МОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

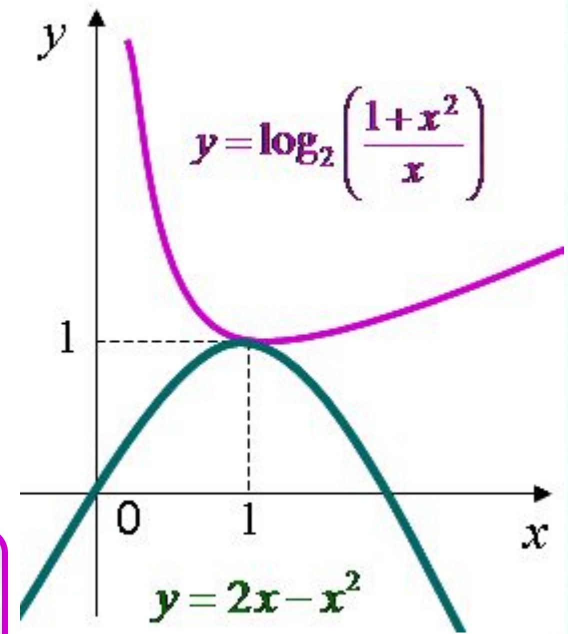
Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,

г. Инсар, Республика Мордовия

Содержание

МЕТОД МАЖОРАНТ

Применим для задач в которых множества значений левой и правой частей уравнения или неравенства имеют единственную общую точку, являющуюся наибольшим значением для одной части и наименьшим для другой. Эту ситуацию хорошо иллюстрирует график.



Как начинать решать такие задачи?

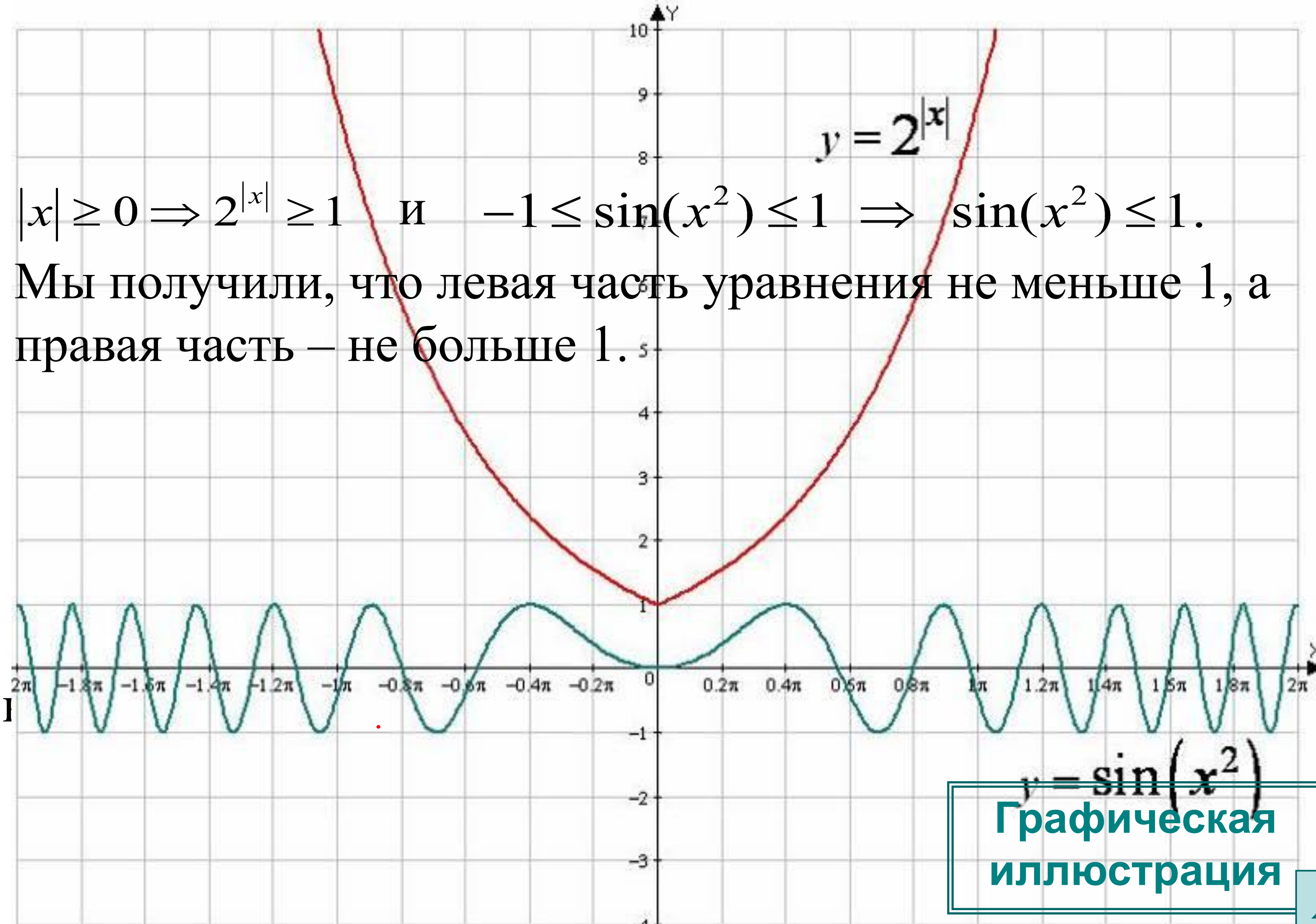
Привести уравнение или неравенство к виду $f(x)=g(x)$

Сделать оценку обеих частей. Если существует число *M*, из области значений такое что $f(x)\le M$ $g(x)\ge M$ **, то**

Решить систему уравнений: $\begin{cases} f(x)=M, \\ g(x)=M. \end{cases}$

Пример 1. **Решите уравнение** $2^{|x|} = \sin\left(x^2\right).$

Решение. Оценим обе части



$|x| \geq 0 \Rightarrow 2^{|x|} \geq 1$ и $-1 \leq \sin(x^2) \leq 1 \Rightarrow \sin(x^2) \leq 1.$

Мы получили, что левая часть уравнения не меньше 1, а правая часть – не больше 1.

Графическая иллюстрация

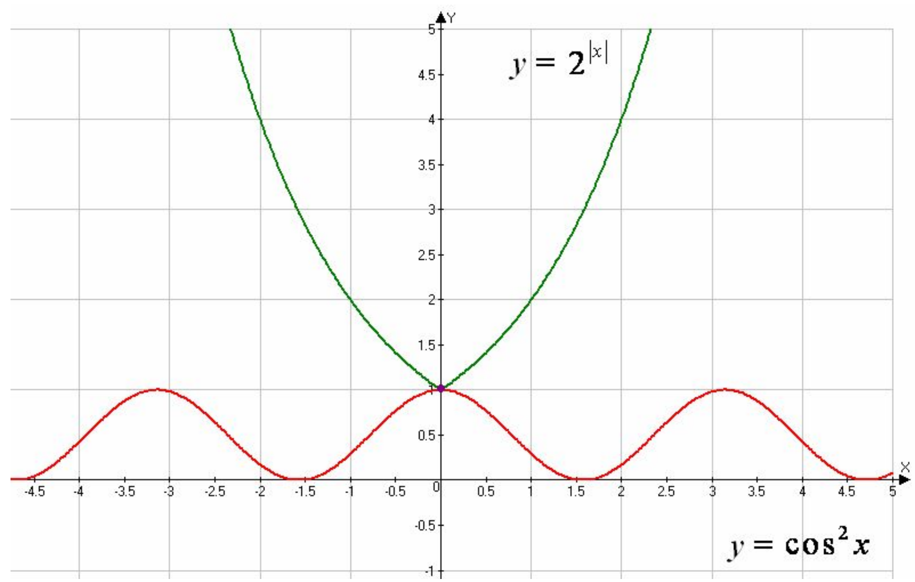
Пример 2. Решить уравнение $2^{|x|} = \cos^2 x.$

Решение: Оценим обе части уравнения.

При всех значениях *x* верны неравенства $2^{|x|} \geq 1$, $\cos^2 x \leq 1.$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0, \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}.$$



При $x = 0$ второе уравнение обращается в верное равенство, значит, $x = 0$ корень уравнения.

Ответ: $x = 0.$

<u>Пример 3.</u> Решить неравенство

$$\cos^2(x+1)\cdot\lg\left(9-2x-x^2\right)\geq 1.$$

Решение.

Сделаем оценку функций, входящих в неравенство.

Очевидно что $-1\leq\cos(x+1)\leq 1\Rightarrow\cos^2(x+1)\leq 1.$

Так как $\lg\left(9-2x-x^2\right)=\lg\left(10-(x+1)^2\right)$, то данная функция принимает наибольшее значение равное 1 при x = -1, значит, $\lg\left(9-2x-x^2\right)\leq 1.$

Следовательно, исходное неравенство выполняется тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1 одновременно.

$$\begin{cases}\cos^2(x+1)=1,\\ \lg\left(9-2x-x^2\right)=1\end{cases};\quad\begin{cases}\cos^2(x+1)=1,\\ 9-2x-x^2=10\end{cases};\quad\begin{cases}\cos^2(x+1)=1,\\ (x+1)^2=0;\end{cases}$$

Получаем x = -1 – единственное решение системы уравнений, а, значит, и данного неравенства.

Ответ: - 1.

<u>Пример 4.</u> Решить уравнение $2^{-\cos x} = \log_\pi x + \log_x \pi.$

Решение. Оценим обе части уравнения.

Так как $-1 \le \cos x \le 1,$ то левая часть уравнения принимает значение от $0{,}5$ до 2 (так как: $2^{-\cos x} \in [2^{-1}; 2^{1}]$).

Для правой части (в силу неравенства для суммы двух взаимно обратных чисел) выполнено

$$|\log_\pi x + \log_x \pi| = \left|\log_\pi x + \frac{1}{\log_\pi x}\right| \ge 2.$$

Поэтому уравнение имеет решения, если и только если одновременно выполнены два условия

$$\begin{cases} 2^{-\cos x} = 2, \\ \log_\pi x + \log_x \pi = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ \log_\pi x + \dfrac{1}{\log_\pi x} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x = -1, \\ (\log_\pi x - 1)^2 = 0. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получаем $x = \pi.$

Ответ: $x = \pi.$

Пример 5. Решить уравнение $\sin x + \sin 9x = 2.$

Решение. Оценим обе части уравнения.

1) Каждое слагаемое левой части уравнения не больше 1, следовательно их сумма будет равна 2, если они принимают своё наибольшее значение.

Значит, уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin 9x = 1 \end{cases}.$

2) Решая первое уравнение системы, находим : $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

3) Подставим найденные значения во второе уравнение:

$$\sin 9x = \sin\left(9 \cdot \frac{\pi}{2} + 18\pi n\right) = 1.$$

Следовательно, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ решение системы.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z.$

<u>Пример 6.</u> Решить уравнение

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1+tg^2 2y\right)\cdot\left(3+\sin 3z\right)=4.$$

Решение. Оценим множители левой части уравнения.

$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\geq 2,$? сумма двух положительных взаимообратных чисел

$\left(1+tg^2 2y\right)\geq 1$? сумма единицы и неотрицательного числа

$\left(3+\sin 3z\right)\geq 2$? $\sin 3z \in [-1;1] \Rightarrow 3+\sin 3z \in [2;4].$

Заметим, что перемножив почленно эти неравенства, получаем:

$$\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1+tg^2 2y\right)\cdot\left(3+\sin 3z\right)\geq 4.$$

Следовательно, левая часть равна правой, лишь при условии:

одновременно: $\cos^2 x=1,\ 1+tg^2 2y=1,\ 3+\sin 3z=2$

Значит, данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}\cos^2 x=1,\\ tg^2 2y=0,\\ \sin 3z=-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\pi m, m\in Z,\\ 2y=\pi k, k\in Z,\\ 3z=-\frac{\pi}{2}+2\pi l, l\in Z.\end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем решения исходного уравнения:

Ответ: $x=\pi m, m\in Z;\ \ y=\frac{\pi}{2}k, k\in Z;\ \ z=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi l, l\in Z.$

Пример 7. Решите уравнение $\cos^2(x\cdot\sin x)=1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}.$

Решение. Для решения уравнения оценим его части:

$\cos^2(x\cdot\sin x)\le 1,$? **cos(α)∈[-1;1] ⇒ cos²(α)∈[0; 1].**

$1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge 1$? **сумма единицы и неотрицательного числа.**

Поэтому равенство возможно только при условии:
$$\begin{cases}\cos^2(x\cdot\sin x)=1\\ 1+\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=1\end{cases}.$$

Сначала решим второе уравнение:

$\log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0,\ \sqrt{x^2+x+1}=1,\ x^2+x+1=1,\ x^2+x=0.$

Корни этого уравнения $x_1=0$ и $x_2=-1.$

Проверим справедливость первого равенства, подставив эти корни.

При $x=0$ получаем: $\cos^2(0\cdot\sin 0)=\cos^2 0=1$ (верное равенство).

При x = -1 имеем: $\cos^2(-1\cdot\sin(-1))=\cos^2(\sin 1)\neq 1$ (неверное равенство).

Итак, данное уравнение имеет единственный корень x = 0.

Ответ: 0.

Пример 8. Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26}=\cos 14\pi x-81a^2-72a-13$ имеет решения. Найдите эти решения.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$4^{(7x-5)^2+1}=3+\cos(14\pi x)-(9a+4)^2.$$

Оценим функции входящие в данное уравнение.

При всех значениях *x* выражение: $(7x-5)^2+1\geq 1 \Rightarrow 4^{(7x-5)^2+1}\geq 4.$

При всех значения *x* выражение: $\cos 14\pi x\leq 1 \Rightarrow 3+\cos 14\pi x\leq 4.$

Очевидно, что $(9a+4)^2\geq 0,$ поэтому $3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2\leq 4.$

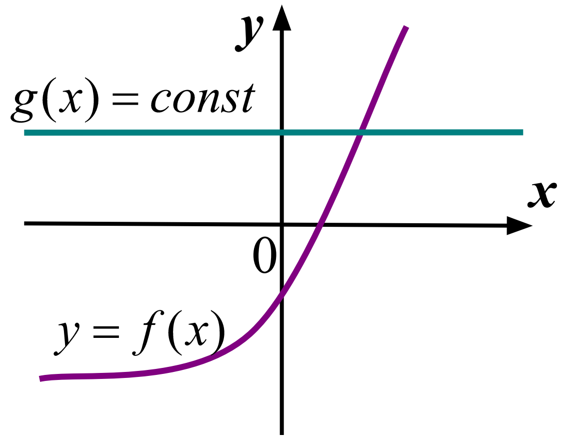
Следовательно, левая часть уравнения не меньше 4, а правая часть – не больше 4. Получаем систему:

$$\begin{cases}4^{(7x-5)^2+1}=4,\\ 3+\cos 14\pi x-(9a+4)^2=4;\end{cases}\qquad \begin{cases}(7x-5)^2=0,\\ \cos 14\pi x=1,\\ (9a+4)^2=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{5}{7},\\ a=-\dfrac{4}{9}.\end{cases}$$

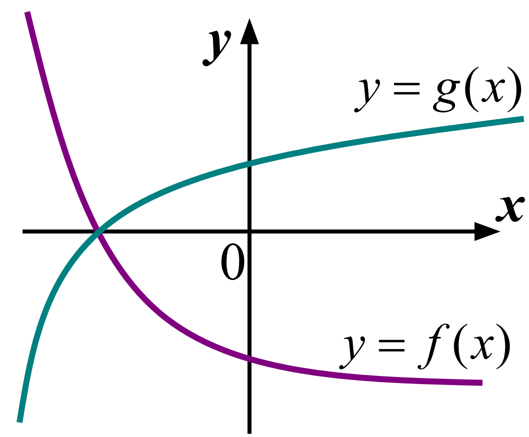
Ответ: $x=\dfrac{5}{7}$ при $a=-\dfrac{4}{9}.$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ

1. **Если в уравнении левая часть возрастающая (или убывающая) функция, а правая константа, то уравнение имеет не более одного корня.**



2. **Если в уравнении левая часть возрастающая (или убывающая) функция, а правая часть убывающая (возрастающая) функция, то данное уравнение имеет не более одного корня.**



Пример 9. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1.$$

Решение:

Заметим, что $x = 1$, является корнем данного уравнения. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух возрастающих функций и, следовательно, сама является возрастающей функцией, принимающей каждое своё значение ровно один раз.

Поэтому других корней данное уравнение не имеет.

Ответ: 1.

Пример 10. Доказать, что уравнение не имеет решений:

1) $\sqrt{x+2} = -2;$ **?**

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

2) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0;$ **?**

Левая часть исходного уравнения определена при $x \ge -1{,}5$, при каждом таком значении x

$\sqrt{2x+3} \ge 0,\ \sqrt{x+3} > 0.$

Следовательно, их сумма всегда больше нуля.

3) $\sqrt{4-x} - \sqrt{x-6} = 2;$ **?**

Находим ОДЗ уравнения: $x \le 4,\quad x \ge 6.$

Не существует такого значения *x,* при котором оба выражения имеют смысл. Поэтому уравнение решений не имеет.

4) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = 2;$ **?**

ОДЗ уравнения: $x \ge 0.$

Заметим, $\sqrt{x+9} \ge 3, \sqrt{x} \ge 0 \Rightarrow$

их сумма не меньше 3.

5) $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+9} = 4.$ **?**

Заметим, $\sqrt{x^2+4} \ge 2, \sqrt{x^2+9} \ge 3 \Rightarrow$

$\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+9} \ge 5 \ne 4.$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

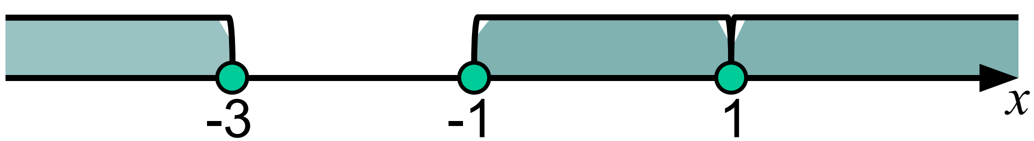
Решить уравнение: $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{2}$

Решение.

Первый радикал определен при $1-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1.$
Второй радикал определен при любых значениях x.

Выражение под третьим радикалом неотрицательно если

$x^2+2x-3\ge 0,$ то есть при $x\le -3$ и $x\ge 1.$



Итак, единственной точкой, в которой определены эти радикалы, является $x=1$. Легко проверить, что это число – корень уравнения.

Ответ: 1.

Решить уравнение

$$\sqrt{x^3+3x^2-16x+\sqrt{2}-1}=-1-2x^2.$$

Решение.

1) Выпишем, условие существования функции, стоящей в левой части:

$$x^3+3x^2-16x+\sqrt{2}-1\geq 0.$$

Решить данное неравенство довольно сложно.

2) Проверим не отрицательность правой части:

$$-1-2x^2\geq 0\Leftrightarrow 2x^2\leq -1.$$

Последнее неравенство решений не имеет.

3) Значит, исходное уравнение тоже не имеет решений, так как левая часть его – неотрицательная функция!

Ответ: $\varnothing$**.**

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВА ОГРАНИЧЕННОСТИ ФУНКЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ЕЁ НАИБОЛЬШЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Укажите наибольшее целое значение функции

$$y = 2\cdot 5^{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1}.$$

Решение.

Данная функция принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда наибольшее значение принимает функция, стоящая в показателе степени: $t = 2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1.$

Преобразуем её: $t = 2 + 3\cos^2 x - 1;\quad t = 3\cos^2 x + 1.$

Так как $\cos^2 x \le 1,$ то наибольшее значение функции $t = 3\cos^2 x + 1$ равно 4. Следовательно, наибольшее значение исходной функции

$y = 2\cdot 5^{2\sin^2 x + 5\cos^2 x - 1}$ равно $2\cdot 5^4 = 1250.$

Ответ: 1250.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧЕТНОСТИ ФУНКЦИИ

<u>Пример.</u> Может ли при каком-нибудь значении параметра *а*, уравнение $2x^6 - x^4 - ax^2 = 1$ **иметь три корня?**

Решение.

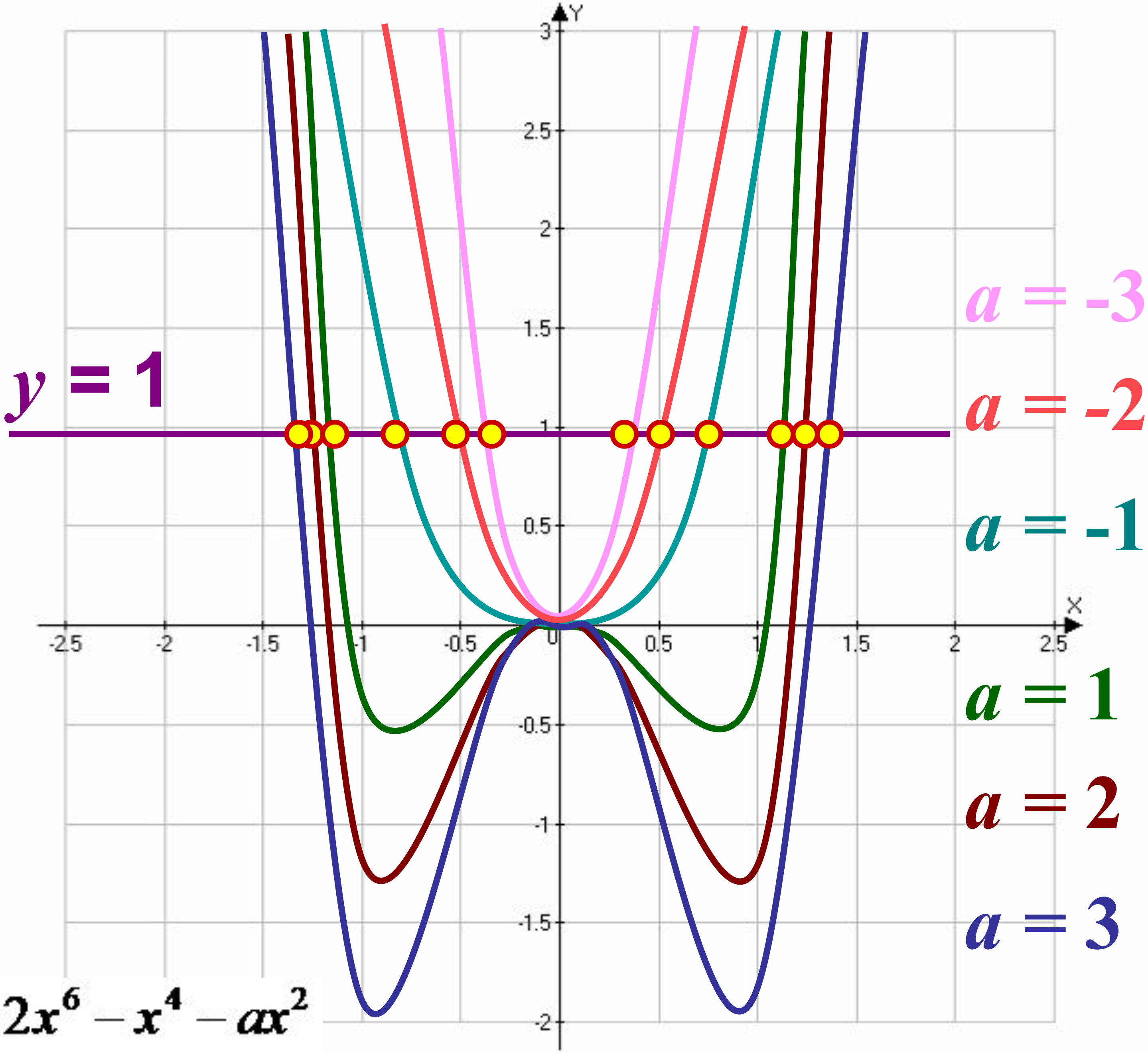
Легко заметить, что при замене *х* на –*х* данное уравнение не изменится, значит, если x_0 является корнем данного уравнения, то число - x_0 также является его корнем, т.е. корни, отличные от нуля, входят в множество решения уравнения «парами».

Так как число 0 не является корнем уравнения, то уравнение имеет четное число корней.

Ответ: не может.

Графическая иллюстрация

готовимся к ЕГЭ



$$y = 2x^6 - x^4 - ax^2$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧЕТНОСТИ ФУНКЦИИ

Может ли при каком-нибудь значении параметра *а*, уравнение

$$2^x + 2^{-x} = ax^4 + 2x^2 + 2$$

иметь нечетное число корней?

Решение.

Так как при замене *x* на –*x* данное уравнение не изменится, то множество его корней вместе с каждым корнем содержит противоположный корень. Следовательно, уравнение имеет четное число корней, отличных от нуля. Проверка показывает, что 0 – корень, значит, данное уравнение имеет нечетное число корней.

Ответ: да.

Литература

1. Математика. ЕГЭ. Контрольные измерительные материалы. Методические указания при подготовке. Тестовые задания: Учебно – методическое пособие / Л.Д. Лаппо, А.В. Морозов, М.А. Попов. – М.: издательство «Экзамен», 2004, 2006, 2008

2. Математика. ЕГЭ. Контрольные измерительные материалы. Варианты тестов. Министерство образования РФ. – М.: Центр тестирования Минобразования России, 2002. / Денищева Л.О. и др.

3. Математика — абитуриенту. Автор: Ткачук В. В. Издательство: 2007. Год: МЦНМО. Страниц: 976

Для создания шаблона презентации использовалась картинка

http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-05/1242475156_2.jpg