

В 19

Спецификация КИМ ЕГЭ 2015 г.

Проверяемые требования (умения):


использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

Элементы содержания

Целые числа; дроби, проценты, рациональные числа; применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Уровень сложности – повышенный

Максимальный балл -3



У гражданина Лукина 1 августа 2000 года родился сын. По этому случаю он открыл в некотором банке вклад в **1000** рублей. Каждый следующий год 1 августа он **пополнял** вклад на **1000** рублей. По условиям договора банк ежегодно 31 июля начислял **20%** на сумму вклада. **Через 6 лет** у гражданина Лукина родилась дочь, и он открыл в другом банке ещё один вклад, уже на **2200** рублей, и каждый следующий год вносил в банк **2200** рублей, а банк ежегодно начислял **44%** на сумму вклада. Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

1 августа открыл первый вклад на **1000** рублей. Каждый следующий год 1 августа он **пополнял** вклад на **1000** рублей. Банк ежегодно 31 июля начислял **20%** на сумму вклада.

Через n лет величина вклада в первом банке будет:

$$1000 + 1000 \cdot 1,2 + \dots + 1000 \cdot 1,2^n =$$
$$1000 \cdot \frac{1,2^{n+1} - 1}{1,2 - 1} = 5000(1,2^{n+1} - 1) (\text{руб}).$$
$$S_n = \frac{b_1(g^n - 1)}{g - 1}$$

Через **6** лет открыл второй вклад на **2200** рублей, а банк ежегодно начислял **44%** на сумму вклада.

Через n лет после открытия первого вклада величина второго вклада будет:

$$2200 + 2200 \cdot 1,44 + \dots + 2200 \cdot 1,44^{n-6} =$$
$$2200 \cdot \frac{1,44^{n-5} - 1}{1,44 - 1} = 5000(1,44^{n-5} - 1) (\text{руб}).$$

Через сколько лет после рождения сына суммы на каждом из двух вкладов сравняются, если деньги из вкладов не изымаются?

$$5000(1,2^{n+1} - 1) = 5000(1,44^{n-5} - 1)$$

$$1,2^{n+1} = 1,44^{n-5},$$

$$1,2^{n+1} = 1,2^{2(n-5)},$$

$$n + 1 = 2n - 10,$$

$$n = 11.$$

Ответ: 11.



- 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке **9 930 000** рублей в **кредит** под **10%** годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть **увеличивает долг на 10%**), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей **выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?**

- Пусть ежегодная выплата равна x , обозначим сумму кредита $-a$,

| долг | Долг после начисления банком процентов | Долг после выплаты |
|-----------------------------------|---|---|
| a | $a \cdot 1,1$ | $a \cdot 1,1 - x$ |
| $a \cdot 1,1 - x$ | $(a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1$ | $(a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$ |
| $(a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$ | $((a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1$ | $((a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x$ |

$$((a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0$$

$$((a \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x) \cdot 1,1 - x = 0,$$

$$a \cdot 1,1^2 - 1,1x - x) \cdot 1,1 = x,$$


$$a \cdot 1,1^3 - 2,31 \cdot x = x,$$

$$a \cdot 1,1^3 = 3,31 \cdot x,$$

$$x = \frac{a \cdot 1,1^3}{3,31}$$

$$x = \frac{9930000 \cdot 1,1^3}{3,31} = 3993000.$$

Ответ: 3993000.

- 
- В банк помещена сумма **3900** тысяч рублей под **50%** годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения **после начисления** процентов вкладчик дополнительно **вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму**. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на **725%**. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых.

| | <i>через год</i> | <i>через два</i> | <i>через три</i> | <i>через четыре</i> | <i>через пять</i> |
|------|------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 3900 | $1,5 \cdot 3900$ | $1,5^2 \cdot 3900$ | $1,5^3 \cdot 3900$ | $1,5^4 \cdot 3900$ | $1,5^5 \cdot 3900$ |

Через год внесена первая добавка (x), которая тоже начала приносить доход.

| | <i>через год</i> | <i>через два</i> | <i>через три</i> | <i>через четыре</i> | <i>через пять</i> |
|------|------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 3900 | $1,5 \cdot 3900$ | $1,5^2 \cdot 3900$ | $1,5^3 \cdot 3900$ | $1,5^4 \cdot 3900$ | $1,5^5 \cdot 3900$ |
| | x | $1,5 \cdot x$ | $1,5^2 \cdot x$ | $1,5^3 \cdot x$ | $1,5^4 \cdot x$ |

Вкладчику это понравилось, и он стал повторять процесс (вносить x рублей) каждый год.

| | <i>через год</i> | <i>через два</i> | <i>через три</i> | <i>через четыре</i> | <i>через пять</i> |
|------|------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 3900 | $1,5 \cdot 3900$ | $1,5^2 \cdot 3900$ | $1,5^3 \cdot 3900$ | $1,5^4 \cdot 3900$ | $1,5^5 \cdot 3900$ |
| | x | $1,5 \cdot x$ | $1,5^2 \cdot x$ | $1,5^3 \cdot x$ | $1,5^4 \cdot x$ |
| | | x | $1,5 \cdot x$ | $1,5^2 \cdot x$ | $1,5^3 \cdot x$ |
| | | | x | $1,5 \cdot x$ | $1,5^2 \cdot x$ |
| | | | | x | $1,5 \cdot x$ |

Через пять лет забрал деньги (из последнего столбика).

$$1,5^5 \cdot 3900 + 1,5^4 \cdot x + 1,5^3 \cdot x + 1,5^2 \cdot x + 1,5 \cdot x$$

$$1,5^4 \cdot x + 1,5^3 \cdot x + 1,5^2 \cdot x + 1,5 \cdot x = x(1,5^4 + 1,5^3 + 1,5^2 + 1,5) =$$
$$x \frac{1,5(1,5^4 - 1)}{1,5 - 1} = 3x(1,5^4 - 1) = \frac{3x \cdot 65}{16}$$

$$1,5^5 \cdot 3900 + 1,5^4 \cdot x + 1,5^3 \cdot x + 1,5^2 \cdot x + 1,5 \cdot x = 1,5^5 \cdot 3900 + \frac{3x \cdot 65}{16}$$

К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%.

$$3900 \cdot 8,25$$

$$1,5^5 \cdot 3900 + \frac{3x \cdot 65}{16} = 3900 \cdot 8,25$$

$$1,5^5 \cdot 3900 + \frac{3x \cdot 65}{16} = 3900 \cdot 8,25$$

$$\frac{3x \cdot 65}{16} = 3900 \cdot 8,25 - 1,5^5 \cdot 3900,$$


$$\frac{3x \cdot 65}{16} = 3900 \cdot (8,25 - 1,5^5)$$

$$\frac{x \cdot 65}{16} = 1300 \cdot \left(\frac{33}{4} - \frac{243}{32} \right),$$

$$x = 210.$$

210 тыс. рублей вкладчик ежегодно добавлял к вкладу

Ответ: 210 тыс.рублей.

- 
- В начале года $\frac{5}{6}$ некоторой суммы денег вложили в банк A , а остальное – в банк B . Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определенный процент, величина которого зависит от банка. К концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у.е., к концу следующего – 749 у.е.
 - Если первоначально $\frac{5}{6}$ суммы было бы вложено в банк B , а оставшуюся часть вложили бы в банк A , то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у.е.
 - Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

*A**B*

| | |
|------|-----|
| $5a$ | a |
|------|-----|

К концу первого года в банке *A* становится денег *k* раз больше, в банке *B* - в *p* раз:

*A**B*

| | |
|-------|------|
| $5a$ | a |
| $5ka$ | pa |

Ещё через год вклады в банках увеличиваются в то же самое число раз:

*A**B*

| | |
|---------|--------|
| $5a$ | a |
| $5ka$ | pa |
| $5k^2a$ | p^2a |

$$\begin{cases} 5ka + pa = 670, \\ 5k^2a + p^2a = 749. \end{cases}$$

Теперь поступим с точностью до наоборот, положив в банк Б большую сумму:

| <i>A</i> | <i>B</i> |
|----------|----------|
| a | $5a$ |

Банковские проценты не меняются, общую сумму в конце первого года мы знаем:

| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>всего</i> |
|----------|----------|--------------|
| a | $5a$ | |
| ka | $+ 5pa$ | $= 710$ |

$$\begin{aligned}6ka + 6pa &= 1380, \\ ka + pa &= 230\end{aligned}$$

$$\begin{cases}5ka + pa = 670, \\ 5k^2a + p^2a = 749, \\ ka + 5pa = 710.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}5ka + pa &= 670, \\ ka + pa &= 230,\end{aligned}$$

$$4ka = 440,$$

$$ka = 110, pa = 120.$$

$$ka = 110, pa = 120,$$

$$k : p = 11 : 12,$$

$$k = 11t, p = 12t$$

$$5ka + pa = 670,$$

$$ka + pa = 230,$$

$$4ka = 440,$$

$$ka = 110, pa = 120.$$

$$5k^2a + p^2a = 749,$$

$$550 \cdot 11t + 120 \cdot 12t = 749,$$

$$7490 \cdot t = 749,$$

$$t = 0,1.$$

$$p = 1,2,$$

$$k = 1,1.$$


Что же нам надо найти? Сумму вкладов по истечении второго года.

| <i>A</i> | <i>B</i> | <i>всего</i> |
|----------|-----------|--------------|
| a | $5a$ | |
| ka | $+ 5pa$ | $= 710$ |
| k^2a | $+ 5p^2a$ | $= ?$ |

$$k^2a + 5p^2a = ?$$

$$k \cdot ka + 5p \cdot pa = 110k + 600p = 110 \cdot 11t + 600 \cdot 12t = 8410t = 841.$$

Ответ: 841.

- 
- Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита **вернул** в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет погашения кредита он внес в банк сумму на **21%** превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Фермер получил кредит A рублей в банке под $p\%$ ГОДОВЫХ.

Через год он должен банку $A\left(1+\frac{p}{100}\right)$ рублей.

Фермер в счет погашения кредита **вернул** в банк $\frac{3}{4}$ от всей суммы, которую он должен был банку к этому времени, а, следовательно, ему осталось вернуть:

$$\frac{1}{4} A\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ рублей.}$$

Через год он должен банку $\left[\frac{1}{4} A\left(1+\frac{p}{100}\right)\right]\left(1+\frac{p}{100}\right) = \frac{1}{4} A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$ рублей

в счет погашения кредита он внес в банк сумму на **21%** превышающую величину полученного кредита.

$$\frac{1}{4} A\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 1,21A$$

Ответ: 120%.

За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12, 5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$.
Определите срок хранения вклада.

- Если первоначальная сумма была x р., то через месяц эта сумма станет $(x + 0,05x)$ р. Можно сказать, что новая сумма составляет 105% от старой (увеличилась в $1,05$ раз). Если ставку не менять, то сумма снова увеличится в $1,05$ раз и станет $(1,05 \cdot 1,05x)$ р.
- Пусть первая ставка продержалась k , вторая - m , третья - n , последняя - t месяцев. Тогда сумма на счёте по истечении срока хранения увеличилась во столько раз:

$$\left(\frac{105}{100}\right)^k \cdot \left(\frac{112}{100}\right)^m \cdot \left(\frac{1000}{900}\right)^n \cdot \left(\frac{1125}{1000}\right)^t$$

$$\left(\frac{3 \cdot 7}{2^2 \cdot 5}\right)^k \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 7}{5^2}\right)^m \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2}\right)^n \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^t$$

сумма на счёте по истечении срока хранения увеличилась во столько раз:

$$\left(\frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5}\right)^k \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 7}{5^2}\right)^m \cdot \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2}\right)^n \cdot \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^t$$

$$2^{2m+n-2k-3t} \cdot 3^{k-2n+2t} \cdot 5^{n-k-2m} \cdot 7^{k+m}$$

- сумма увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$, т.е. составляет от начальной $204\frac{1}{6}\%$

Иначе говоря, она увеличилась по сравнению с начальной суммой во столько раз:


$$\frac{1225}{600} = \frac{49}{24} = \frac{7^2}{2^3 \cdot 3} = 2^{-3} \cdot 3^{-1} \cdot 5^0 \cdot 7^2$$

$$\begin{cases} 2m+n-2k-3t = -3 \\ k-2n+2t = -1 \\ n-k-2m = 0 \\ k+m = 2 \end{cases}$$

- $k = m = 1, n = 3, t = 2$.

Срок хранения вклада равен

- $k + m + n + t = 1 + 1 + 3 + 2 = 7$.



Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй – 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Обозначим число акций первого брокера ($4x$),
(75% от этого числа равны ($3x$)).

Обозначим число акций второго брокера ($5y$),
(80% от этого числа равны ($4y$).)

| | <i>всего акций</i> | <i>продано акций</i> |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <i>брокер 1</i> | $4x$ | $3x$ |
| <i>брокер 2</i> | $5y$ | $4y$ |

Так как сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% больше, то и число проданных вторым брокером акций на 140% больше (цена постоянна).

| | <i>всего акций</i> | <i>продано акций</i> |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <i>брокер 1</i> | $4x$ | $3x - 100\%$ |
| <i>брокер 2</i> | $5y$ | $4y - 240\%$ |

$$\frac{3x}{4y} = \frac{100}{240}$$

$$\frac{3x}{4y} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{3x}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$$

Обозначим $x = 5t$, $y = 9t$

всего акций *продано акций*

брокер 1

$20t$

$15t$

брокер 2

$45t$

$36t$

Можем теперь посчитать общее число купленных и выгодно проданных акций:

| | <i>всего акций</i> | <i>продано акций</i> |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <i>брокер 1</i> | $20t$ | $15t$ |
| <i>брокер 2</i> | $45t$ | $36t$ |
| <i>всего</i> | $65t$ | $51t$ |

Известна и общая стоимость купленных и проданных акций:

| | <i>всего акций</i> | <i>продано акций</i> |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <i>брокер 1</i> | $20t$ | $15t$ |
| <i>брокер 2</i> | $45t$ | $36t$ |
| <i>всего</i> | $65t$ | $51t$ |
| | 3640 р. | 3927 р. |

Несложно посчитать старую и новую цену акций:

| | <i>всего акций</i> | <i>продано акций</i> |
|-----------------|--------------------|----------------------|
| <i>брокер 1</i> | $20t$ | $15t$ |
| <i>брокер 2</i> | $45t$ | $36t$ |
| <i>всего</i> | $65t$ | $51t$ |
| | 3640 р. | 3927 р. |
| | $\frac{56}{t}$ | $\frac{77}{t}$ |

Задача теперь сводится к такой: на сколько процентов 77 больше 56?

$$\frac{77-56}{56} \cdot 100 = \frac{21}{56} \cdot 100 = \frac{3}{8} \cdot 100 = 0,375 \cdot 100 = 37,5$$

Ответ: 37,5%