

Методы разложения многочленов на множители.

**«Мало иметь хороший ум,
главное – хорошо его
применять».**

Р.Декарт.

Методы разложения многочленов на множители.

- Вынесение множителя за скобку
- Использование формул сокращённого умножения
- Способ группировки
- Метод выделения полного квадрата
- Схема Горнера
- Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

Вынесение множителя за скобку.

Из распределительного закона непосредственно следует, что

$$ac + bc = c(a + b).$$

Этим можно воспользоваться для вынесения множителя за скобки.

Пример:

Разложить многочлен на множители $12y^3 - 20y^2$.

Решение

$$\text{Имеем: } 12y^3 - 20y^2 = 4y^2 \cdot 3y - 4y^2 \cdot 5 = 4y^2(3y - 5).$$

Ответ.

$$4y^2(3y - 5).$$

Использование формул сокращённого умножения.

Вспомните эти формулы:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Пример:

Разложить на множители многочлен $x^4 - 1$.

Решение

Имеем: $x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1^2 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x - 1)(x + 1) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

Ответ. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$.

Способ группировки.

Этот способ заключается в том, что слагаемые многочлена можно сгруппировать различными способами на основе сочетательного и переместительного законов.

Пример:

Разложить на множители многочлен $x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2$.

Решение

$$\begin{aligned}x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2 &= \\ &= (x^3 - 3x^2y) - (4xy - 12y^2) = \\ &= x^2(\underline{x - 3y}) - 4y(\underline{x - 3y}) = \\ &= (x - 3y)(x^2 - 4y).\end{aligned}$$

Ответ. $(x - 3y)(x^2 - 4y)$.

Метод разложения квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Пример:

Разложить на множители квадратный
трехчлен $x^2 - 6x + 5$

Решение

$$x^2 - 6x + 5 =$$

(решим уравнение: $x^2 - 6x + 5 = 0$, по т. Виета
 $x = 5$, $x = 1$)

$$= (x - 5)(x - 1)$$

Ответ. $(x - 5)(x - 1)$.

Пример 6. Разложить на множители многочлен $16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4$.

$$16x^7 - 72x^6 + 108x^5 - 54x^4 =$$

$$= 2x^4 (8x^3 - 36x^2 - 54) =$$

$$= 2x^4 (\underline{(2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot (2x) \cdot 3^2 - 3^3})$$

$$= 2x^4 (2x - 3)^3$$

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$2x^2 - 5xy + 2y^2.$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5xy + 2y^2 &= 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 2x(x - 2y) - y(x - 2y) = \\ &= (x - 2y)(2x - y). \end{aligned}$$

Многочлен $p(x; y)$ называют однородным многочленом n -й степени, если сумма показателей степеней переменных в каждом члене многочлена равна n . Если $p(x; y)$ — однородный многочлен, то уравнение $p(x; y) = 0$ называют однородным уравнением.

П.....

Пример 4. Решить уравнение $x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0$.

$(0; 0)$ является решением однородного уравнения.

$$x^3 + 4xy^2 - 5y^3 = 0 \quad | \quad x^3;$$

$$1 + 4\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 5\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0. \quad z = \frac{y}{x}$$

$$1 + 4z^2 - 5z^3 = 0$$

$$z - 1 = 0$$

$$5z^2 + z + 1 = 0$$

$$5z^3 - 4z^2 - 1 = 0;$$

$$z = 1$$

$D = 1 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = -19$ — нет
корней

$$(5z^3 - 5z^2) + (z^2 - 1) = 0;$$

$$\frac{y}{x} = 1 \quad y = x.$$

$$5z^2(z - 1) + (z - 1)(z + 1) = 0;$$

$$(z - 1)(5z^2 + z + 1) = 0.$$

Ответ: $(t; t)$, где t — любое действительное число.

Теорема 4. Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Если целое число a является корнем многочлена $p(x)$, то a — делитель свободного члена многочлена $p(x)$.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24. \quad p(1) = 12 \neq 0, p(-1) = 30 \neq 0, p(2) = 0.$$

$x = 2$ — корень многочлена $p(x)$

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x - 2)q(x)$$

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

$$p(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 24$$

$$p(x) - p(2) = (x^3 - 2^3) - 3(x^2 - 2^2) - 10(x - 2).$$

$$p(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 3(x - 2)(x + 2) - 10(x - 2) =$$

$$= (x - 2)((x^2 + 2x + 4) - 3(x + 2) - 10) = (x - 2)(x^2 - x - 12). = (x - 2)(x - 4)(x + 3).$$

$$2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 = 0.$$

$$x(2x^2 - 5xy + 2y^2) = 0$$

$$x = 0,$$

$(0; t)$, где t —

любое действительное число

$$\text{либо } 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \quad \Big| \quad x^2$$

$$2 - 5\left(\frac{y}{x}\right) + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \quad z = \frac{y}{x}$$

$$2z^2 - 5z + 2 = 0,$$

$$z_1 = 2, \quad z_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{y}{x} = 2$$

$$y = 2x,$$

$(t; 2t)$,

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2y$$

$(2t; t)$

Ответ: $(0; t)$, $(t; 2t)$, $(2t; t)$, где t — любое действительное число.

Систему уравнений $\begin{cases} p(x; y) = a, \\ q(x; y) = b \end{cases}$ называют однородной, если

$p(x; y), q(x; y)$ — однородные многочлены одной и той же степени, а a и b — действительные числа.

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x^3 + y^3) = 2, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$$2(x^3 + y^3) = x^2y + 2xy^2 + y^3, \text{ т. е. } 2x^3 - x^2y - 2xy^2 + y^3 = 0. \quad | \quad x^3$$

Если $x = 0$, то $y = 0$; пара $(0; 0)$ — решение однородного уравнения. Если $x \neq 0$,

$$2 - \left(\frac{y}{x}\right) - 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 0. \quad z = \frac{y}{x} \quad z^3 - 2z^2 - z + 2 = 0$$

$$z^2(z - 2) - (z - 2) = 0; (z - 2)(z^2 - 1) = 0; \quad z_1 = 2, z_2 = 1, z_3 = -1.$$

либо $\frac{y}{x} = 2$, т. е. $y = 2x$, либо $\frac{y}{x} = 1$, т. е. $y = x$, либо

$$\frac{y}{x} = -1, \text{ т. е. } y = -x.$$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = 2. \end{cases}$$

$$y = 2x, \quad y = x, \quad y = -x.$$

В итоге приходим к совокупности трех систем, каждая из которых без труда решается методом подстановки:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = x, \\ x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x, \\ x^3 + y^3 = 1. \end{cases}$$

$$1) \quad \begin{cases} y = 2x, \\ x^3 + (2x)^3 = 1 \end{cases} \quad 9x^3 = 1 \quad x^3 = \frac{1}{9} \quad x^3 = \frac{3}{27} \quad x = \sqrt[3]{\frac{3}{27}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$$
$$y = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

Аналогично 2 и 3 система

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}; \frac{\sqrt[3]{4}}{2} \right); \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{3}}{3} \right).$$

Теперь поговорим о симметрических многочленах и об использовании их при решении систем уравнений. Многочлен $p(x; y)$ называют симметрическим, если он сохраняет свой вид при одновременной замене x на y и y на x . Например, симметрическим является двучлен $x^2y + xy^2$. В самом деле, при одновременной замене x на y и y на x получится двучлен $y^2x + yx^2$, но это то же самое, что $x^2y + xy^2$. Другие примеры симметрических многочленов:

$$xy, x + y, x^2 + y^2, x^3 + y^3, x^4 + y^4, 2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3$$

и т. д.

Теорема. *Любой симметрический многочлен $p(x; y)$ можно представить в виде многочлена от xy и $x + y$.*

Например,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy;$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (3x^2y + 3xy^2) = \\ &= (x + y)^3 - 3xy(x + y); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2; \\ &2x^3y + 3x^2y^2 - x^4 - y^4 + 2xy^3 = \\ &= 2xy(x^2 + y^2) - (x^4 + y^4) + 3(xy)^2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Введем две новые переменные: $x + y = u$, $xy = v$.

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

$$\begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17, \\ u + v = 5. \end{cases} \quad \begin{cases} v = 5 - u. \\ u^3 - 3u(5 - u) + (5 - u)^3 = 17; \end{cases}$$

$$u^3 - 15u + 3u^2 + 125 - 75u + 15u^2 - u^3 = 17;$$

$$18u^2 - 90u + 108 = 0:$$

$$u^2 - 5u + 6 = 0; \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

$$v_1 = 3, \quad v_2 = 2.$$

Осталось решить две простые системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система не имеет действительных решений, из второй находим два решения $(1; 2); (2; 1)$.

Ответ: $(1; 2); (2; 1)$.

Метод неопределенных коэффициентов.

Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определяются путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной. Теоретической основой метода являются следующие утверждения.

Пример.

Разложить на множители многочлен $3x^3 - x^2 - 3x + 1$.

Решение.

Поскольку многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратичного сомножителей, то будем искать многочлены

$x - p$ и $ax^2 + bx + c$ такие, что справедливо равенство

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - p)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b - ap)x^2 + (c - bp)x - pc$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях этого равенства, получаем систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных коэффициентов:

$$a=3$$

$$b-ap=-1$$

$$c-bp=-3$$

$$-pc=1.$$

Решая эту систему, получаем: $a = 3$, $p = -1$, $b = 2$, $c = -1$.

Итак, многочлен $3x^3 - x^2 - 3x + 1$ разлагается на множители:

$$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(3x^2 + 2x - 1).$$

Ответ. $(x - 1)(3x^2 + 2x - 1)$.

Схема Горнера.

Если $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $g(x) = x - c$, то при делении $f(x)$ на $g(x)$ частное $q(x)$ имеет вид:

$$q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1},$$

где $b_0 = a_0$, $b_k = cb_{k-1} + a_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$ Остаток r находится по формуле $r = cb_{n-1} + a_n$

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
c	$b_0 =$ $= a_0$	$b_1 =$ $= cb_0 + a_1$	$b_2 =$ $= cb_1 + a_2$		$b_{n-1} =$ $= cb_{n-2} + a_{n-1}$	$r = f(c) =$ $= cb_{n-1} + a_n$

Пример 1

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$$

Решение.

По схеме Горнера корнями данного многочлена могут быть числа $\pm 1, \pm 2, \pm 3,$

1	1	-2	-5	6	0
1	1	-1	6	0	
-2	1	-3	0		
3	1	0			

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 1$$

$$x_3 = -2 \qquad x_4 = 3$$

$x = 1$ – корень кратности 2

Таким образом, разложение данного многочлена на множители имеет вид

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x - 1)^2 (x + 2) (x - 3)$$

Ответ. $(x - 1)^2 (x + 2) (x - 3)$

Г азложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.

Пример:

$$\underline{8x^4} + \underline{x^3} + 64x + 8$$

Решение.

Применим методы группировки, вынесения общего множителя за скобки и формулы сокращенного умножения:

$$8x^4 + x^3 + 64x + 8 = x^3(8x) + 8(8x + 1) = (8x + 1)(x^3 + 8) = (8x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

Ответ. $(8x + 1)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$