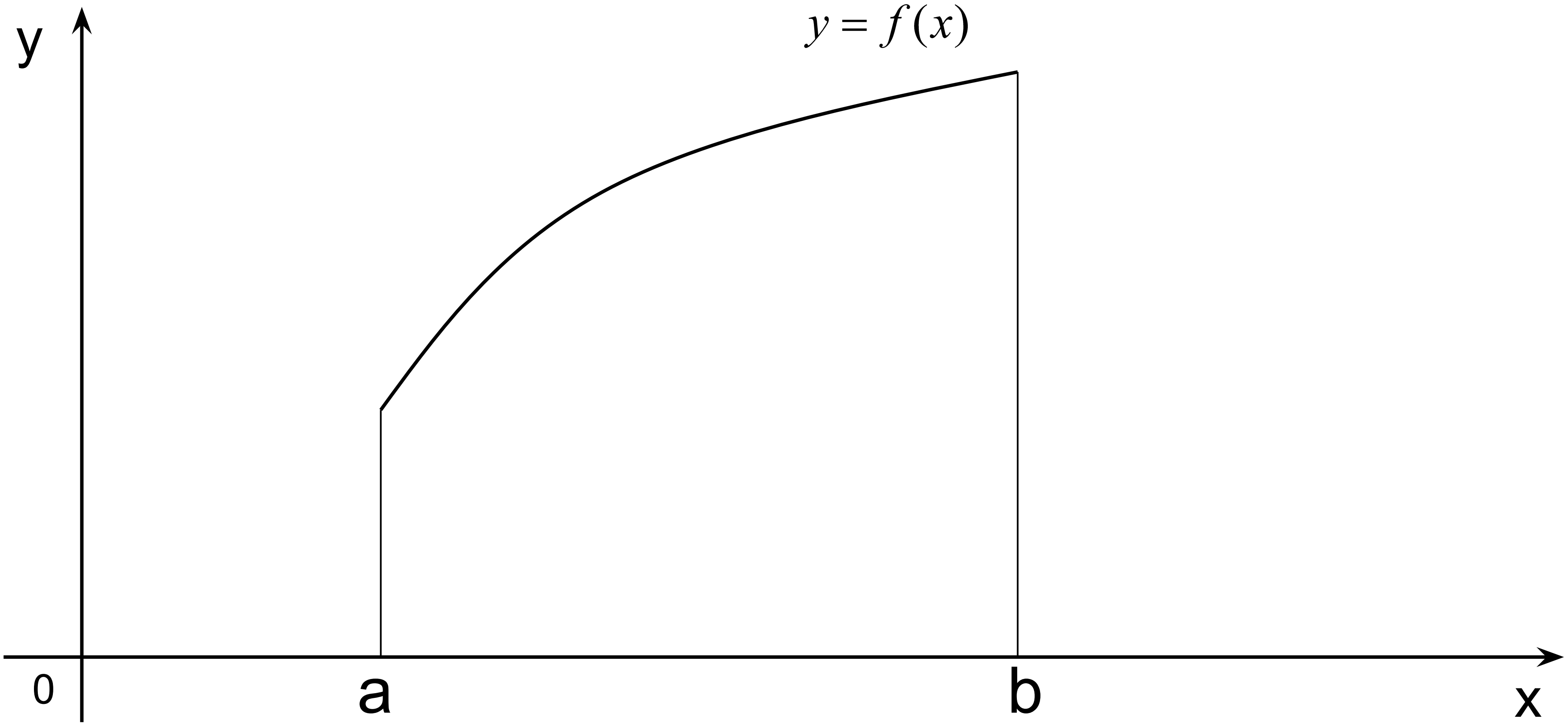


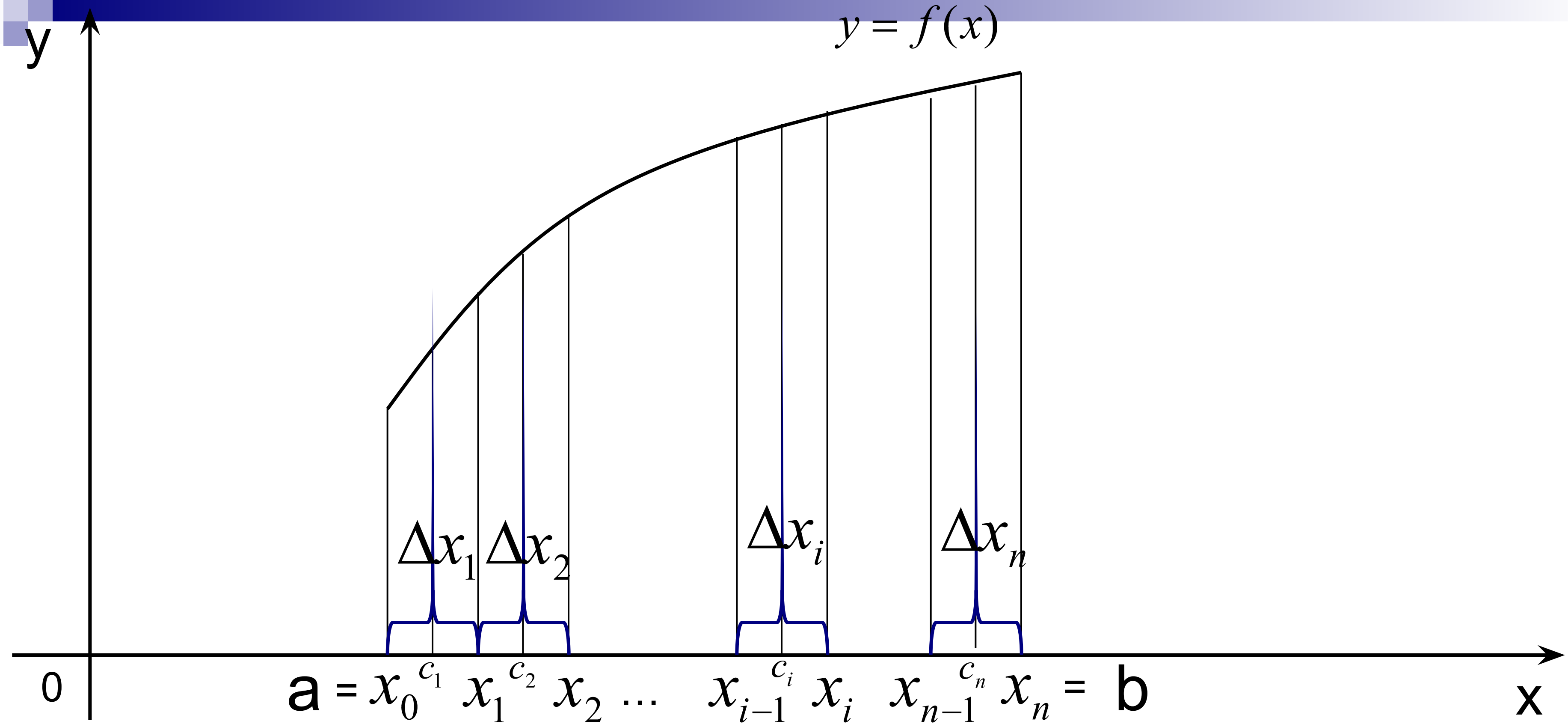


С появлением дифференциального и интегрального исчисления:



Задача о площади криволинейной трапеции.





1. Разобьем [a, b] на n равных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

В результате получим промежутки: $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_i, \ldots, \Delta x_n$

2. На каждом Δx_i выберем произвольную точку c_i

3. Найдем $\boxed{f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i}$ (1)

формула интегральной суммы

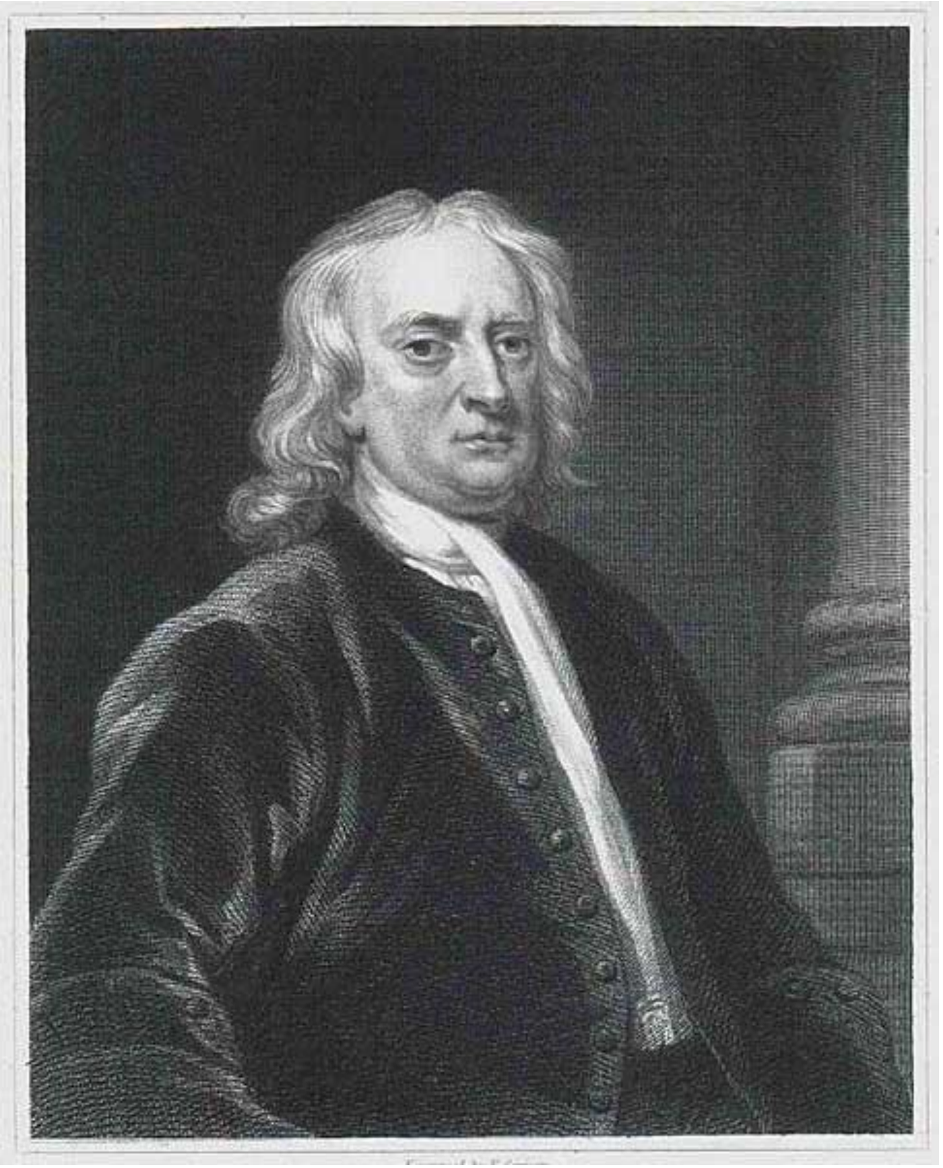
Опр: Если при любом разбиении отрезка [a, b] на части и при любом выборе точек c_i на каждой части интегральная сумма стремится к одному и тому же пределу, то его называют **определенным интегралом** и обозначают:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\Delta x_i} \qquad (2)$$

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], а функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$ на этом отрезке, то справедлива формула:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)} \quad (3)$$

формула Ньютона-Лейбница



И. Ньютон

Г. Лейбниц

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(c_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойства определенного интеграла:

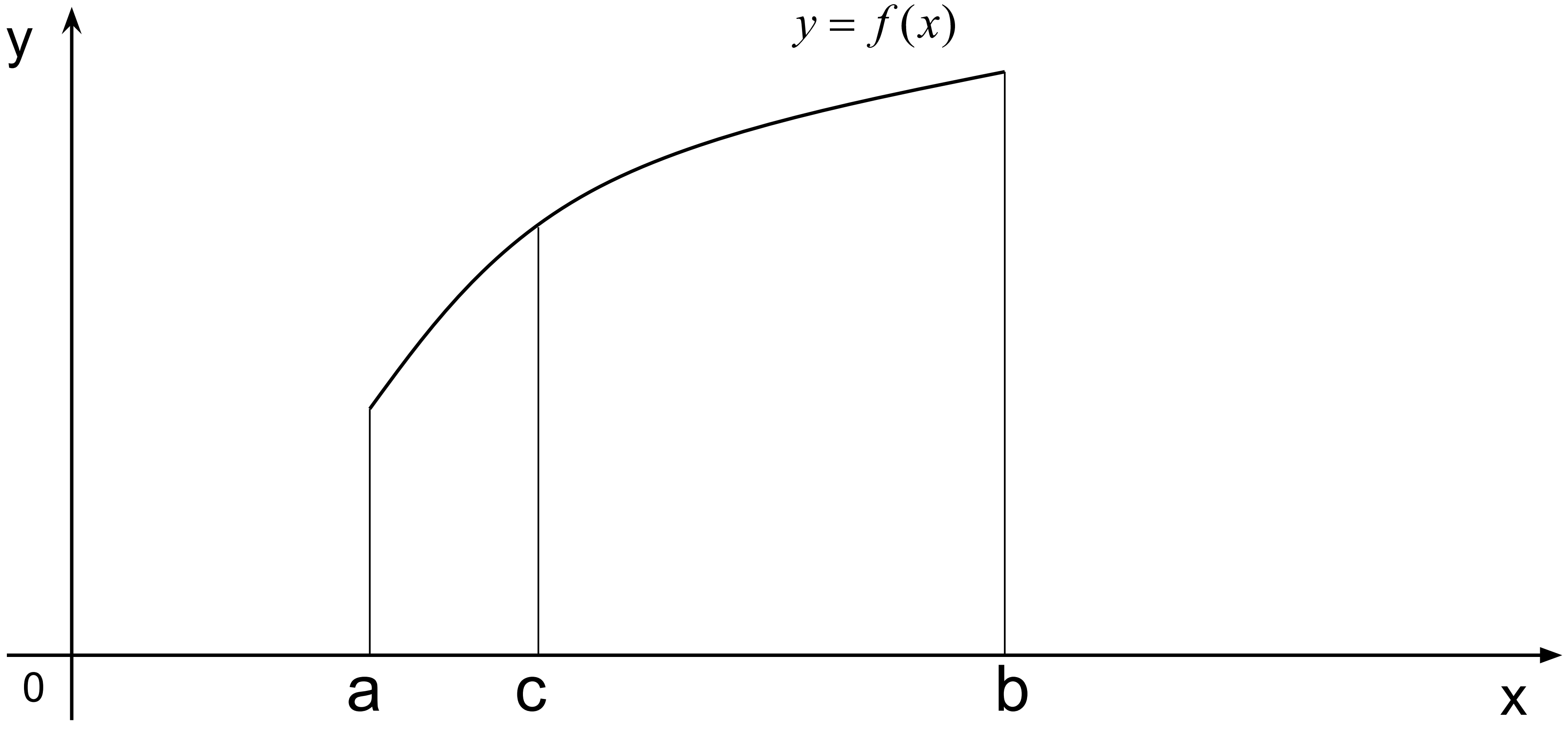
1) $$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

2) $$\int_a^b (f(x)+\varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

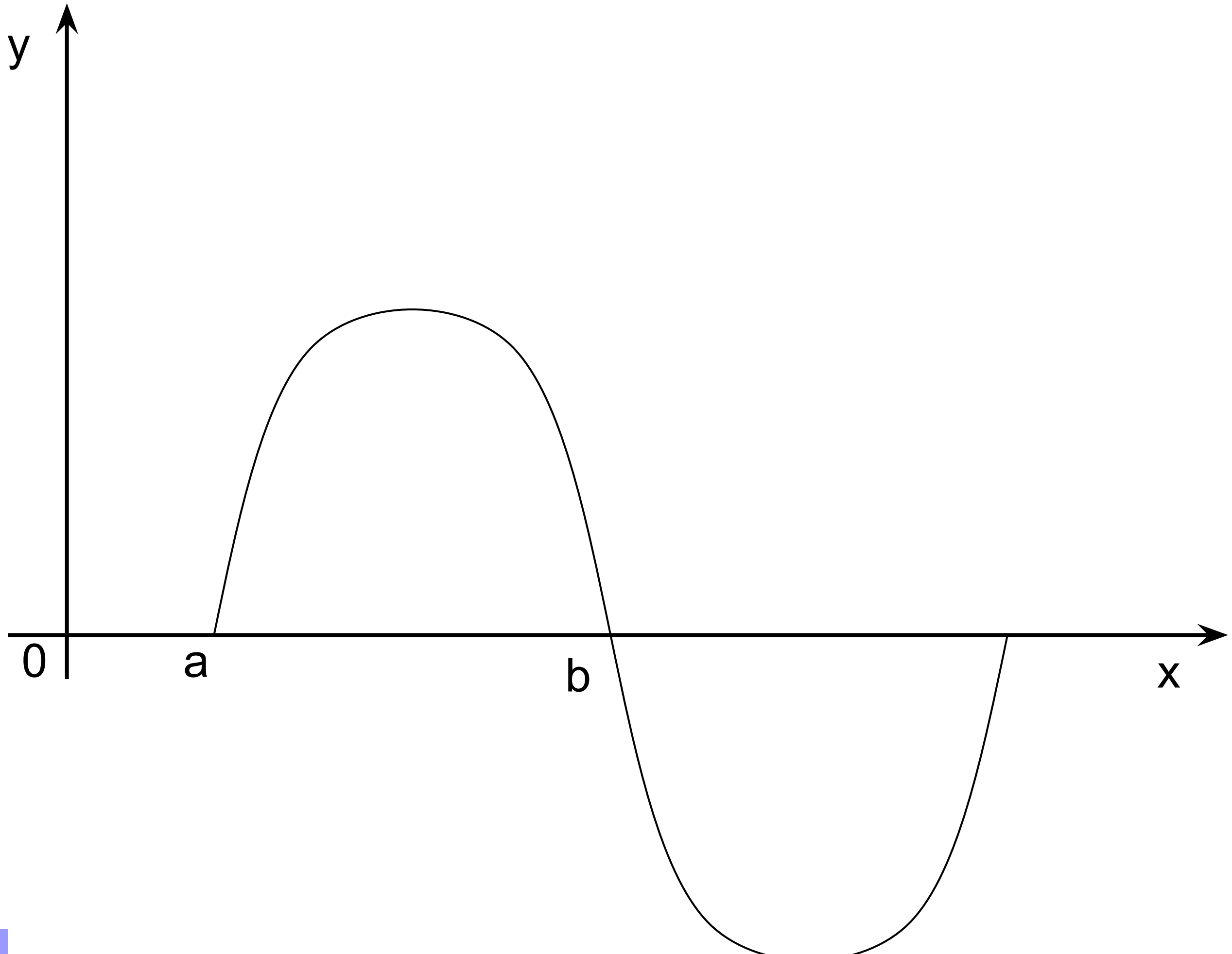
3) $$\text{Если } a<c<b, \text{ то } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4) $$\text{Если } f(x)>0,\ x\in[a,b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx > 0.$$

5) $$\text{Если } f(x)>\varphi(x) \text{ для всех } x\in[a,b], \text{ то } \int_a^b f(x)dx > \int_a^b \varphi(x)dx.$$



$y = f(x)$
y
0
a
c
b
x


y
0
a
b
x

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример:

$$\int_1^4 (x^3 + 2x)dx = \int_1^4 x^3 dx + \int_1^4 2x dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^4 + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^4 = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^4 + x^2\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right) + (4^2 - 1^2) = \left(\frac{256}{4} - \frac{1}{4}\right) + (16 - 1) = \frac{255}{4} + 15 = 78{,}75$$