Нормальные формы формул алгебры высказываний

Отношение равносильности $\cong$ является отношением эквивалентности на множестве всех формул $\boldsymbol{F}_{\mathrm{AB}}$, которое разбивает это множество на классы эквивалентности $[\Phi] = \{\Psi \in F_{AB} : \Phi \cong \Psi\}$, определяемые формулами $\Phi \in F_{AB}$.

Из лемм следует, что для каждой формулы $\Phi \in F_{AB}$ можно указать равносильные ей формулы специального вида, содержащие только символы логических операций $\neg, \wedge, \vee$.

<u>Определение.</u> *Литерой* называется пропозициональная переменная X или ее отрицание $\neg X$. Для обозначения литеры используется символ X^{α}, где $\alpha \in \{0,1\}$ и по определению $X^1 = X$, $X^0 = \neg X$.

<u>Определение.</u> *Конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*) называется литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер.

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все пропозициональные переменные рассматриваемой формулы.

Определение. *Конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно КНФ) называется дизъюнкт или конъюнкция дизъюнктов. *Дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ) называется конъюнкт или дизъюнкция конъюнктов.

При этом КНФ (соответственно, ДНФ) называется *совершенной*, если совершенны все ее дизъюнкты (соответственно, конъюнкты).

Теорема 1. Любая формула равносильна некоторой ДНФ и некоторой КНФ.

Алгоритм приведения формулы Φ к ДНФ (соответственно, к КНФ):

1) выражаем все входящие в формулу Φ импликации и эквивалентности через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;

2) согласно законам де Моргана все отрицания, стоящие перед скобками, вносим в эти скобки и сокращаем все двойные отрицания;

3) согласно законам дистрибутивности преобразуем формулу так, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше дизъюнкций (соответственно, чтобы все дизъюнкции выполнялись раньше конъюнкций).

<u>Теорема 2.</u> Любая выполнимая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigvee_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} (X_1^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{\alpha_n}),$$

где дизъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 1$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) формулы Φ.

Теорема 3. Любая опровержимая формула $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$ равносильна формуле вида

$$\bigwedge_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)} (X_1^{1-\alpha_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-\alpha_n}),$$

где конъюнкция берется по всем упорядоченным наборам $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n$, удовлетворяющим условию $F_\Phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0$.

Такая формула определяется однозначно (с точностью до порядка членов конъюнкций и дизъюнкций) и называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) формулы Φ.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ формулы $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$:

1. Составить истинностную таблицу формулы Ф и добавить два столбца «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $\lambda(X_1) = k_1,\ldots,\lambda(X_n) = k_n$ значение $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ формулы Ф равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записываем конъюнкт $X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» делаем прочерк. При этом $X_i^1 = X_i$ и $X_i^0 = \neg X_i$.

3. Если при значениях $\lambda(X_1)=m_1,\ldots,\lambda(X_n)=m_n$ истинностное значение $\lambda(\Phi(X_1,\ldots,X_n))$ формулы Φ равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записываем дизъюнкт $X_1^{1-m_1}\vee\ldots\vee X_n^{1-m_n}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» делаем прочерк.

X_1	…	X_n	…	$\Phi(X_1,\ldots,X_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	…	…	…	…
k_1	…	k_n	…	1	$X_1^{k_1}\wedge\ldots\wedge X_n^{k_n}$	—
…	…	…	…	…	…	…
m_1	…	m_n	…	0	—	$X_1^{1-m_1}\vee\ldots\vee X_n^{1-m_n}$
…	…	…	…	…	…	…

4. СДНФ формулы Ф равна дизъюнкции полученных совершенных конъюнктов: $(X_1^{k_1} \wedge \ldots \wedge X_n^{k_n}) \vee \ldots$.

5. СКНФ формулы Ф равна конъюнкции полученных совершенных дизъюнктов: $(X_1^{1-m_1} \vee \ldots \vee X_n^{1-m_n}) \wedge \ldots$.

Логическое следование формул

Определение. Формула Φ называется *логическим следствием формул* $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$, если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных $X_1,\ldots,X_n$ конкретных высказываний $A_1,\ldots,A_n$ из истинности высказываний $\Phi_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,\Phi_m(A_1,\ldots,A_n)$ следует истинность высказывания $\Phi(A_1,\ldots,A_n)$.

Символическое обозначение $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ - называется *логическим следованием*.

Формулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ называются *посылками* и формула Φ – *следствием* логического следования $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$.

Определение. Множество формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула Φ. Символически это записывается $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models$.

В противном случае множество формул $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ называется *выполнимым*.

Лемма (Транзитивность логического следования). Если $\Phi_1,\dots,\Phi_m \models \Phi$ и для любого значения $1 \le i \le m$ выполняется $\Psi_1,\dots,\Psi_k \models \Phi_i$, то $\Psi_1,\dots,\Psi_k \models \Phi$.

Лемма (Критерии логического следования). Условие $\Phi_1,\ldots,\Phi_m \models \Phi$ равносильно каждому из следующих условий:

a) $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \models \Phi$,

b) $\models \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi$,

c) $\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models$.

В частности, $\Phi \models \Psi$ равносильно $\models \Phi \Rightarrow \Psi$. Отсюда также следует, что $\Phi = \Psi$ равносильно тому, что $\Phi \models \Psi$ и $\Psi \models \Phi$.

Основные правила логического следования:

1) *правило отделения* (или правило *модус понненс* – от латинского modus ponens)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi;$$

2) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg\Psi \Rightarrow \neg\Phi;$$

3) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3;$$

4) *правило перестановки посылок*

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3).$$

Вывод: Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

Методы проверки тождественной истинности формул

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод.
2. Алгебраический метод.
3. Алгоритм Квайна.
4. Алгоритм редукции.
5. Метод семантических таблиц.
6. Метод резолюций.

Метод резолюций в алгебре высказываний

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул;

д) **проверка противоречивости множества дизъюнктов**.

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. выполнимы, то выполнима $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Φ из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n$, что:

1) $\Phi_n = \Phi$;
2) каждая из формул Φ_i $(i=1,\dots,n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i = \mathrm{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1 \le j,k \le i$.

Теорема. Множество дизъюнктов $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_m, \neg\Phi \models,$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$.

Тогда логическое следование $\Phi_1, \dots, \Phi_n \vDash \Phi$ равносильно существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$..

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$:

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V \quad \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы:

$$\Psi = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y .$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\} .$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.