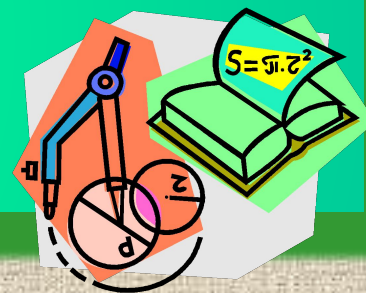


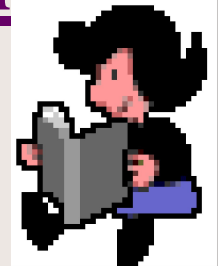
**Материалы к урокам
геометрии
в 8 классе
по теме:**



**«Подобие треугольников.
Признаки подобия
треугольников»**

Содержание:

- Теоретический материал
- Признаки подобия
треугольников
- Примеры решения задач
- Это интересно...
- Задачи для самостоятельного
выполнения



Геометрический материал:

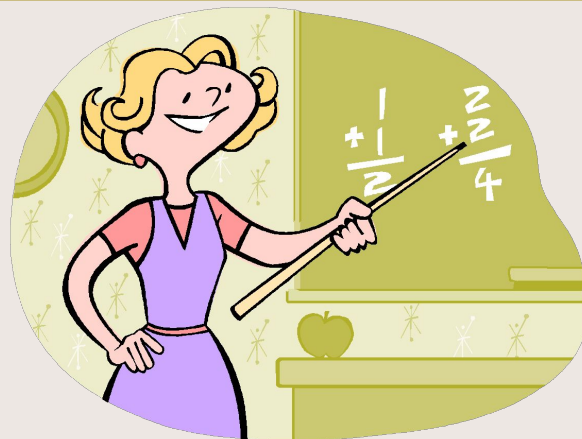
- Пропорциональные отрезки
- Определение подобных треугольников
- Отношение площадей подобных треугольников



Признаки подобия треугольников:



- II I признак
- III признак
- III признак
- Подобие прямоугольных
треугольников

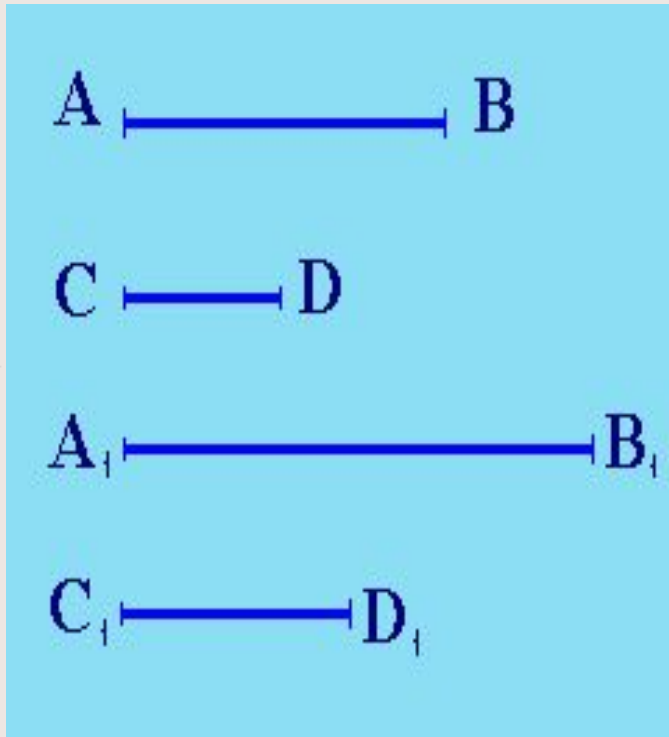


Примеры решения задач:

- Задача 1
- Задача 2
- Задача 3



Пропорциональные отрезки.



Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е.

$$\frac{AB}{CD}$$

Говорят, что отрезки AB и CD *пропорциональны* отрезкам A₁B₁ и C₁D₁, если

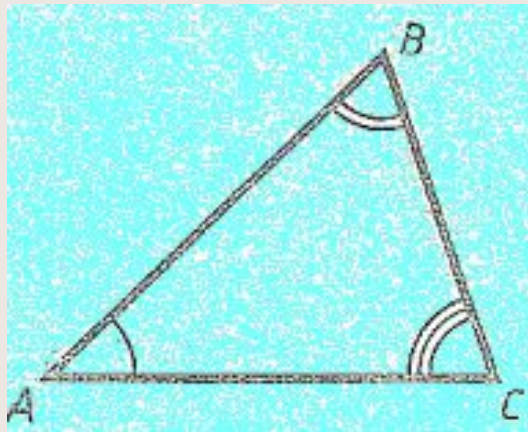
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A₁B₁ и C₁D₁, длины которых равны 3 см и 1,5 см.

В самом деле, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$

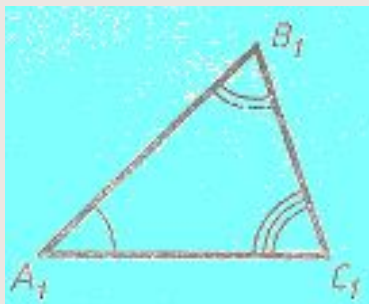


Определение подобных треугольников.



Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие углы равны. В этом случае стороны AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 называются *сходственными*.

Два треугольника называются *подобными*, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



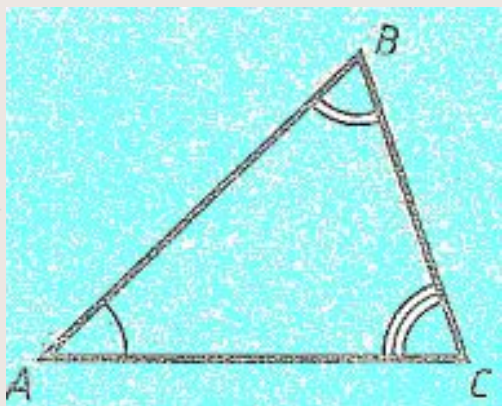
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

Число k , равное отношению сходственных сторон треугольников, называется *коэффициентом подобия*.



Отношение площадей подобных треугольников.

Теорема: Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.



Дано: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Коэффициент подобия равен k .

Доказать: $\frac{S}{S_1} = k^2$

Доказательство: Пусть площадь $\triangle ABC$ равна S , а площадь $\triangle A_1B_1C_1$ равна S_1 .

Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$



(по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$,

поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$. Теорема доказана.



Первый признак подобия треугольников.

Теорема: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство: по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B, \quad \angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1,$$

и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы $\triangle ABC$

соответственно равны углам $\triangle A_1B_1C_1$. Докажем, что стороны $\triangle ABC$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle A_1B_1C_1$.

Т.к. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то

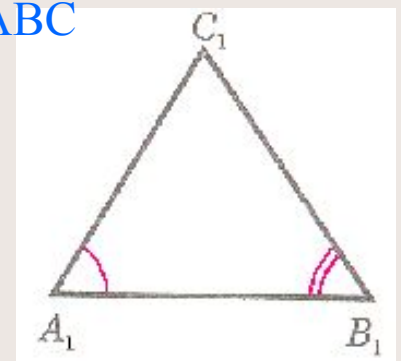
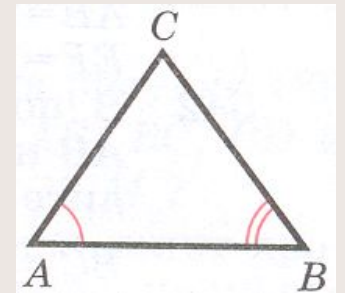
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

Из этих равенств следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны $\triangle ABC$ пропорциональны сходственным сторонам $\triangle A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

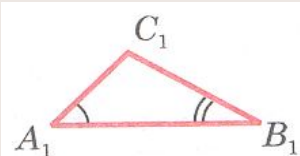


Второй признак подобия треугольников.

Теорема: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Доказательство: Достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

Рассмотрим $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}.$$

С другой стороны, по условию $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

$\triangle ABC$ и $\triangle ABC_2$ равны по двум сторонам и углу между ними (AB – общая сторона, $AC = AC_2$ и $\angle A = \angle 1$)

Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так, как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

Теорема доказана.



Третий признак подобия треугольников.

Теорема: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство: Достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

Рассмотрим $\triangle ABC_2$, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

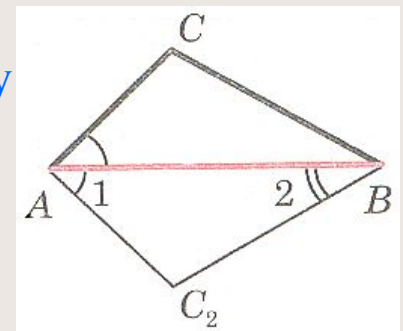
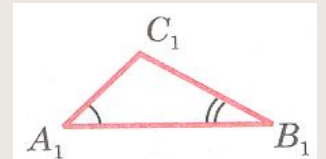
Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.

Сравнивая эти равенства с равенствами, которые записаны в дано, получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

$\triangle ABC = \triangle ABC_2$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$,

а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$.

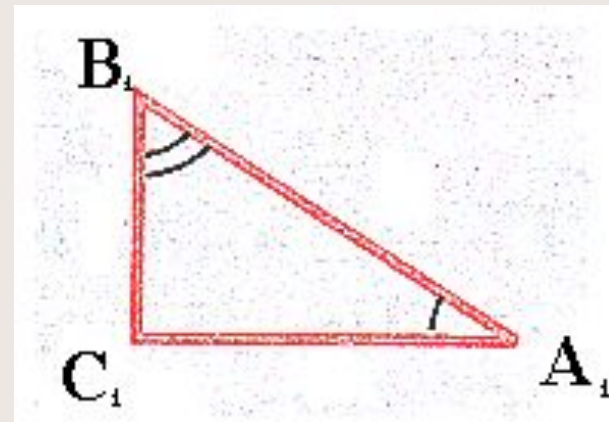
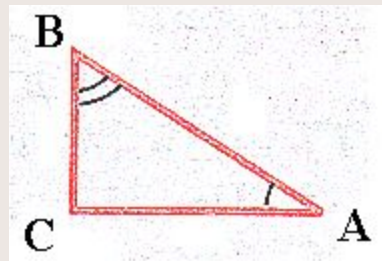
Теорема доказана.



Подобие прямоугольных треугольников.

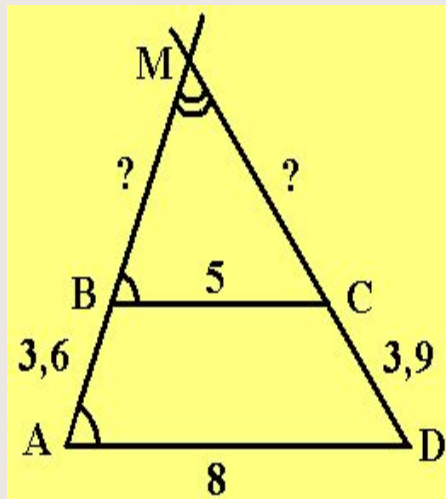
Два прямоугольных треугольника **подобны**, если

- 1) их катеты пропорциональны;
- 2) катет и гипотенуза одного треугольника пропорциональны катету и гипотенузе другого;
- 3) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.



Задача 1.

Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке М. Найдите расстояния от точки М до концов меньшего основания.



Дано: ABCD – трапеция. AD=8 см, BC=5 см, AB = 3,6 см, CD = 3,9 см. AB пересекает CD в точке М.

Найти: BM и CM.

Решение: $\triangle AMD \sim \triangle BMC$ по I признаку подобия треугольников (угол М – общий, угол MAD = углу MBC как односторонние при параллельных прямых BC и AD и секущей AM). Значит их сходственные стороны пропорциональны.

Пусть $BM = x$, тогда $AM = 3,6 + x$. По определению подобных треугольников имеем

$$\frac{x}{3,6+x} = \frac{5}{8}$$

По свойству пропорций получим: $8x = 5(3,6 + x)$. Отсюда получаем, что $x = 6$. Значит $BM = 6$ см. Аналогично составим пропорцию для стороны MC:

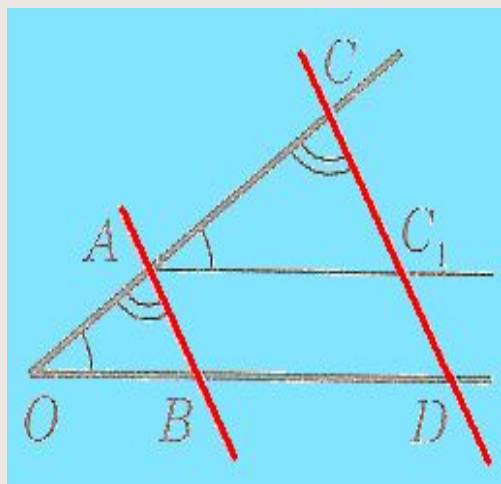
$\frac{x}{3,9+x} = \frac{5}{8}$ По свойству пропорций получим: $8x = 5(3,9 + x)$. Отсюда получаем, что $x = MC = 6,5$ см.

Ответ: 6 см и 6,5 см.



Задача 2.

Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD . Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD .



Дано: угол O , $AB \parallel CD$.

AB пересекает угол O , CD пересекает угол O .

Доказать: $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

Доказательство: Проведем через точку A прямую $AC_1 \parallel BD$ (C_1 – точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда $\triangle OAB \sim \triangle ACC_1$ по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$ и

$\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$

Так как $AC_1 = BD$ (по определению параллелограмма AC_1DB), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

Что и требовалось доказать.



Задача 3.

На одной из сторон данного угла A отложены отрезки $AB = 5$ см и $AC = 16$ см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки $AD = 8$ см и $AF = 10$ см. Подобны ли треугольники ACD и AFB ?

Дано: угол A . $AB = 5$ см, $AC = 16$ см, $AD = 8$ см, $AF = 10$ см.

Проверить: $\triangle ACD \sim \triangle AFB$?

Решение: Используем II признак подобия треугольников. Угол A общий, значит нужно проверить пропорциональны ли сходственные стороны треугольников, заключающие этот угол A . По определению подобных треугольников должно выполняться следующее равенство:

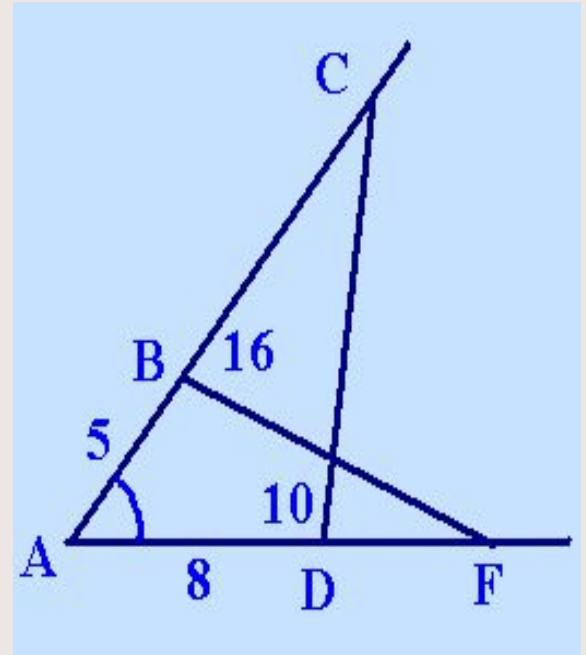
Подставив данные мы получим верное равенство:

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$$

Значит по второму признаку подобия треугольников $\triangle ACD \sim \triangle AFB$.

Ответ: да.





Это интересно...

История учения о подобии фигур.

Искусство изображать предметы на плоскости с древних времен привлекало к себе внимание человека. Попытки таких изображений появились значительно раньше, чем возникла письменность. Еще в глубокой древности люди рисовали на скалах, сосудах и прочих предметах быта различные орнаменты, растения, животных. При этом человек стремился к тому, чтобы изображение правильно отражало естественную форму предмета.

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамзеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V-IV вв. до н. э. трудами Гиппократы Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и др. Оно изложено в VI книге «Начала» Евклида.

Символ, обозначающий подобие фигур, есть не что иное, как повернутая латинская буква S-первая буква в слове *similis*, что в переводе означает подобие.

