ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ ФИГУР

Урок – тренинг в 11 классе

(профильный уровень)

АВТОР: ЕВСТИФЕЕВА Т. В.

"

ЦЕЛИ УРОКА:

- - *обучающая: повторить и обобщить типы задач на вычисление площадей фигур, в том числе фигур сложной геометрической конфигурации, учить построению геометрических моделей и снятию соответствующей информации с чертежа, необходимой для вычисления площади фигуры, сформировать начальное представление об истории развития интегрального исчисления;*
- - *развивающая: научить мыслить и оперировать математическими знаниями, стимулировать мышление учащихся;*
- - *воспитательная: развивать у учащихся коммуникативные компетенции (умение работать в группе, культуру общения), способствовать развитию интеллектуальной деятельности учащихся.*

ПЛАН УРОКА

I. Блиц – опрос. Повторение основных теоретических знаний

II. Практическое применение знаний

III. Защита домашних задач

IY. Постановка проблемы (обобщение)

Y. Коррекция знаний по теме

YI. Историческая справка

YII. Подведение итогов

YIII. Домашнее задание

БЛИЦ - ОПРОС

1. В чем заключается геометрический смысл интеграла?
2. Какую фигуру называют криволинейной трапецией?
3. Как найти п… …е, если f(x) ≤0 на [a;b]

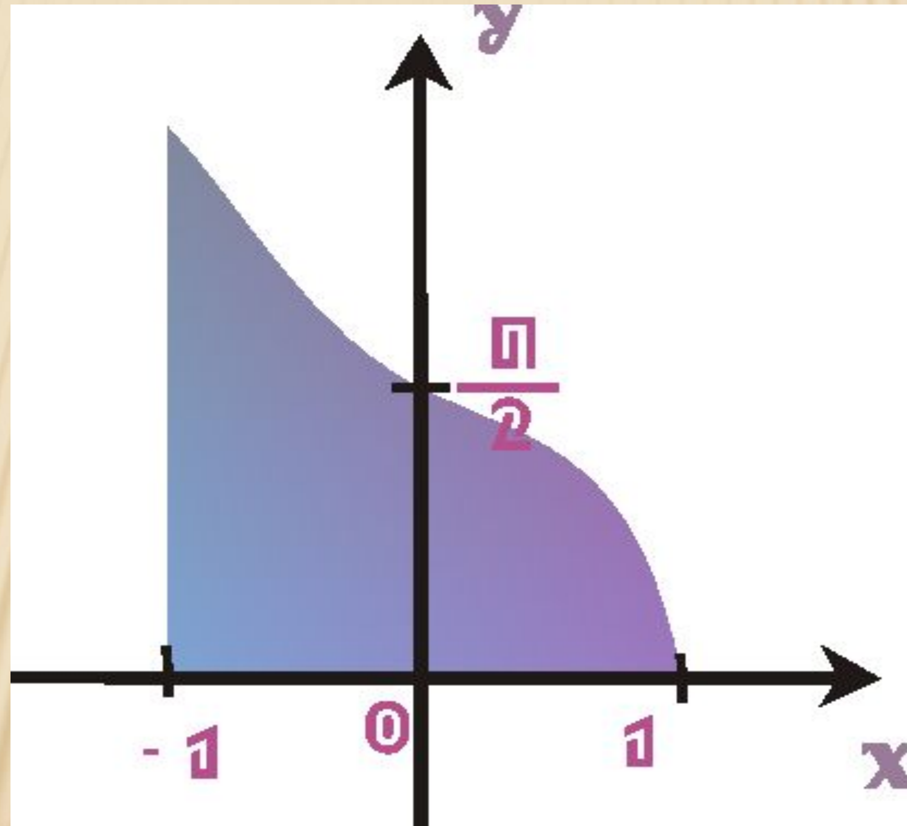
Интеграл от
неотрицательной
непрерывн…
…

…Фигура, ограниченная
…ом оси абсцисс,
…ми x=a, x=b,
… непрерывной
… f(x)≥0 на [a;b]

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

ЗАДАЙТЕ АНАЛИТИЧЕСКИ ФИГУРУ

6



y = arccos x, y = 0, x = -1

y = x², y = 2, y = 1

$y = \sqrt{\cos x}, y = 0, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

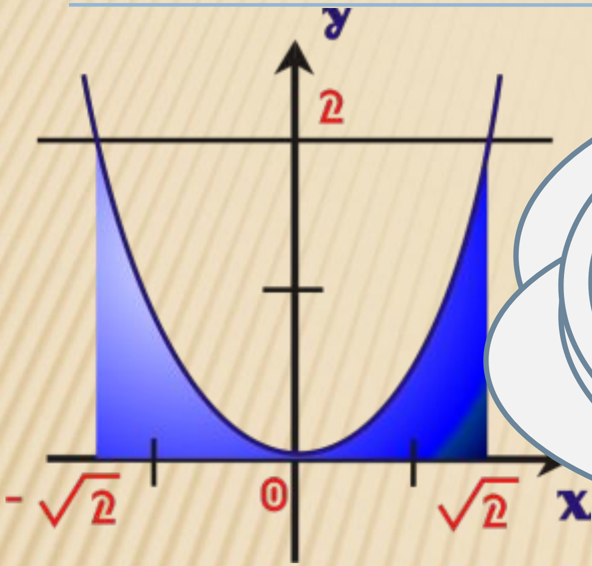
y = √2 = 1
2

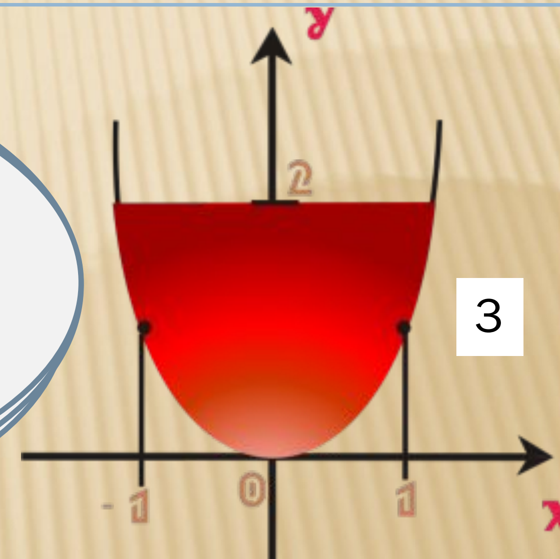
Вычислите площади фигур

I гр. на рис. 2

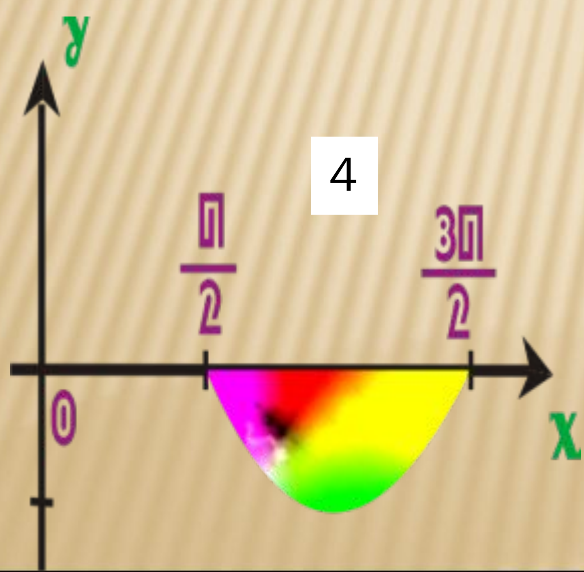
II гр. на рис 3

III гр. на рис 5

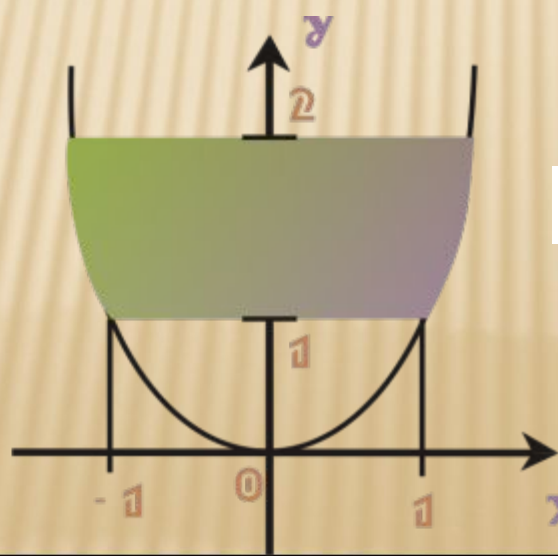




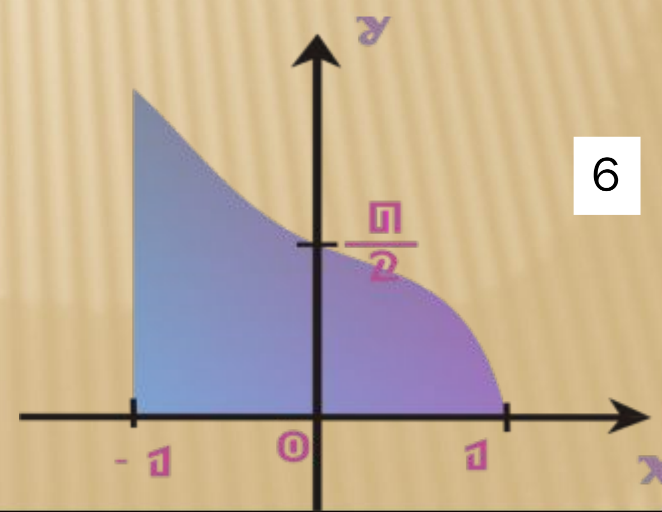
3



4



5



6

ПРОВЕРЬ РЕШЕНИЕ

I гр. $$S_{ф} = 2\left(\int_0^1 (2 - x^2)dx - 1\right) = \frac{4}{3}(кв.ед.)$$

II гр. $$S_{ф} = 2\left(2\sqrt{2} - \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}(кв.ед.)$$

III гр. $$S_{ф} = 2\left(2\sqrt{2} - 1 - \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dx\right) = \frac{8\sqrt{2} - 4}{3}(кв.ед.)$$

ЗАЩИТА ДОМАШНИХ ЗАДАЧ

- **Задание I группы.** Вычислить площадь фигуры, расположенной между линиями
  $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$.
- **Задание II группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$,
  $y = x^2 /2$, $y = 2x$.
- **Задание III группы.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной синусоидой, косинусоидой на отрезке $[\pi/4; 5\pi/4]$.

ЗАДАЧА I ГРУППЫ

График функции у=х²-2х – парабола

Х	-1	0	1	2	3
у	3	0	-1	0	3

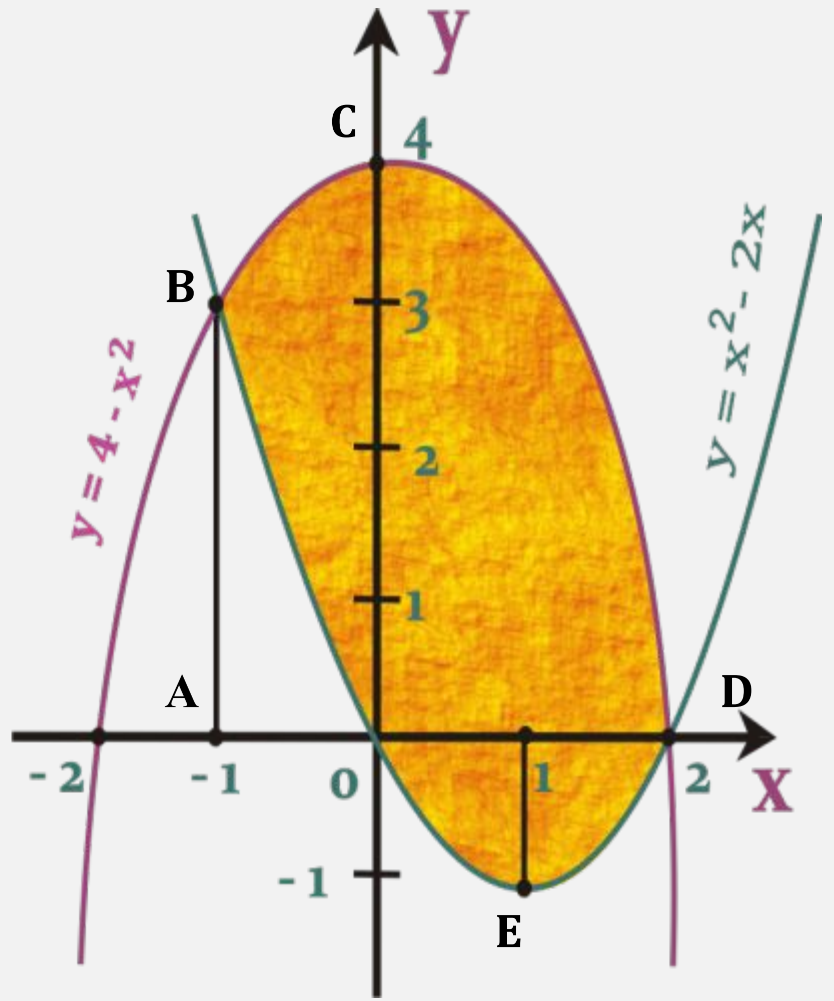
График функции у=4-х² – парабола

х	-2	-1	0	1	2
у	0	3	4	3	0

Точки пересечения В(-1;3), Д(2;0)

Sф= SАВСД - SАВО + SОЕД

Вычислим площадь каждой фигуры.



$$S_{АВСД} = \int_{-1}^{2} (4 - x^2)dx = (4x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^{2} = 9$$

$$S_{АВО} = \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x)dx = (\frac{x^3}{3} - x^2)\Big|_{-1}^{0} = 1\frac{1}{3}$$

$$S_{ОДЕ} = -\int_{0}^{2} (x^2 - 2x)dx = (x^2 - \frac{x^3}{3})\Big|_{0}^{2} = 1\frac{1}{3}$$

$$S_{ф} = 9 - 1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 9(кв.ед.)$$

ЗАДАЧА II ГРУППЫ

График функции $у=х^2$ - парабола

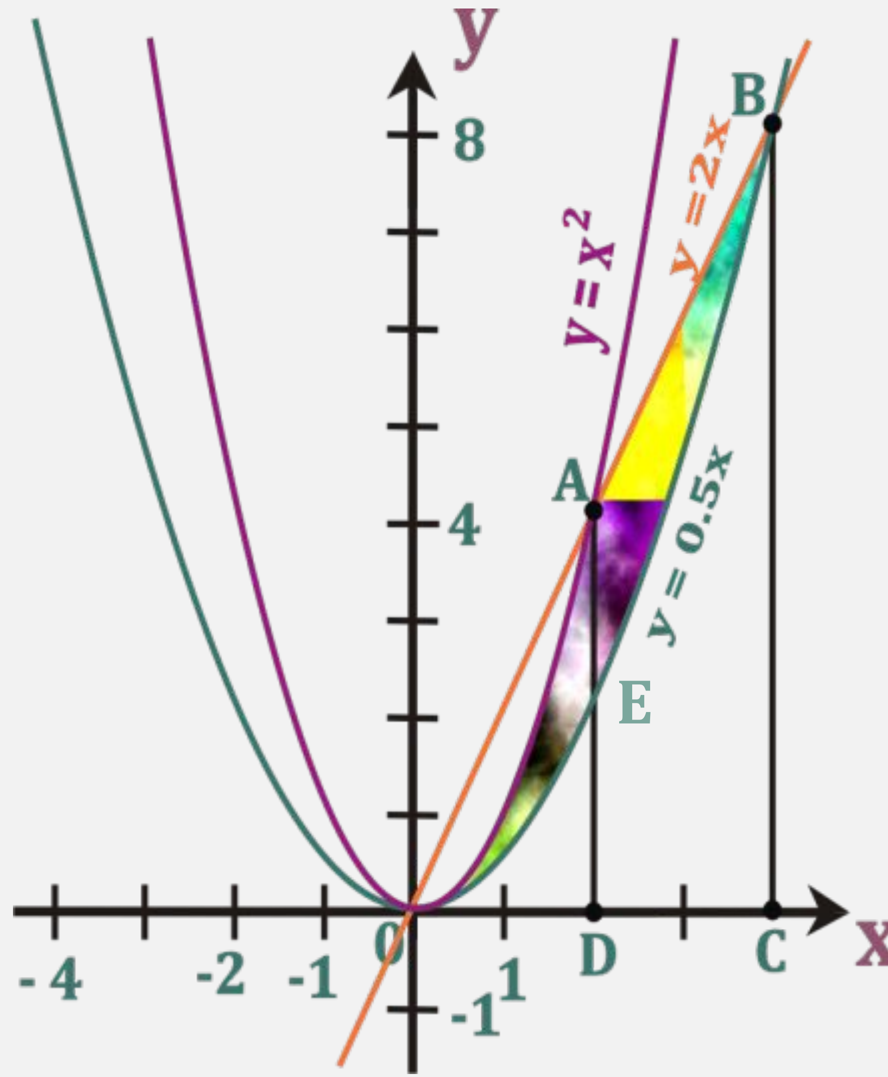
X	±2	±1	0
У	4	1	0

График функции $у=½\ х^2$ - парабола

X	±4	±2	±1	0
y	8	2	0,5	0

У=2х

x	0	4
y	0	8



$S_ф = S_{OAE}+S_{EAB} = (S_{OAД} - S_{OEД}) +(S_{ДАВС} – S_{ДЕВС})$

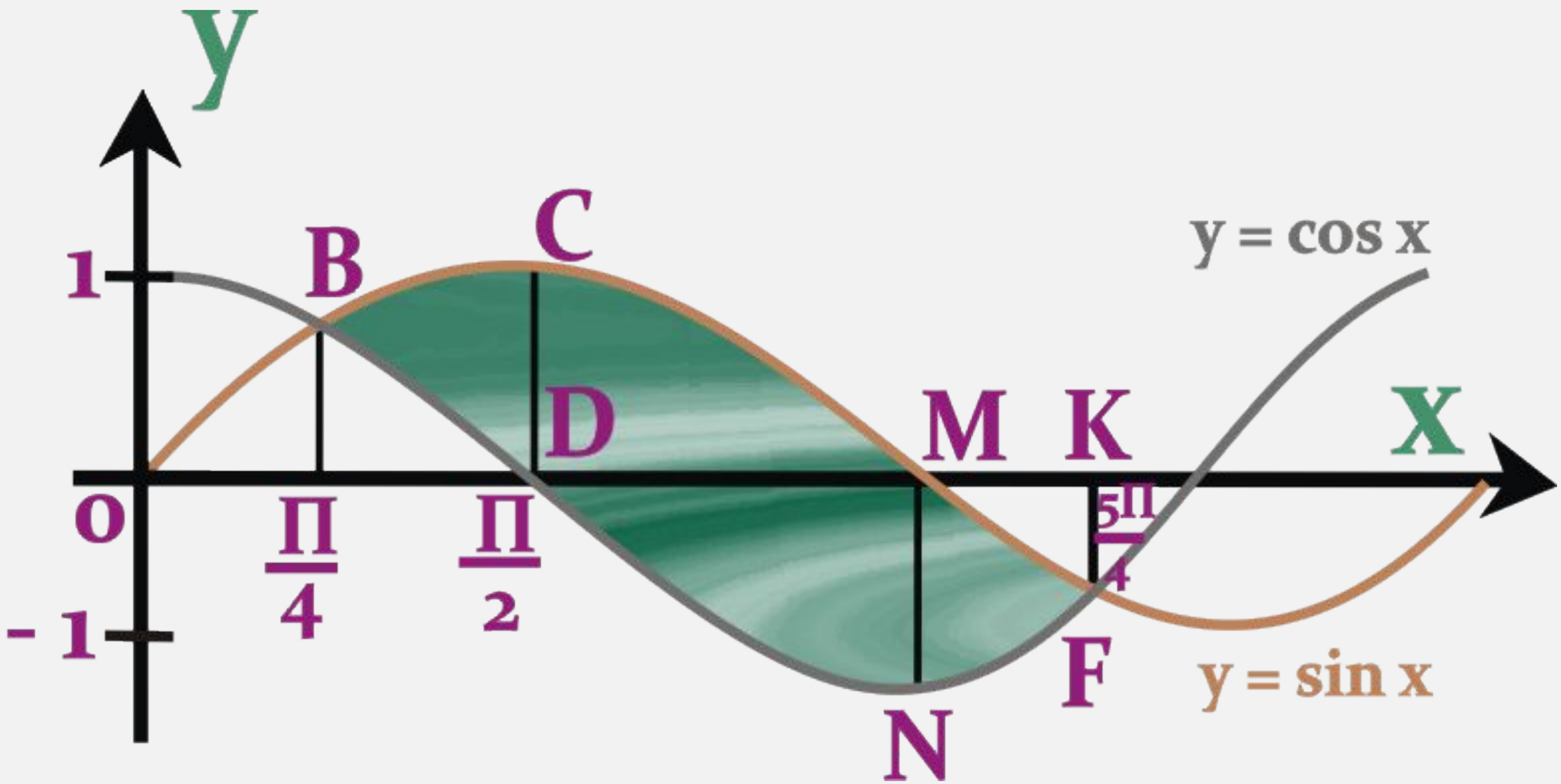
Выполним вычисления, применив свойство аддитивности интеграла

$$S_{\phi} = \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx + \frac{1}{2}(4+8)2 -$$

$$- \int_2^4 \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 x^2 dx - \int_2^4 x^2 dx\right) + 12 =$$

$$= \frac{x^3}{6}\Big|_0^2 - \frac{x^3}{6}\Big|_2^4 + 12 = 10\frac{2}{3}(\text{кв.ед.})$$

ЗАДАЧА III ГРУППЫ



$S_{ф} = S_{BCD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNF} =$

$= S_{ABCD} – S_{ABD} + S_{DCM} + S_{DMN} + S_{MNFK} - S_{MKF}$

Выполним вычисления, применив свойство аддитивности интеграла

$$S_{\phi} = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx + \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \sin x dx -$$

$$- \int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos x dx - \int\limits_{\pi}^{5\pi/4} \cos x dx + \int\limits_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx =$$

$$\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = -(\cos x + \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} = 2\sqrt{2}$$

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ (ОБОБЩЕНИЕ)

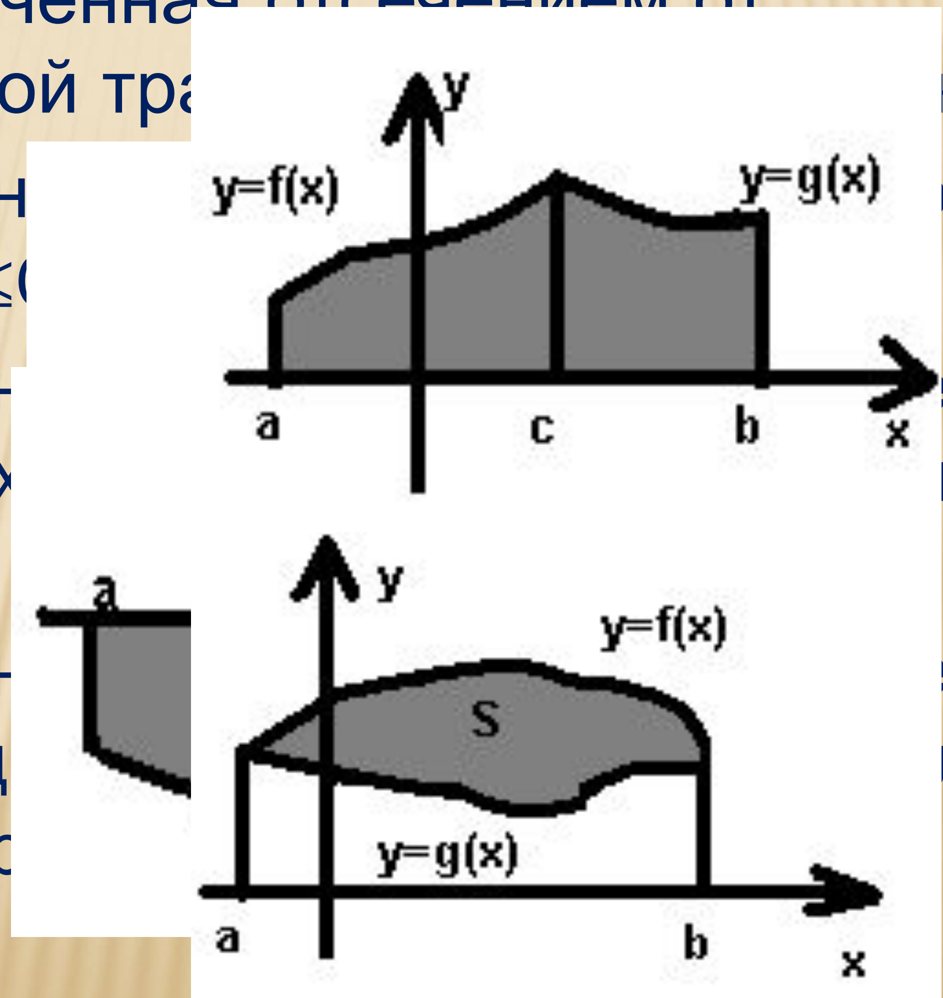
Проблема: Как с помощью интеграла вычислить площадь фигуры, не являющейся криволинейной трапецией?

Решение проблемы

Задачи на вычисление площадей фигур с помощью интеграла можно классифицировать по виду геометрических фигур, площади которых необходимо вычислить

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ

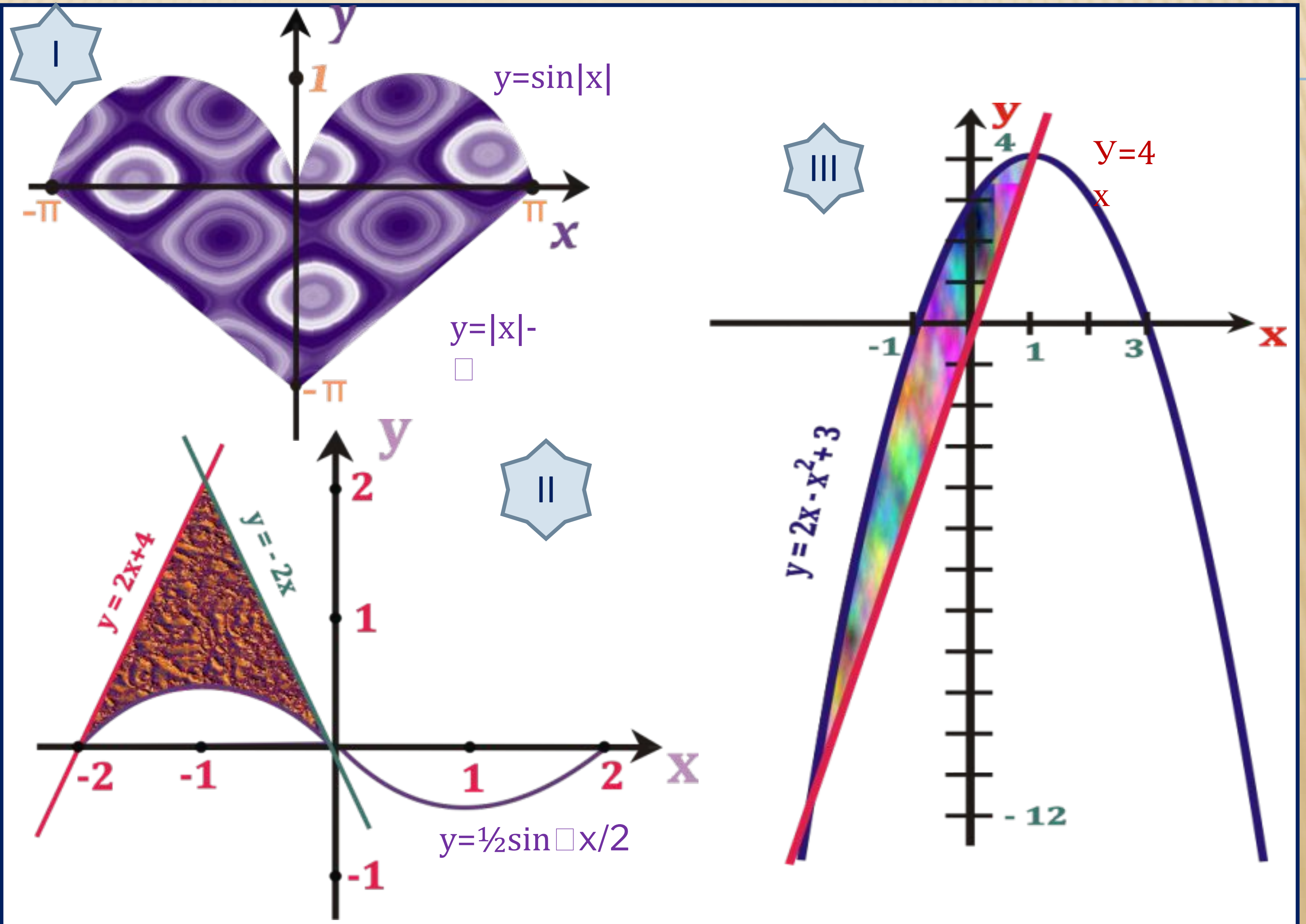
- Фигура, полученная отсечением от
  криволинейной тра ка
- Фигура, огран рывной
  функции f(x)≤0
- Фигура, огран ерывных
  функций y=f(x ыми x=a,
  x=b
- Фигура, огран ерывных
  функций, зад лами на
  различных пр



КОРРЕКЦИЯ ЗНАНИЙ

Используя рисунок, вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- I группа: $y=\sin|x|$, $y=|x|-\pi$
- II группа: $y=-2x$, $y=2x+4$, $y=-0{,}5\sin \pi x/2$
- III группа: $y=4x$, $y=2x-x^2+3$


I
y
1
y=sin|x|
-π
π
x
y=|x|-
- π
y
2
II
y = 2x+4
y = - 2x
1
-2
-1
1
2
x
-1
y=½sin x/2
III
y
4
Y=4
x
-1
1
3
x
y = 2x - x^2 + 3
- 12

ЧТО ПОМОЖЕТ УПРОСТИТЬ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ФИГУР?

Свойство симметрии фигуры

Перемещение фигуры (сдвиг вдоль оси Oy)

Применение свойств интеграла (свойство аддитивности)

НЕМНОГО ИСТОРИИ

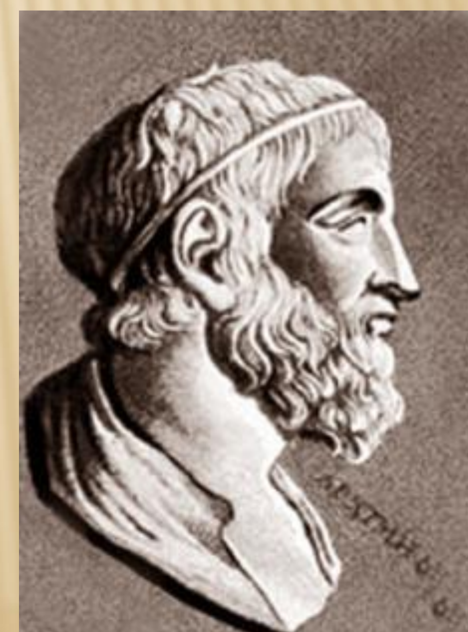
Математики Древней Греции

Евдокс Книдский
408 – 355 до н. э.

Строгое изложение теории интегралов появилось только в 19 веке. Но задачами на вычисление площадей занимались математики Древней Греции.

Методы вычисления площадей фигур, которые создал Архимед вслед за Евдоксом предвосхитили идею интегрирования за 18 веков до того, как интегральное исчисление было создано Ньютоном и Лейбницем

Архимед
287 – 212 до н.э.



НЕМНОГО ИСТОРИИ

Создатели математического анализа

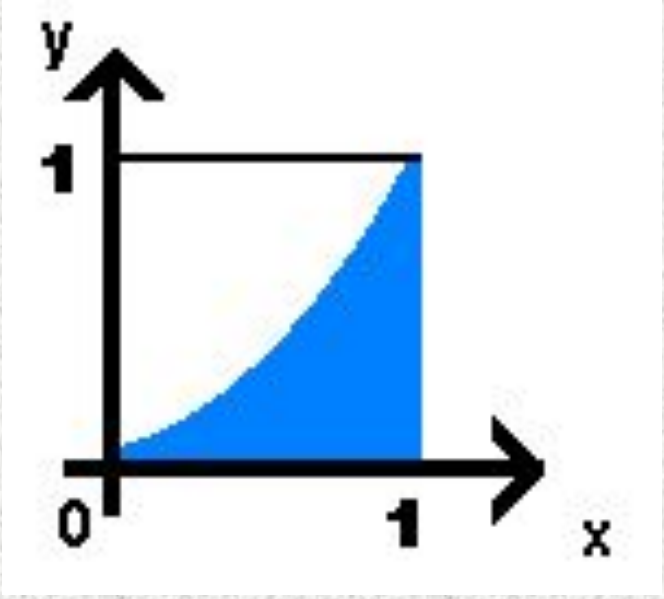
Исаак Ньютон
(1643 – 1772)

Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1646 - 1716)

"

ЗАДАЧА АРХИМЕДА

В каком отношении парабола $y=x^2$ делит площадь единичного квадрата



Рассмотрим сегмент параболы, отсекаемый хордой АС, $S_{ABC} < S_{\text{сегм. пар.}}$

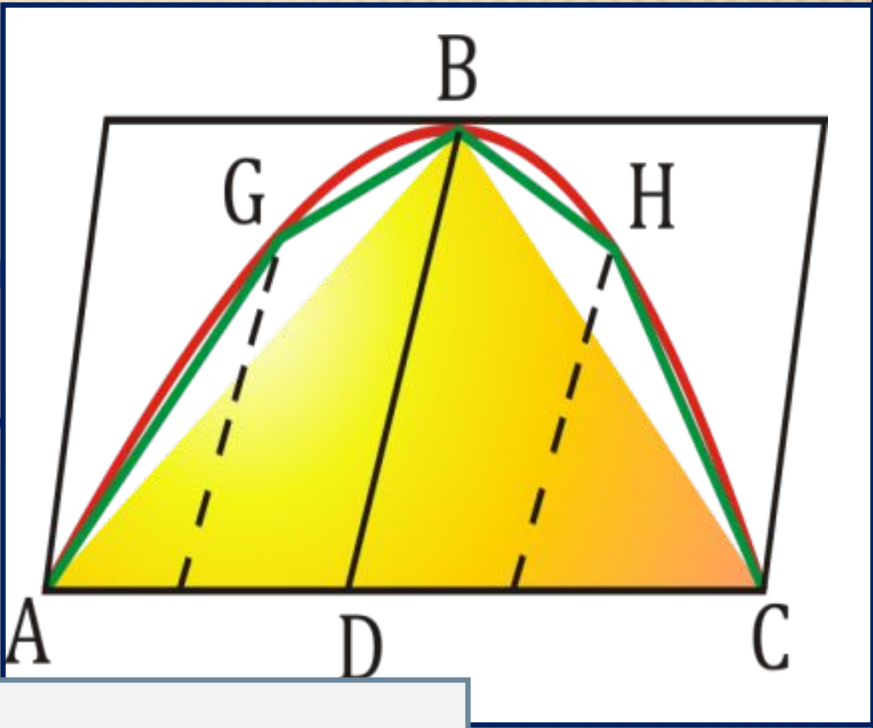
Точки G и H проектируются в середины отрезков AD и AC.

Получается многоугольник, по площад[...]

более близкий к сегменту параболы.

На хордах строятся новые треугольник[...]

Архимед вычисляет площади многоугольников и фактически находит предел, к которому стремятся эти площади, [...] сегмента пар[...]



$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Вычислите [...]ерез интеграл.

- Таким образом, уже Архимед успешно находил площади фигур, несмотря на то, что в математике его времени не было понятия интеграла
- Но лишь интегральное исчисление дает общий метод решения всех подобных задач
- Недаром даже поэты воспевали интеграл

"Смысл - там, где змеи интеграла,
Меж цифр и букв, меж d и f"

В. Я. Брюсов

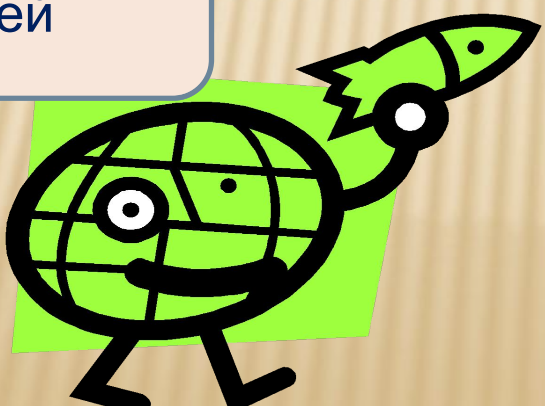
ИТОГИ УРОКА

Что планировали

Выяснить как вычислить площадь фигуры, не являющейся криволинейной трапецией

Что сделали

1. Классифицировали задачи
2. Систематизировали способы решения
3. Скоррекцировали знания
4. Совершили экскурс в историю



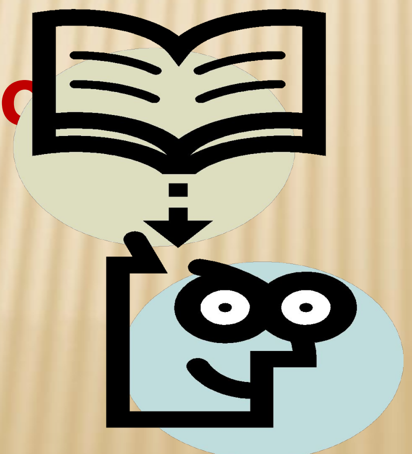
ЛИСТ САМООЦЕНКИ

	Навыки и умения	оценка
1.	Построение графиков функций	
2.	Выделение площади искомой фигуры	
3.	Определение общих точек графиков функций и пределов интегрирования	
4.	Выражение площади искомой фигуры через площади криволинейных трапеций или других фигур	
5.	Применение свойств фигур для упрощения решения	

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Составить опорный конспект по классификации задач и систематизации способов их решения, используя материал урока и п.4 стр. 159-161 учебника
2. Выполнить №21.67(г), 21.70(а, б)

Спасибо за уро



Дальнейших успехов!