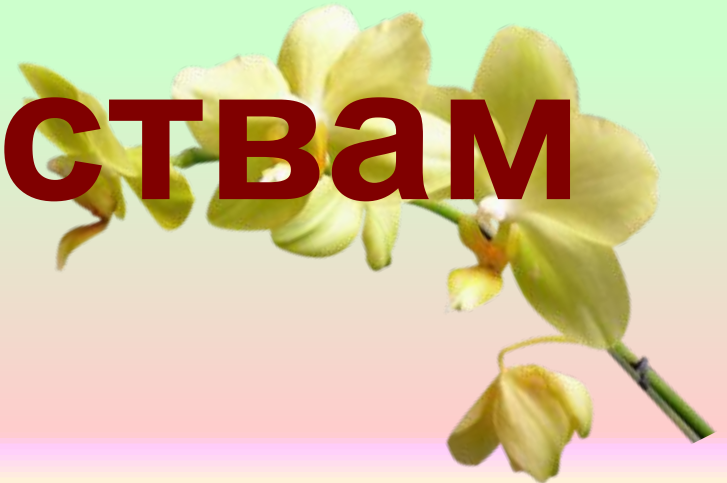
Урок в 11 классе по теме:

От показательных уравнений - к показательным неравенствам

.



"Что значит решит
задачу?
Это значит
свести ее к уже
решенным"

С.А. Яновска

- Какие из данных уравнений являются показательными?

1) $100^2(0{,}01)^2 = 10^x$

2) $(x+1)^5 = 25$

3) $(\sqrt{3})^{2x} = (tg\frac{\pi}{3})^{x+1}$

4) $6^{\sqrt{x}} + 8^{\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{x}}$

5) $2^x = 3 - x$

6) $2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0$

7) $\cos(3\pi \cdot 5^x) - \cos(\pi \cdot 5^x) = \sin(\pi \cdot 5^x)$

8) $\sqrt{3^{\frac{1}{x}} + 7} = 4$

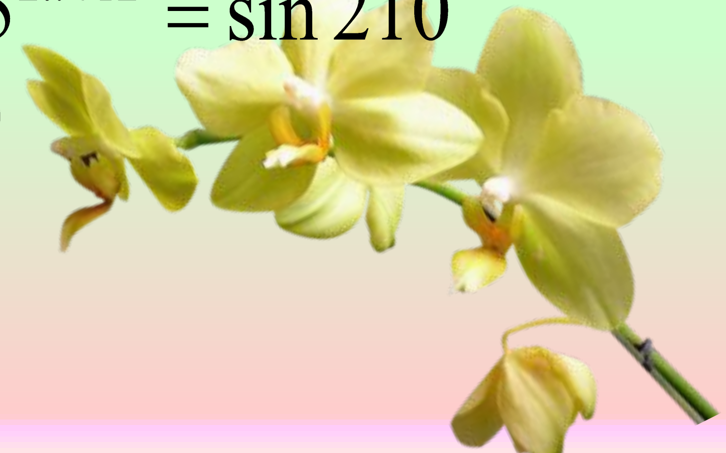
9) $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$

10) $x^2 + 3x - 4 = 0$

3) $(\sqrt{3})^{2x} = (\sqrt{3})^{x+1}$

11) $(2x+1)^{x^2} = (2x+1)^x$

12) $5^{2x+12} = \sin 210^\circ$



Определение.

Показательное

уравнение – это уравнение,

неравенство – это неравенство,

содержащее переменную в показателе степени

- Каков общий вид простейших показательных уравнений?

- Метод решения?

1. $$a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

равносильно уравнению <u>*f(x) = g(x)*</u>

(уравнивание показателей)

Обоснование: 1) *Если степени с равными основаниями, отличными от единицы и большими нуля, равны, то показатели равны;*

2) функция монотонна на R, поэтому каждое свое значение она принимает при единственном значении аргумента.

---

2. $$a^{f(x)} = b, \quad a > 0, a \neq 1, b > 0$$

- Каков общий вид простейших показательных неравенств?

- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

1) Равносильно неравенству **f(x) > g(x), a>1**

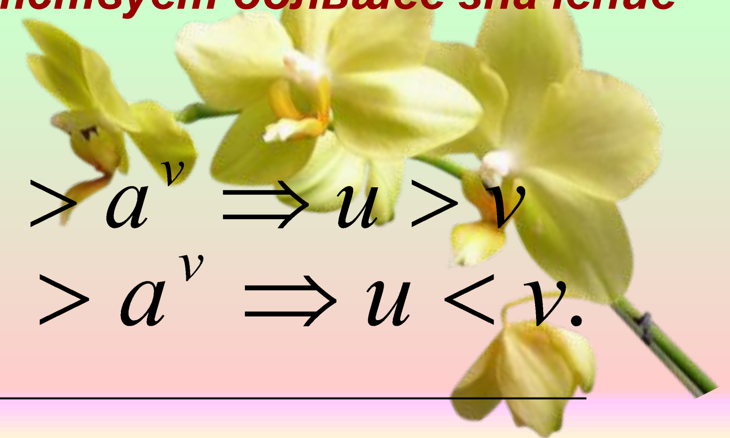
2) Равносильно неравенству **f(x) < g(x), 0<a<1.**

(сравнение показателей)

__**Обоснование:**__ ***а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на R, поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.***

б) Если a>1, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u > v$

если 0<a<1, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u < v.$

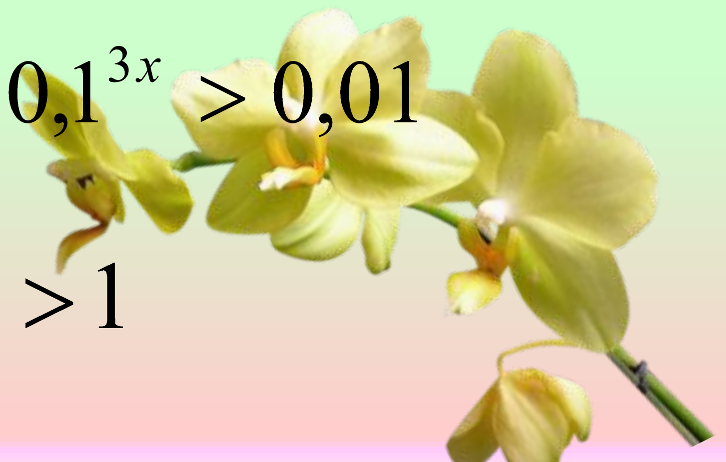


Работаем устно:

Сравните *x* и *y*: $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^y$ $\pi^x < \pi^y$

Сравните основание *a* с единицей: $a^{\frac{2}{5}} > a^{\frac{3}{5}}$, $a^{-5,7} > a^{-6}$,

1. $5^x < 125$
2. $4^x > 1$
3. $0,2^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2$
4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < -12$
5. $3^x > -1$
6. $100^{3-x} > \cos\frac{2\pi}{3}$
7. $0,1^{3x} > 0,01$
8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-2)} > 1$



Решите двойные неравенства:

$$1<5^x<125$$

Решение.

$$1<5^x<125$$

$$5^0<5^x<5^3$$

т.к. показательная функция с основанием *a* =5, *a*>1 возрастает на R, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента, имеем

$$0<x<3$$

***Ответ:* (0;3)**

$$3<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 27$$

Решение.

$$3<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{3}\right)^x\le\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

т.к. основание степени *a* = 1/3, 0<*a*<1, то из неравенства

$$a^u<a^t<a^v\Rightarrow \text{неравенство}$$

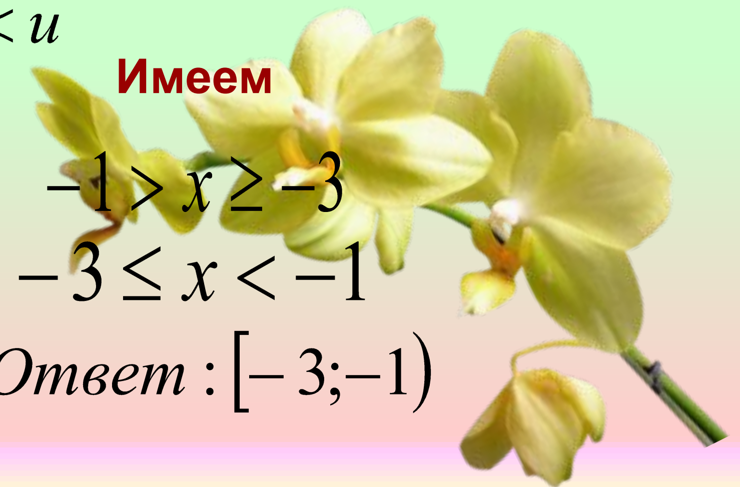
$$v<t<u$$

Имеем

$$-1>x\ge-3$$

$$-3\le x<-1$$

$$\text{Ответ}:[-3;-1)$$



Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$

---

1. Подбором найдем корень уравнения *f(x)=g(x)*, используя свойства монотонных функций;

:

2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;

3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;

4. Запишем ответ.

Решить неравенства, используя функционально-графический метод

$$1)\quad \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x+1 \qquad\qquad 2)\quad 2^x \leq 3-\sqrt{x}$$

1) Решение.

1. $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ убывает на R

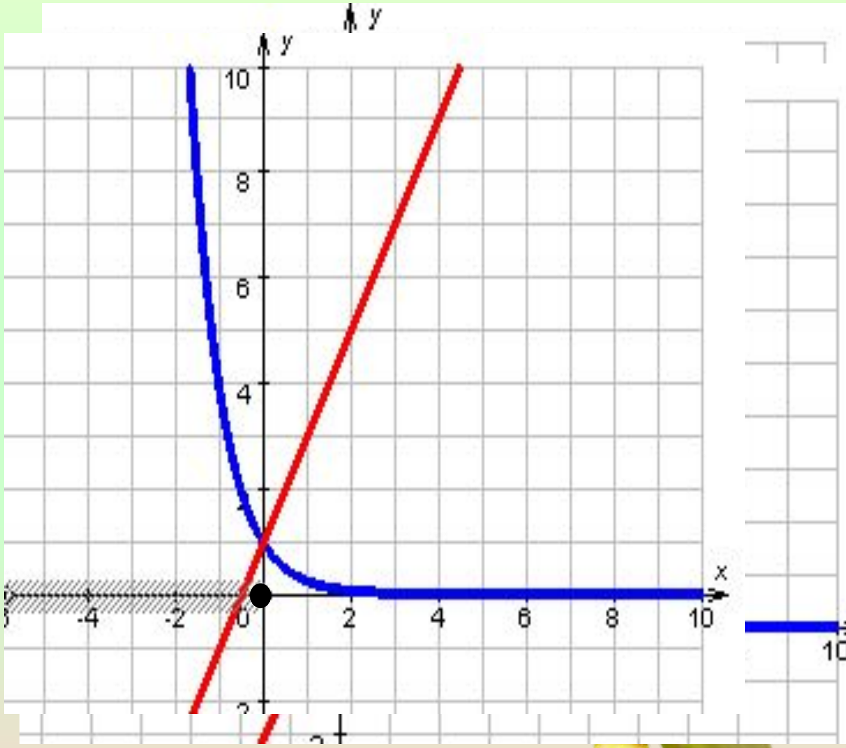
2. $g(x)=2x+1$ возрастает на R

3. Уравнение **f(x)=g(x)** *имеет* не более одного корня

4. Подбором x=0

5. Строим схематически графики через точку (0, 1)

6. Неравенство выполняется при $x \leq 0$



7. $Ответ: (-\infty;0]$

Решить неравенства, используя функционально-графический метод

$$1)\quad \left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x+1 \qquad\qquad 2)\quad 2^x \leq 3-\sqrt{x}$$

2) Решение.

1. $f(x)=2^x$ **возраст. на R**

2. $g(x)=3-\sqrt{x}$ **убывает на** $[0;+\infty)$

3. Уравнение *f(x)=g(x)* *имеет* не более одного корня

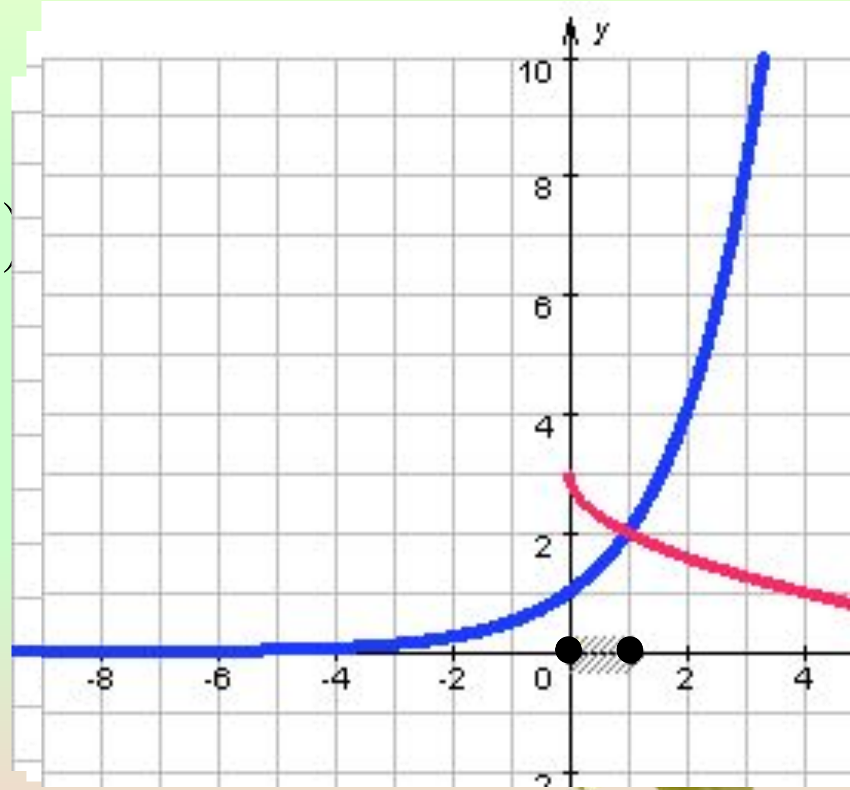
4. Подбором x=1

5. Строим схематически графики через точку (1, 2)

6. Неравенство выполняется при

$$0 \leq x \leq 1$$

7. $\underline{Ответ}:[0;1]$



- Каков общий вид простейших показательных неравенств?

- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

1) Равносильно неравенству **$f(x) > g(x)$, $a>1$**

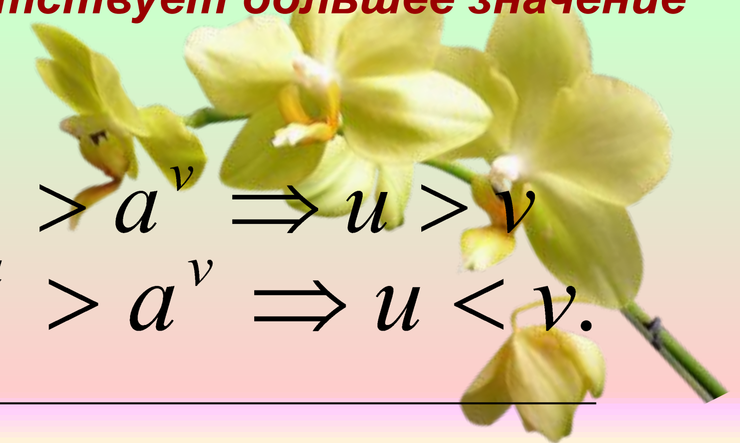
2) Равносильно неравенству **$f(x) < g(x)$, $0<a<1$.**

(сравнение показателей)

Обоснование: ***а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на R, поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.***

б) Если $a>1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u > v$

если $0<a<1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u < v.$



«Ключ»

Вариант – 1	Вариант - 2
-1	1
Б	В
2	2
$\left(-1;+\infty\right)$	$\left[2;+\infty\right)$

<u>Задания группам:</u>

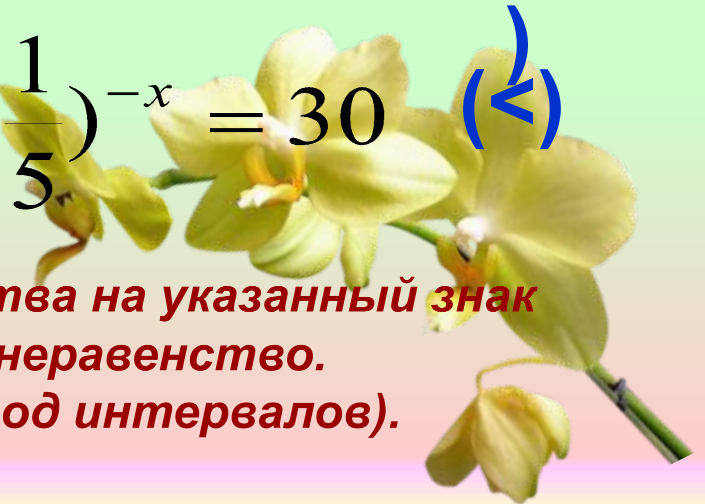
1 группа $\dfrac{1}{2^x - 1} + 2^x = 3$ **(>)**

2 группа $(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{x-1}{x-3}} = \sqrt[x]{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2}$ **(≥)**

3 группа $9^x + 6^x = 4^{x+0,5};$ **(>)**

4 группа $\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 2} = 3;$ **(≤)**

5 группа $(\frac{1}{5})^x + 125 \cdot (\frac{1}{5})^{-x} = 30$ **(<)**



В каждом уравнении замените знак равенства на указанный знак неравенства и решите полученное неравенство. (Используйте при необходимости метод интервалов).

Спасиб

за уро