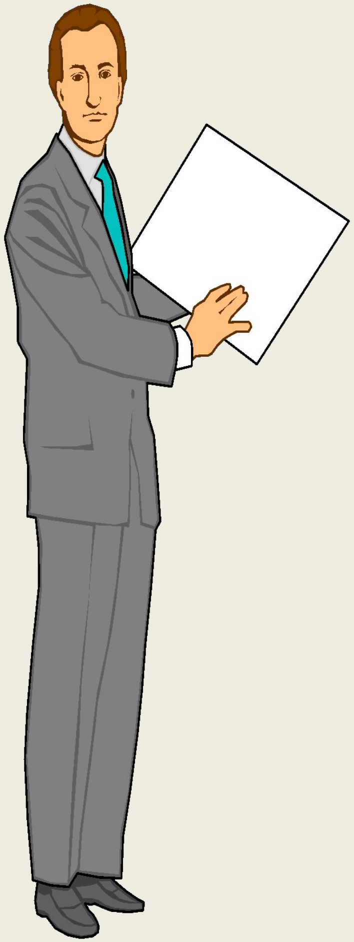
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа №30 имени А.И.Колдунова

Примеры с параметрами и их решения

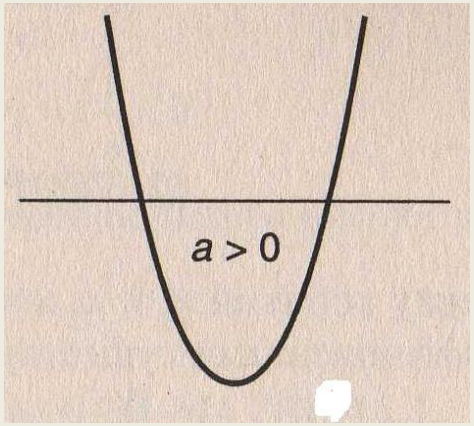
Подготовила:
учитель математики
МОУ сош №30 имени А.И.Колдунова
Кутоманова Е.М.
2015-2016 учебный год



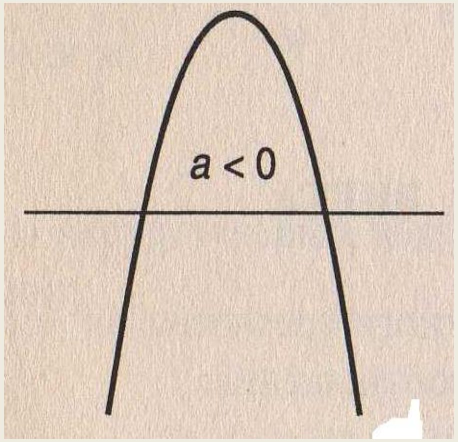
- Самые трудные задания, с которыми приходится сталкиваться учащимся, - это задания с параметром.

- Цель данной презентации: научить учащихся подбирать необходимые приёмы решения заданий с параметром.

Определение квадратного трёхчлена



Квадратным трёхчленом называется выражение: $f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$).

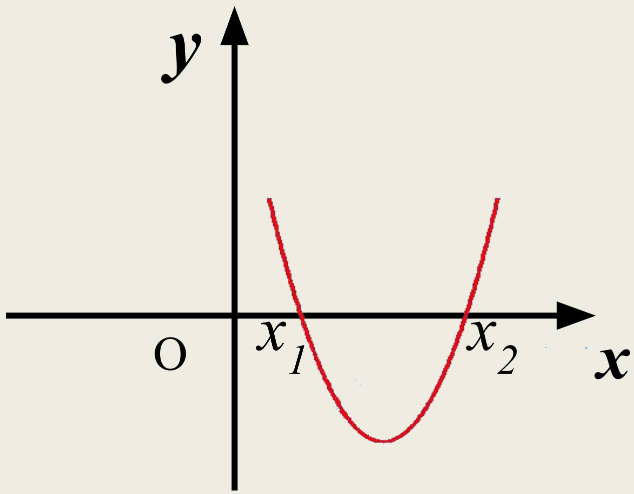


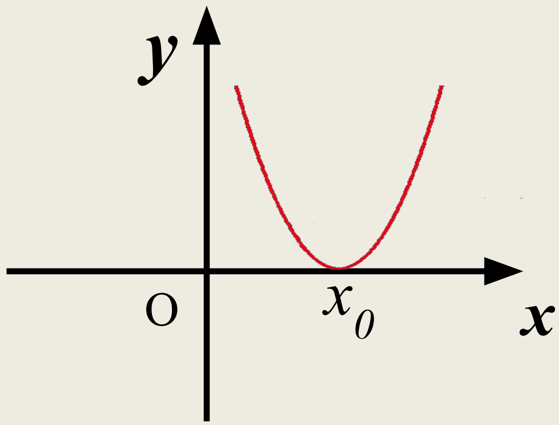
Графиком соответствующей функции является парабола, ветви которой

при $a>0$ направлены вверх,

при $a<0$ – вниз.

Расположение параболы в системе координат



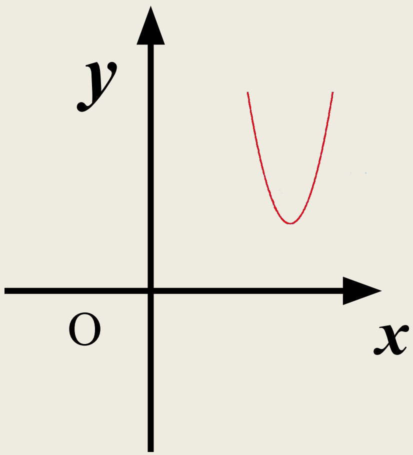


В зависимости от дискриминанта D (D=b²-4ac) возможны различные случаи расположения параболы по отношению к оси абсцисс Ox:

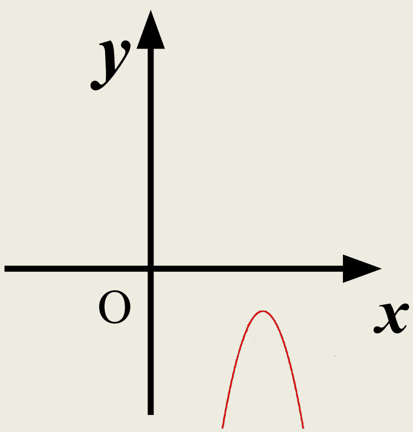
- приD>0 существуют две различные точки пересечения параболы с осью Ox;
- При D=0 эти точки совпадают;

- При $D<0$ точек пересечения с осью Ох нет.

Причём



- если $a>0$, то график лежит выше оси Ох,



- если $a<0$, то график лежит ниже оси Ох.
- Координаты вершины параболы:

$x_в = -в:2a$,

$y_в = -(4ac - в^2):4a$.

Теорема Виета

Между корнями x_1 и x_2 квадратного трёхчле6на $ax^2 + вx + c$ и коэффициентами существует зависимость $x_1 + x_2 = -в:2a$, $x_1 \cdot x_2 = c:a$

- *Теорема 1.*

  Чтобы корни квадратного трёхчлена были действительными и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

  $D = в^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 \cdot x_2 = c:a > 0$,

  при этом оба корня будут положительными,

  если $x_1 + x_2 = -в:2a > 0$,

  и оба корня будут отрицательны,

  если $x_1 + x_2 = -в:2a < 0$.

- Теорема 2

  Чтобы корни квадратного трёхчлена были действительными и имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнение следующих соотношений:

  $D = в^2 - 4ac \geq 0$, $x_1 \cdot x_2 = c:a < 0$,

  при этом

  если $x_1 + x_2 = -в:2a > 0$,

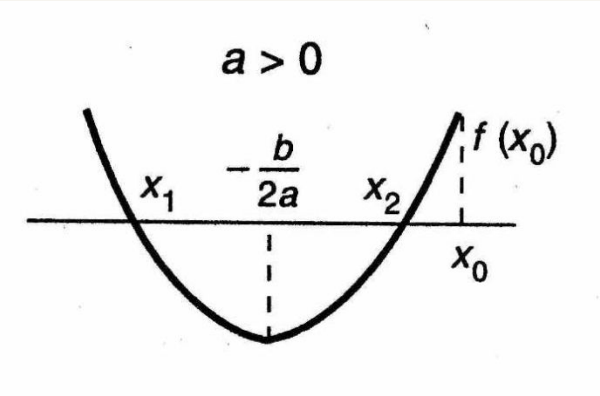
  то положительный корень имеет больший модуль,

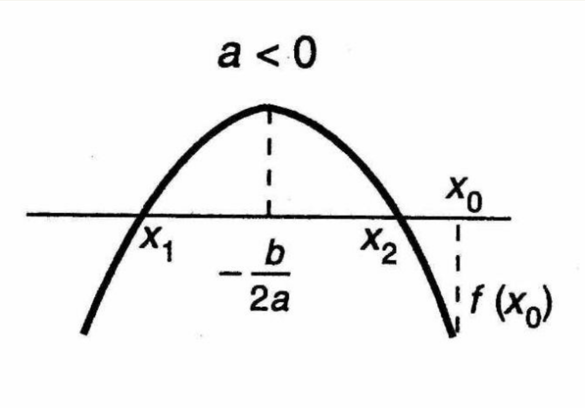
  если $x_1 + x_2 = -в:2a < 0$,

  то отрицательный корень имеет больший модуль.

❖*Теорема 3*

Для того, чтобы оба корня квадратного трёхчлена были меньше, чем число x_0 (т.е. лежали на координатной прямой левее точки x_0), необходимо и достаточно выполнение условий:



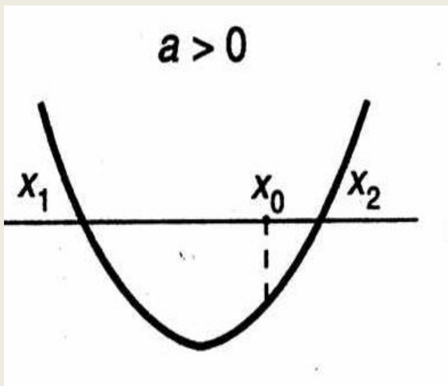


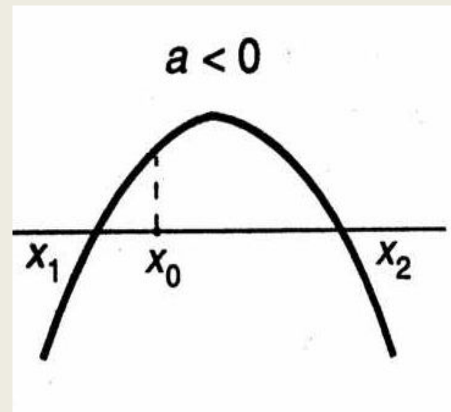
$$\begin{cases} \text{при } a>0, \\ D\geq 0, \\ -в:2a< x_0, \\ f(x_0)>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{при } a<0, \\ D\geq 0, \\ -в:2a< x_0, \\ f(x_0)<0. \end{cases}$$

❖*Теорема 4*

Чтобы один из корней квадратного трёхчлена был меньше, чем число x_0 , а другой больше числа x_0 ,(т.е. точка x_0 лежала бы между корнями), необходимо и достаточно выполнение условий:



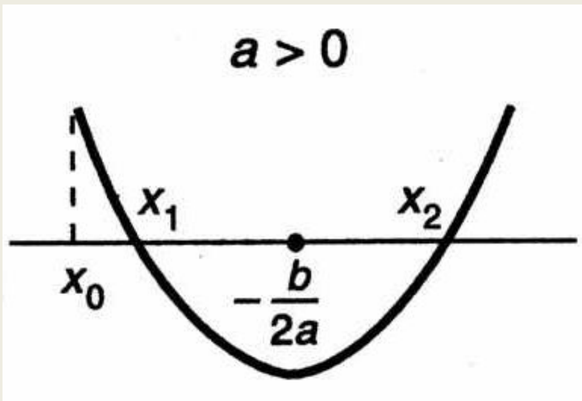


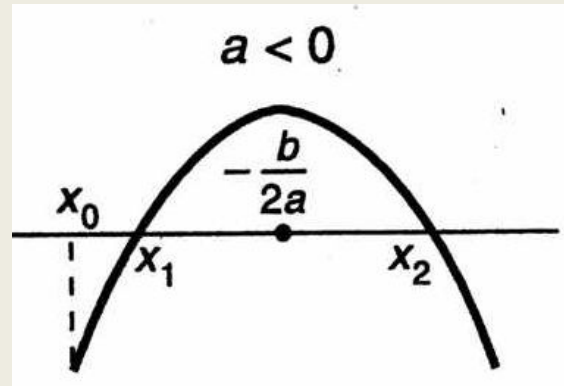
п ı a>0,
f( )<0,
D 0.

п и a<0,
f)>0,
I 0.

❖Теорема 5

Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были больше, чем число x_0 (т.е. лежали на координатной прямой правее числа x_0), необходимо и достаточно выполнение условий:



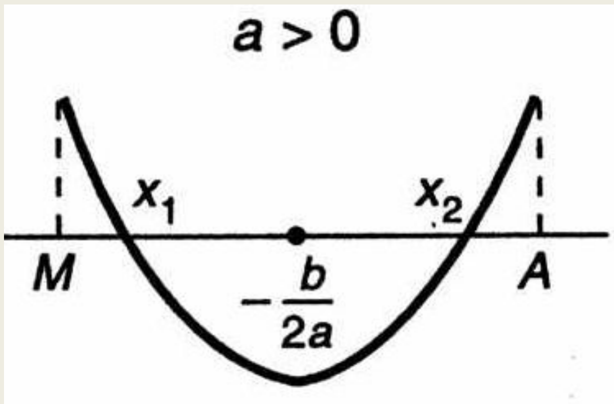


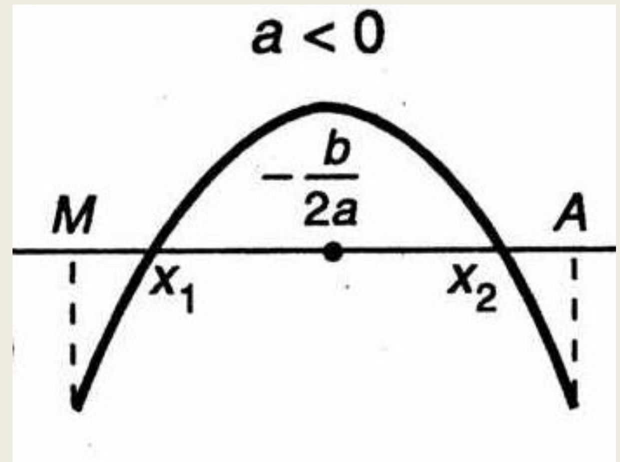
ı a>0,
0,
$2a > x_0$,
$_0)>0$.

и a>0,
0,
$2a > x_0$,
$_0)<0$.

✔Следствие 1

Чтобы оба корня квадратного трёхчлена были больше числа M и меньше числа A (M<A), т.е. лежали в интервале между M и A, необходимо и достаточно выполнение условий:



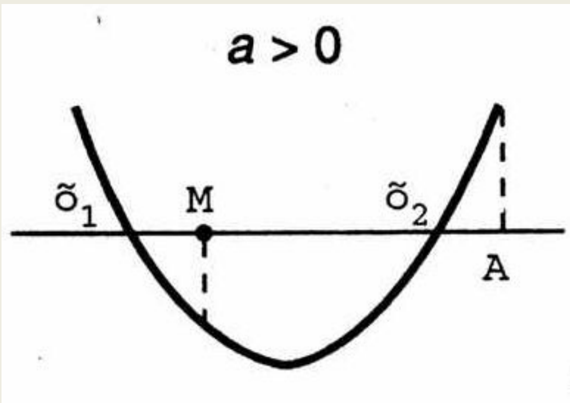


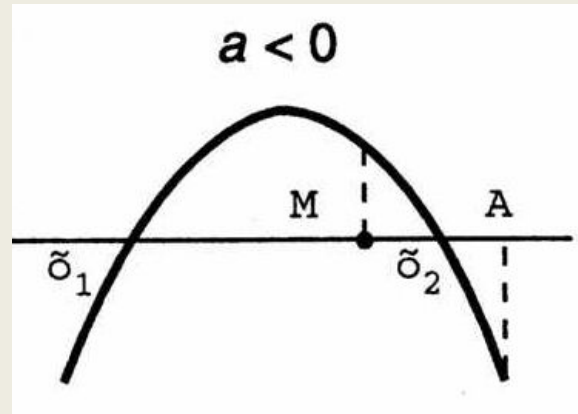
и a>0,
0,
)>0,
)>0.

и a<0,
0,
)<0,
) <0.

✔Следствие 2

Чтобы только больший корень квадратного трёхчлена лежал в интервале MA (M<A), необходимо и достаточно выполнение условий:



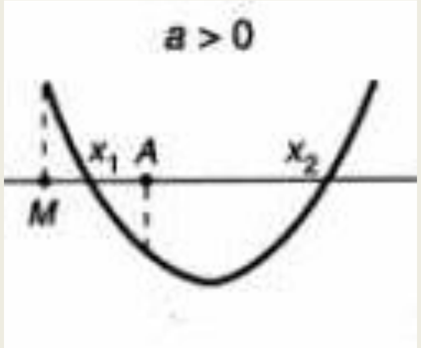


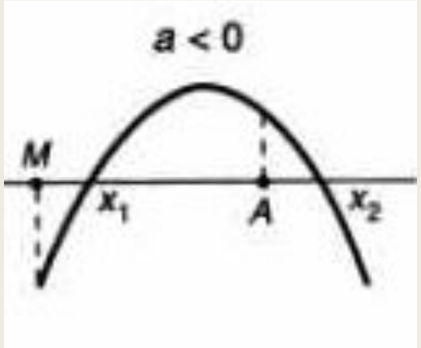
п и a>0,
f)>0,
f)<0.

и a<0,
)<0,
1) >0.

✔Следствие 3

Чтобы только меньший корень квадратного трёхчлена лежал в интервале МА (М<А), необходимо и достаточно выполнение условий:



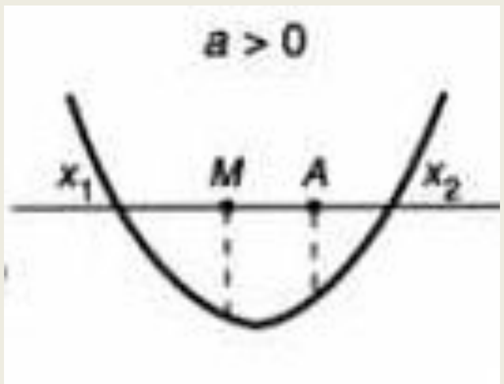


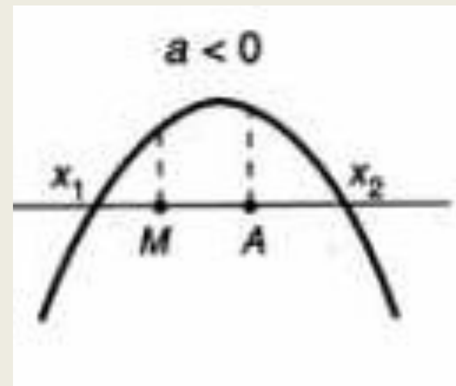
и a>0,
A)<0,
M)>0.

и a<0,
)>0,
M)<0.

Следствие 4

Чтобы один корень квадратного трёхчлена был меньше числа M, а другой больше числа A (M<A), т.е. интервал MA целиком лежал внутри интервала x_1x_2 , необходимо и достаточно выполнение условий:





и a>0,
A)<0,
M)<0.

и a<0,
)>0,
M)>0.

Замечание:

Во всех вышеперечисленных соотношениях $f(x_0)$ *представляет собой выражение* $ax_0^2+bx_0+c$

Применение теорем и следствий к решению задач

№1При каких действительных а корни уравнения $x^2 -3ax + a^2 = 0$ таковы, сумма их квадратов равна 1,75?

Решение.

1.Заметим, что

$$a^2 + 2ав + в^2 = (a + в)^2,$$

$$a^2 + в^2 = (a + в)^2 - 2ав.$$

2.По теореме Виета:

$x_1 + x_2 = 3a$, $x_1 \cdot x_2 = a^2$.

3. $x_1^2 + x_2^2 = 1{,}75$;

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 1{,}75$,

$(3a)^2 - 2a^2 = 1{,}75$,

$9a^2 - 2a^2 = 1{,}75$,

$7a^2 = 1{,}75$,

$a^2 = 0{,}25$,

$a = \pm 0{,}5$.

№2 При каких значениях а сумма квадратов корней уравнения x^2-ах+а-1=0 будет наименьшей.

Решение.

1. По теореме Виета:

   $x_1 + x_2 = a, x_1 \cdot x_2 = a-1.$

2. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 =$

   $= a^2 - 2(a-1) =$

   $= a^2 - 2a + 2 =$

   $= a^2 - 2a + 1 + 1 =$

   $= (a-1)^2 + 1,$

   Сумма корней уравнения будет наименьшей при а-1=0, т.е. при а=1.

№3 При каких значениях a корни квадратного трёхчлена $(2-a)x^2-3ax+2a$ действительны и оба больше 0,5?

1.Используя теорему 5, получим две системы неравенств:

а) $$\begin{cases} 2-a>0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geq 0, \\ 3a:2(2-a)>0{,}5, \\ 0{,}25\cdot(2-a)-3a\cdot 0{,}5+2a>0. \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 2-a<0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geq 0, \\ 3a:2(2-a)>0{,}5, \\ 0{,}25\cdot(2-a)-3a\cdot 0{,}5+2a<0. \end{cases}$$

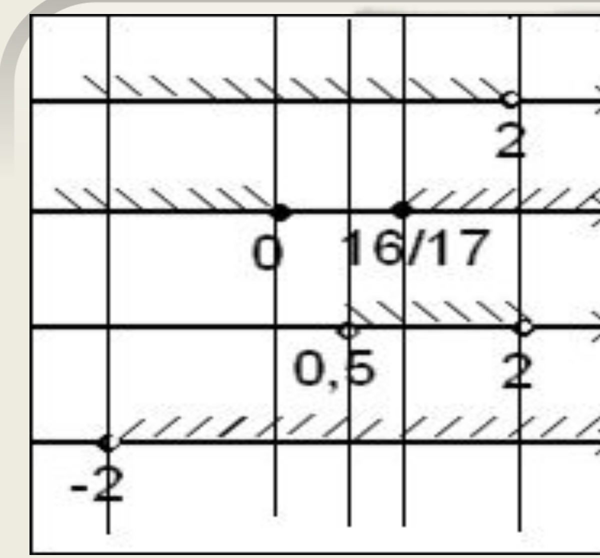
Решим систему а:

$$\begin{cases} >-2, \\ a^2 - 16a \ge 0, \\ :(2-a) > 1, \\ -0{,}25a - 1{,}5a + 2a > 0; \end{cases}$$

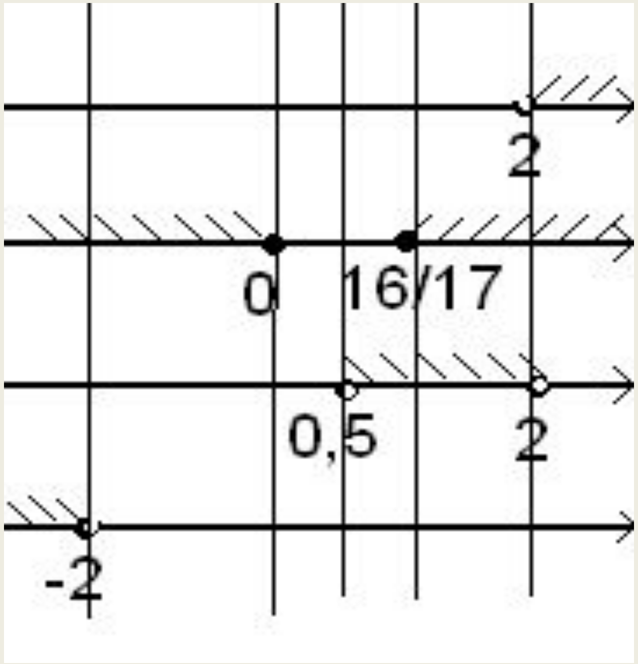
$$\begin{cases} 2, \\ 17a-16) \ge 0, \\ -1):(2-a) \ge 0, \\ 5a + 0{,}5 > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2, \\ 7a-16) \ge 0, \\ -1):(a-2) < 0, \\ 2. \end{cases}$$

$$\frac{16}{17} \le x \le 2$$



Решим систему б:



2,

7a-16)≥0,

a-1):(a-2) >0,

-2.

решения нет.

Ответ: $\frac{16}{17} \leq x \leq 2$

№4 Найти все те значения параметра к, при которых оба корня квадратного уравнения x^2-6кх+(2-2к+9к^2)=0 действительны и больше, чем 3.

Решение.

1. а=1>0.
2. Применяя теорему 5, получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 0, \\ 2a>3, \\ >0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2-2к+9к^2) \geq 0, \\ 3, \\ 3к+ 2-2к+9к^2 >0, \end{cases}$$

+2к≥0,

1,

к-1)(к-11/9)>0,

≥1,

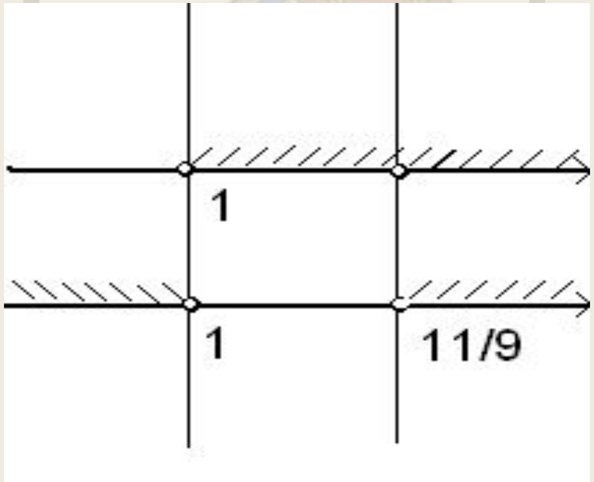
>1,

-1)(к-11/9)>0,

>1,

-1)(к-11/9)>0,

$\kappa \quad \frac{11}{9}$



№5 Найти все те значения параметра с, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2+4cx+(1-2c+4c^2)=0$ действительны и меньше, чем -1.

Решение.

1. $a=1>0$,

2. Применяя теорему 3, составим систему:

$0,$

$2a<-1,$

$)>0,$

$- (1-2c+4c^2) \geq 0,$

$<-1,$

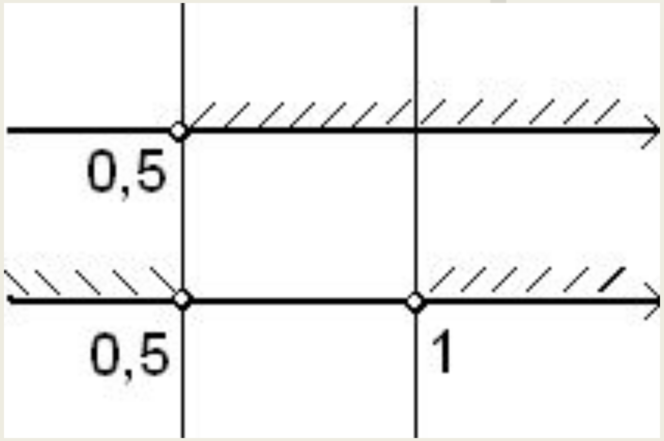
$c+ (1-2c+4c^2) >0,$

$$\begin{cases} 2c-1 \geq 0, \\ c>0{,}5, \\ 2c^2-3c+1>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \geq 0{,}5, \\ c>0{,}5, \\ 2(c-1)(c-0{,}5) >0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c>0{,}5, \\ (c-1)(c-0{,}5) >0, \end{cases}$$

$c>1.$



№6 При каких действительных значениях к оба корня уравнения $(1+к)x^2-3кx+4к=0$ больше1?

Решение.

1. Согласно теореме 5 имеем две системы неравенств:

а)

$$\begin{cases} 1+к>0, \\ 9к^2-16к(1+к)\geq 0, \\ 3к:(1+к)>1, \\ 1+к-3к+4к>0 \end{cases}$$

б)

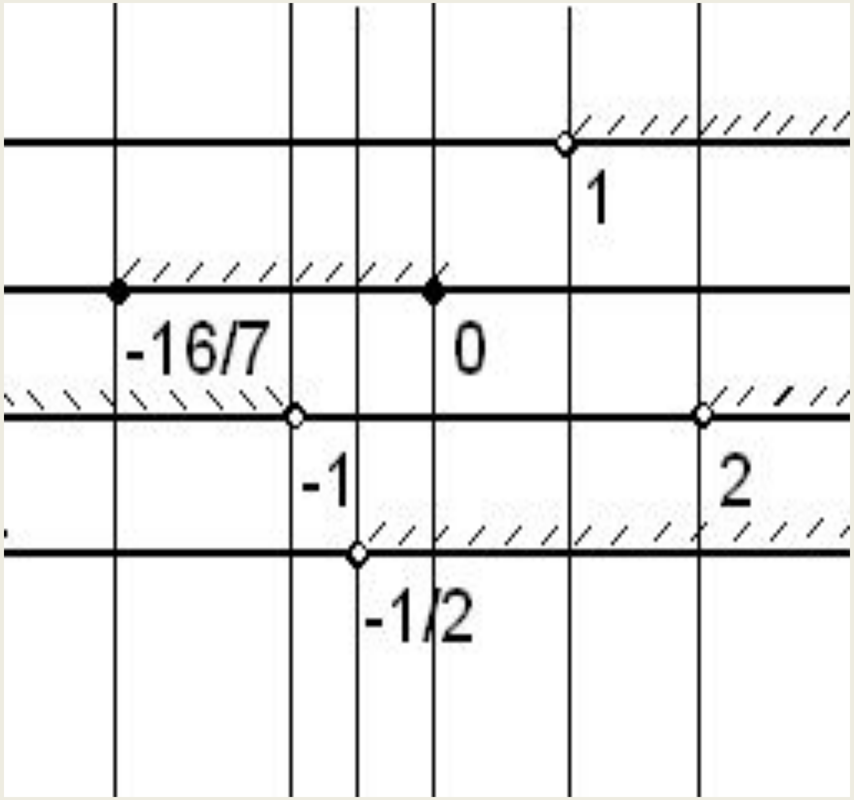
$$\begin{cases} 1+к<0, \\ 9к^2-16к(1+к)\geq 0, \\ 3к:(1+к)>1, \\ 1+к-3к+4к<0 \end{cases}$$

2. Решим систему а:

$$\begin{cases} к>-1, \\ -16к-7к^2\geq 0, \\ (к-2):2(1+к)>0, \\ 1+2к>0 \end{cases}$$

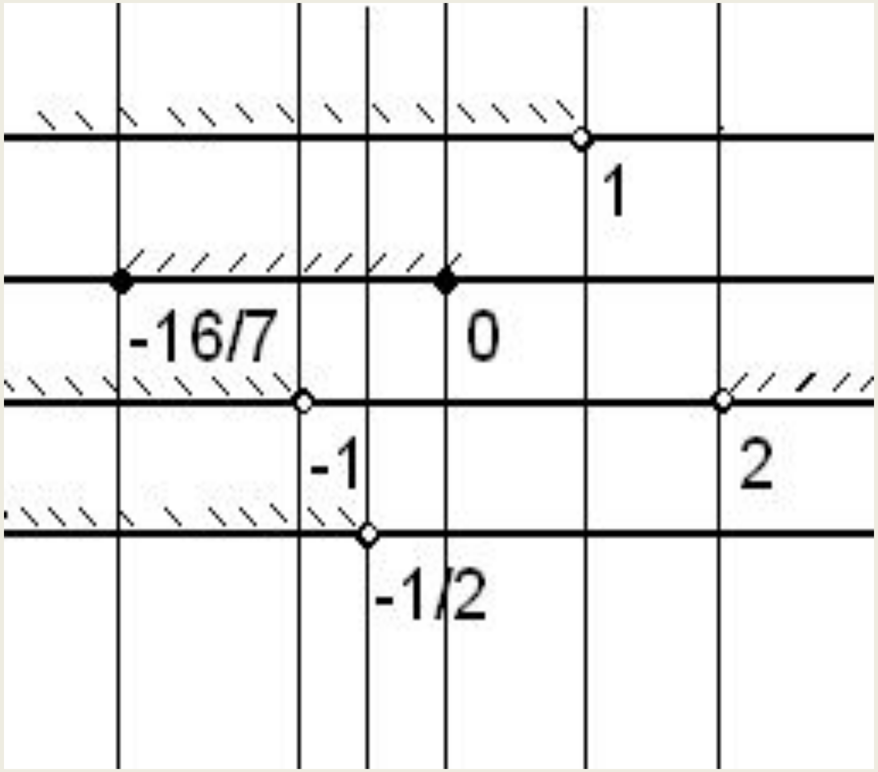
$$\begin{cases} к>1, \\ к(16+7к)\leq 0, \\ (к-2)(1+к)\ )>0, \\ к>-1/2 \end{cases}$$

решений нет.



3.Решим систему б:

$$\begin{cases} к<1, \\ к(16+7к)\le 0, \\ (к-2)(1+к)\ )>0, \\ к<-1/2 \end{cases}$$



$$-\frac{16}{7} \le к \le -1$$

№7 При каких значениях к один из корней уравнения $(к^2+к+1)x^2+(2к-3)x+к-10=0$ больше 1, а другой меньше 1?

Решение.

1. $a=к^2+к+1>0$ при любом к.

2. Согласно тереме 4 имеем

$f(x_0)=f(1)=$

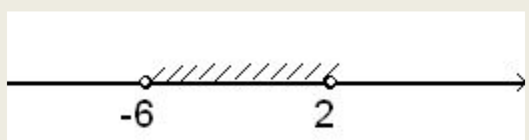
$=к^2+к+1+2к-3+к-10=$

$=к^2+4к-7<0,$

$D=4+12=16$

$x_{1,2}=-2\pm4,$

$-6<x<2$



№8 Существуют ли такие к, при которых корни уравнения $x^2+2x+к=0$ действительны и различны и оба заключены между -1 и 1?

Решение.

1.Чтобы корни квадратного трёхчлена были заключены между -1 и 1, среднее арифметическое этих корней также должно быть заключено между этими числами, т.е.

$-1<(x_1+x_2):2<1$,

$-2<x_1+x_2<2$.

2.Но согласно теореме Виета для корней уравнения выполняется равенство

$x_1 +x_2 =2$.

Следовательно, значений к, требуемых в условии, не существует.

№9 При каких к корни уравнения $кx^2-(к+1)x+2=0$ будут действительными и оба по модулю меньше 1?

Решение.

1.Корни уравнения должны быть действительными и удовлетворять неравенствам:

$-1<x_1<1$, $-1<x_2<1$.

2.Согласно следствию 1 получаем две системы:

а)

$$\begin{cases}), \\ 1)^2-8к\geq 0, \\ (к+1):2к<1, \\ к+1)+2>0, \\ (к+1)+2>0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases}), \\ 1)^2 -8к\geq 0, \\ (к+1):2к<1, \\ к+1)+2<0, \\ (к+1)+2<0 \end{cases}$$

Решим системы:

а)

$$\begin{cases} \ldots 0, \\ \ldots 2к+1-8к \geq 0, \\ \ldots +1)\cdot 2к<1, \\ \ldots 1)\cdot 2к>-1, \\ \ldots -1+2>0, \\ \ldots к+1+2>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots, \\ \ldots 6к+1 \geq 0, \\ \ldots 1-к)<0, \\ \ldots 3к+1) >0, \\ \ldots 0, \\ \ldots >-3, \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} \ldots, \\ \ldots 2к+1-8к \geq 0, \\ \ldots 1)\cdot 2к<1, \\ \ldots 1)\cdot 2к>-1, \\ \ldots -1+2<0, \\ \ldots к+1+2<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ldots, \\ \ldots 6к+1 \geq 0, \\ \ldots 1-к)<0, \\ \ldots 3к+1) >0, \\ \ldots 0, \\ \ldots < -3, \end{cases}$$

Решения нет

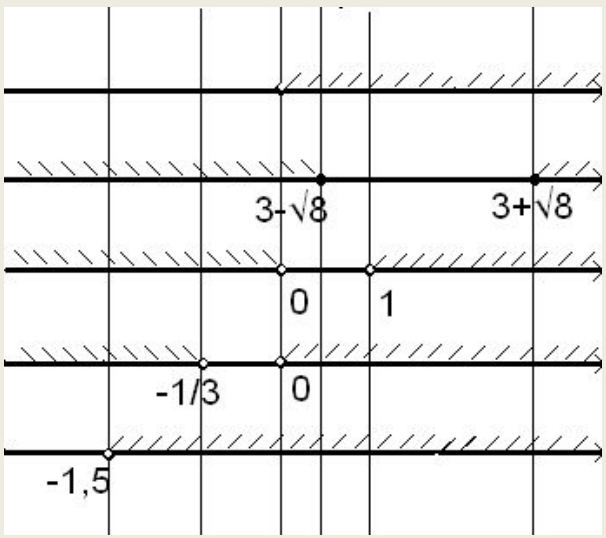
,

-√8)(x-3+√8)≥0,

1)>0,

к+1) >0,

1,5,



$$к \geq 3 + \sqrt{8}$$

№10 Даны уравнения: $x^2-5x+к=0$ и $x^2-7x+2к=0$, $к\neq0$. Найти значение к, при котором один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

Решение.

1. Обозначим корни первого уравнения A и B, а второго уравнения через 2A и C.
2. По тереме Виета:

$A+B=5$, $2A+C=7$, $A\,B=к$, $2AC=2к$.

3. Т.к. $к\neq0$, то $A\neq0$, $B\neq0$, $C\neq0$.
4. Т.к. $AB=к$, $2AC=2к$, то $B=C$ и

$$\begin{cases} A+B=5, \\ 2A+B=7, \\ AB=к, \end{cases}$$

Решив систему, получаем:

$A=2, B=3$, $C=6$, $к=6$.

5. Таким образом , данные уравнения принимают вид:

$x^2-5x+6=0$ и $x^2-7x+12=0$.

Первое уравнение имеет корни: 2 и 3.

Второе уравнение имеет корни: 3 и 4.

№11 Найти все действительные корни уравнения $8(x^4+y^4)-4(x^2+y^2)+1=0$.

Решение.

1. Перепишем уравнение:

$4(x^4+y^4)-2(x^2+y^2)+0,5=0,$

$4(x^4-0,5x^2+0,0625)+4(y^4-0,5y^2+0,0625)=0,$

$4(x^2-0,25)^2+4(y^2-0,25)^2=0,$

$(x^2-0,25)^2+(y^2-0,25)^2=0.$

2. Уравнение выполняется лишь при

$$\begin{cases} x^2-0,25=0, \\ y^2-0,25=0. \end{cases}$$

$x = y = \pm 0,5.$

Ответ: (0,5;0,5), (0,5;-0,5), (-0,5;0,5), (-0,5;-0,5).