§1.4.2. Статистическое определение вероятности

Статистической вероятностью P(A) события A называется относительная частота

$$v(A)=m/n$$

появления m раз события A в n независимых испытаниях, т.е.

$$P(A) \approx v(A)=m/n.$$

Свойства вероятности, вытекающие из классического определения вероятности, сохраняются и при статистическом определении.

Недостаток статистического определения вероятности - неоднозначность статистической вероятности.

Например: если относительная частота появления события А близка к числу 0.4, то в качестве вероятности события можно принять не только 0.4, но и 0.39; 0.41 и т.д.

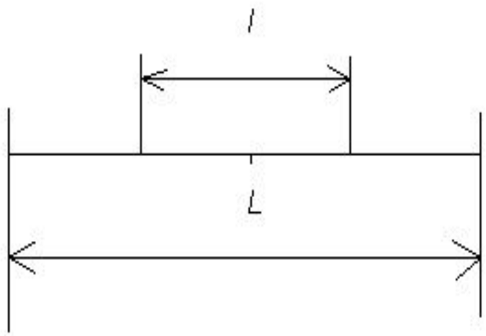
Статистическое определение вероятности:

Вероятностью события А называется величина, около которой группируются относительные частоты, этого события. Можно также сказать, что статистической вероятностью события А является величина, к которой стремится относительная частота при неограниченном числе испытаний.

Для существования статистической вероятности события требуется:

- возможность, хотя бы формально, производить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие А наступает или не наступает;
- статистическая устойчивость частоты появления события А в различных сериях достаточного большого количества испытаний.

§1.4.3. Геометрическое определение вероятности



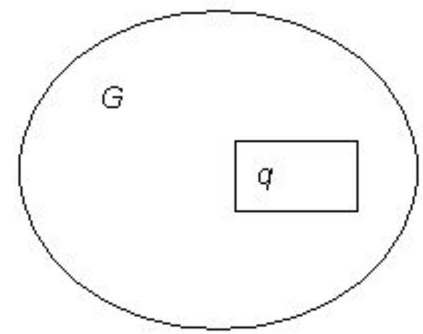


Рис.1 Рис.2

$P(A)=l\,/\,L$ $P(A)=S_q/S_G$.

Если обозначать меру (длину, площадь, объем) области через mes, то вероятность попадания точки, поставленной наугад (в указанном выше смысле) в область d – часть области D, равна

$$P(A)=\text{mes } d\,/\text{mes } D.$$

В случае классического определения вероятности, если вероятность достоверного (невозможного) события равна 1 (0), справедливы и обратные утверждения (т.е., если вероятность события равна 0, то событие невозможно). При геометрическом определении вероятности обратные утверждения имеют место не всегда. (т.е. вероятность попадания поставленной наугад точки в одну определенную точку области D равна 0, однако это событие может произойти, т. е. не является невозможным).

§1.4.4. Аксиоматическое определение вероятности

В системе аксиом, предложенной Колмогоровым А. Н., неопределяемыми понятиями являются элементарное событие и вероятность.

Для определения вероятности введены следующие аксиомы:

1. Каждому событию A_i поставлено в соответствие действительное число $0 \le P(A_i) \le 1$. Это число называется вероятностью события A_i.
2. Вероятность достоверного события равна 1, т.е. $P(\Omega)=1$.

3. Вероятность наступления хотя бы одного А из попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A)=P(A_1)+ P(A_2)+\ldots+ P(A_n).$$

Объективное свойство вероятности проявляется только в массовом повторении испытания. Вероятность не может служить для оценки исхода отдельного испытания. Если вероятность события С равна 0,7, то это означает, что при массовом повторении испытания событие С будет появляться чаще, чем □С. При этом отношение числа появлений события С к числу появления события □С будет близко к 7:3.

Принцип практической уверенности:

Если вероятность некоторого события А в данном опыте при выполнении условий Q невозможно мала (или, наоборот, близка к 1), то можно быть практически уверенным, что при однократном выполнении опыта с условиями Q событие А не произойдет (или, напротив, произойдет).

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§2.1. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Теорема 2.1. *Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Докажем теорему для схемы случаев. Доказательство проводится методом полной индукции.

Рассмотрим два несовместных события A_1 и A_2. Событию A_1 благоприятствует m, а событию A_2 благоприятствует k случаев (рис.3), т.е.

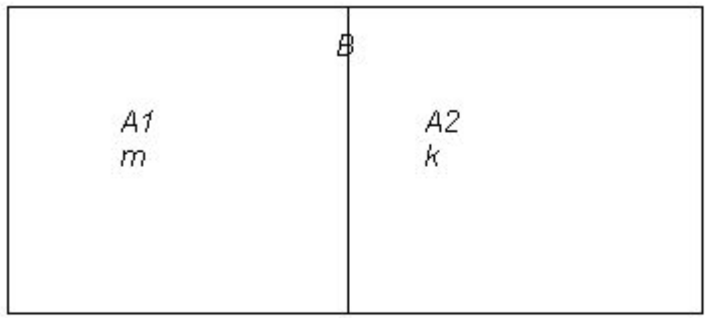


Рис.3

$P(A_1)=m/n$, $P(A_2)=k/n$. Так как A_1 и A_2 несовместны, то нет таких случаев, которые благоприятны A_1 и A_2 вместе ($A_1 A_2$). Следовательно, событию $B = A_1 + A_2$ благоприятны m+k случаев и

$P(B)=P(A_1 + A_2)=(m+k)/n=m/n + k/n =$
$=P(A_1)+P(A_2)$.

Отсюда следует, что для трех несовместных событий

$P(B+A_3)=P(B) +P(A_3)= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$.

Тогда для события $C= A_1 + A_2+\ldots+ A_{n-1}$ имеет место

$P(C+A_n)=P(C) +P(A_n) = P(A_1)+P(A_2)+\ldots +P(A_n)$,

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Если события* A_1 , A_2,…, A_n *образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна 1:*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

<u>Доказательство.</u> Т.к. события A_1 , A_2,…, A_n образуют полную группу несовместных событий, то появление хотя бы одного из них – достоверное событие и $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$. Т.к. A_1 , A_2,…, A_n – несовместные события, то к ним применима теорема сложения вероятностей, откуда следует, что

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:*

$$P(A) + P(\square A) = 1.$$

Пример 1. Всего 1000 билетов. Один билет – 500 руб., 10 билетов – по 100 руб., 50 – по 20 руб., на 100 билетов – по 5 руб. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб.

Решение: Рассмотрим события

A – выиграть не менее 20 руб.; A_1 – выиграть 20 руб.; A_2 – выиграть 100 руб.; A_3 – выиграть 500 руб.

$A = A_1 + A_2 + A_3$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}05+0{,}01+0{,}001= =0{,}061$

Пример 2.

Производится бомбометание по 3 складам боеприпасов, причем сбрасывается 1 бомба. Вероятность попадания в 1-й склад 0.01; во 2-й - 0.008; в 3-й – 0.025. При попадании в один из складов взрываются все три. Найти вероятность того, что склады будут взорваны.

Решение: A – взрыв складов; A_1 – попадание в 1 склад; A_2 – во 2-й склад; A_3 – в 3-й склад.

$A= A_1 + A_2 + A_3$

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0,01+0,008+0,025==0,043$

Пример 3. Круговая мишень состоит из 3 зон: I, II, III. Вероятность попадания в I зону при 1 выстреле 0.15; во II – 0.23; в III – 0.17. Найти вероятность при промахе.

Решение: А – промах, $\overline{A}$ - попадание

$$\overline{A} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3$$

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1) + P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_3) = 0.15 + 0.23 + 0.17 = 0.55$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.55 = 0.45$$