Показательная функция

Урок обобщения и систематизации знаний

Цели:

- **Повторить свойства показательной функции**
- **Уметь применять их при решении показательных уравнений и неравенств**
- **Предоставить каждому ученику возможность проверить свои знания и повысить их уровень**

«Великая книга природы написана математическими символами».

Г. Галлилей.

Применение показательной функции

Диагностика заболеваний.

- *При диагностике почечных болезней часто определяют способность почек выводить из крови радиоактивные изотопы, причем их количество в крови падает по показательному закону.*

Барометрическая формула.

При постоянной температуре давление воздуха убывает с убыванием высоты над уровнем моря по закону

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H}}$$

где p_0 – давление на уровне моря ($h = 0$),

p – давление на высоте h,

H - константа, зависящая от температуры воздуха.

Рост различных видов микроорганизмов и бактерий, дрожжей, ферментов, – все эти процессы подчиняются одному закону: $N = N_o e^{kt}$.

N-число колоний бактерий в момент времени t;
t- время размножения.

Примером быстрого размножения бактерий является процесс изготовления дрожжей, при котором по мере их роста производится соответствующая добавка перерабатываемой сахаристой массы. Увеличение массы дрожжей выражается показательной функцией $m = m_0^{1,2 \cdot T}$,где m_0 – масса дрожжей в процессе дрожжевания.

Интенсивность размножения бактерий используют…

в пищевой промышленности (для приготовления напитков, кисломолочных продуктов, при квашении, солении и др.)

в фармацевтической промышленности (для создания лекарств, вакцин)

в сельском хозяйстве (для приготовления силоса, корма для животных и др.)

в коммунальном хозяйстве и природоохранных мероприятиях (для очистки сточных вод, ликвидации нефтяных пятен)

Рост вклада в банке

В XIV-XV веках в Западной Европе появляются банки – учреждения, которые давали деньги в рост князьям и купцам, финансировали за большие проценты дальние путешествия и завоевательные походы. Чтобы облегчить расчеты сложных процентов, взимаемых по займам, составили таблицы, по которым сразу можно было узнать, какую сумму надо было уплатить через ***n*** лет, если была взята взаймы сумма ***a*** по ***p%*** годовых.

Эта сумма выражается формулой $s = a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Пример. Банк выплачивает вкладчикам проценты по вкладам в размере 7% в год, т.е. за **каждый год** вклад **увеличивается в 1,07 раза**.

$$y = 1{,}04^x$$

Рост древесины происходит по закону

$$A = A_0 \cdot a^{kt}$$

A- изменение количества древесины во времени;
A_o- начальное количество древесины;
t-время;
k, *a*- некоторые постоянные.

Вычислите устно

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 3^0 =1 $\quad (\frac{1}{2})^{-1}$ =2 $\quad (\frac{1}{3})^{-2}$ =9 $\quad 6^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{6}$
- $3^{0,5} = \sqrt{3}$ $\quad (\frac{4}{9})^0$ =1 $\quad (\frac{3}{5})^{-1} = 1\frac{2}{3}$ $\quad 64^{\frac{2}{3}}$ =16
- $5^{-4} = \frac{1}{625}$ $\quad 3^{-4} \cdot 81$=1 $\quad \sqrt{16} \cdot 2^{-2}$=1 $\quad 36^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}$ =12

$(-8)^{\frac{1}{2}}$ **Нет решения**

Показательная функция

- Определение и свойства
- Построение графика
- Сравнение чисел с использованием свойств показательной функции

Определение

Показательная функция – это

функция вида $y = a^x$,

где x – переменная,

a - заданное число, $a>0$, $a\neq1$.

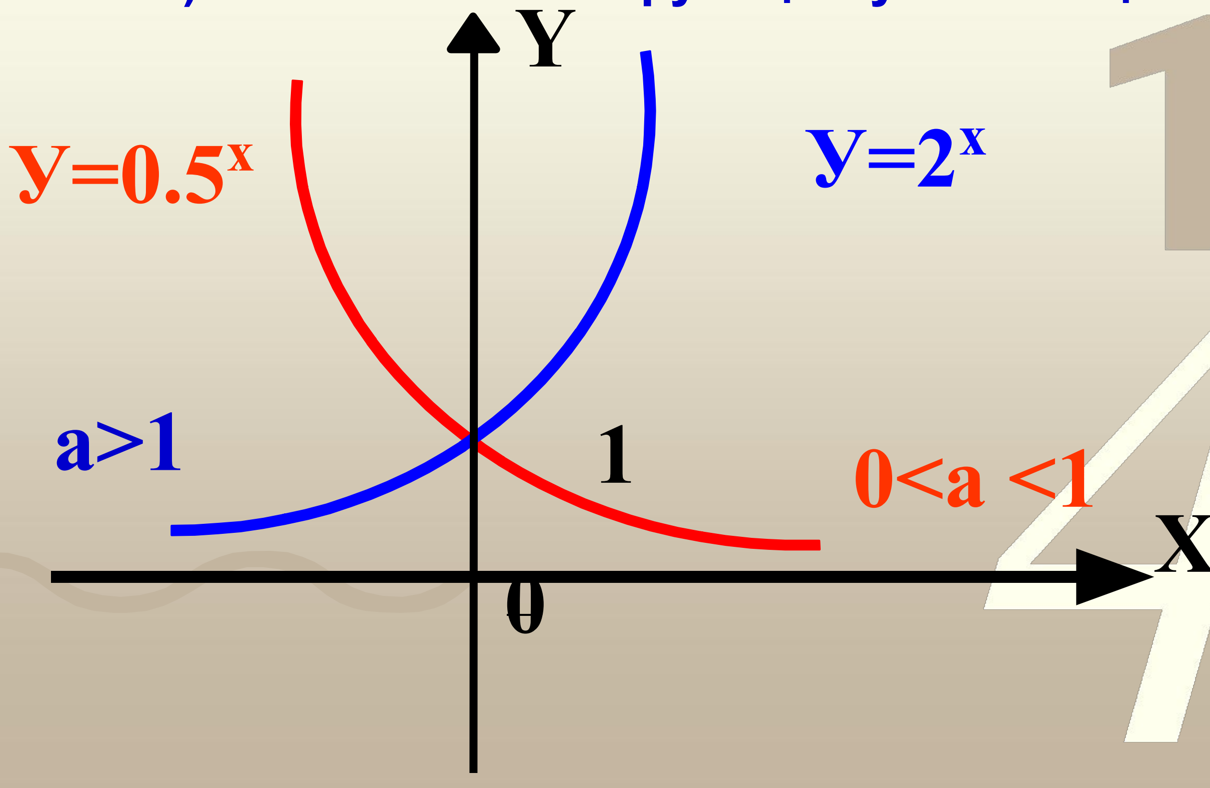
Примеры: $y = 3^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = 0{,}4^x$

Показательная функция

Свойства:

1. Область определения -R,
2. Множество значений - R_+.
3. А) если $a > 1$ функция возрастающая;

   Б) если $0 < a < 1$ функция убывающая.



Среди заданных функций укажите те, которые являются показательными:

$$y = 1{,}3^x$$

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$y = (-2)^x$$

$$y = -2^x$$

$$y = x^{-\frac{1}{2}}$$

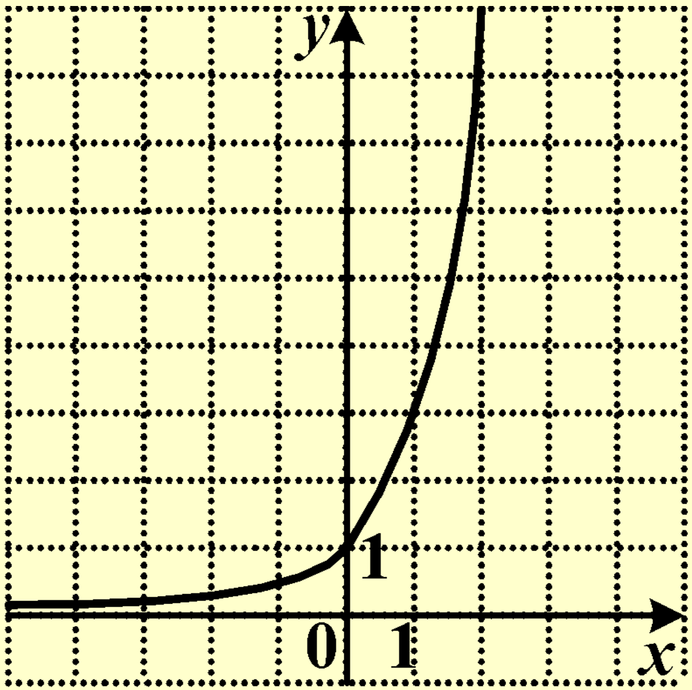
График какой из перечисленных функций изображен на рисунке?

1 $y = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

2 $y = 2^x$

3 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

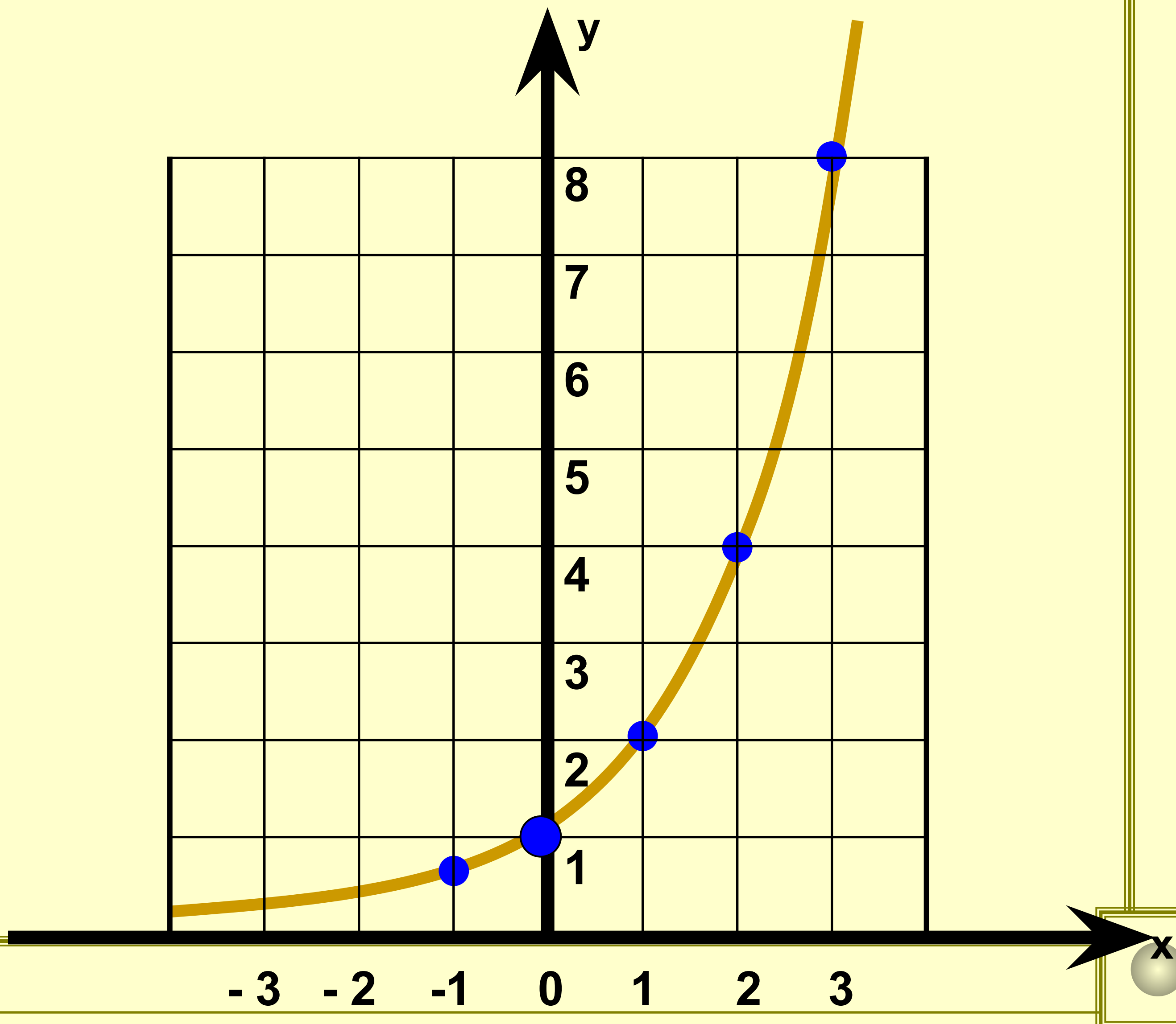
4 $y = 3^x$



Задача 1

Построить график функции $y = 2^x$

x	y
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Задача 2

Сравнить числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Решение

$$\sqrt{2} = 1,41... > 1,4$$

$$0 < \frac{1}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4}$

Задача 3

Сравнить число 3^{-5} с 1.

Решение

$1 = 3^0$

-5 < 0

$3 > 1$

$3^{-5} < 3^0$ ⇒ $3^{-5} < 1$

Ответ: $3^{-5} < 1$

Решение показательных уравнений

Простейшие показательные уравнения

Уравнения, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем

Уравнения, решаемые заменой переменной

случай 1;

случай 2.

Уравнения, решаемые делением на показательную функцию

случай 1;

случай 2.

Показательные уравнения

[Определение]

[Простейшие уравнения]

[Способы решения сложных уравнений]

Определение

Уравнение, в котором переменная содержится в показателе степени, называется показательным.

Примеры: $2^x = 8;\quad 9^x - 5\cdot 3^x + 6 = 0$

Простейшее показательное уравнение – это уравнение вида

$$a^x = a^b, \text{где } a > 0, a \neq 1.$$

Простейшее показательное уравнение решается с использованием свойств степени.

$$\boxed{a^x = a^b \Leftrightarrow x = b}$$

Простейшие показательные уравнения

$$1).\ 2^{3x+4} = 2^{x-7} \Leftrightarrow 3x+4 = x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x = -7-4 \Leftrightarrow 2x = -11 \Leftrightarrow x = -5{,}5.$$

Ответ: - 5,5.

$$2).\ 5^{x^2-3x} = 1 \Leftrightarrow 5^{x^2-3x} = 5^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x-3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 3.

Способы решения сложных показательных уравнений.

Замена переменной

Деление на показательную функцию

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

Данный способ используется, если соблюдаются два условия:

1) основания степеней одинаковы;
2) коэффициенты перед переменной одинаковы

Например: $$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$2^{x+1} - 4 \cdot 2^{x-2} = 32$$

$$2^{x-2}(\ 2^3 - 4 \cdot 1) = 32$$

$$2^{x-2}(8-4) = 32$$

$$2^{x-2} \cdot 4 = 32 | : 4$$

$$2^{x-2} = 8$$

$$2^{x-2} = 2^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

Ответ: 5

x + 1 - (x - 2) =

= x + 1 – x + 2 = 3

Замена переменной

При данном способе показательное уравнение сводится к квадратному.

Способ замены переменной используют, если

а) основания степеней одинаковы;

б) показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой.

Например:

$3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} - 45 = 0$

коэффициенты перед переменной противоположны.

Например:

$2^{2-x} - 2^{x-1} = 1$

Замена переменной (1)

основания степеней одинаковы, показатель одной из степеней в 2 раза больше, чем у другой .

$$3^{2x} – 4 \cdot 3^{x} – 45 = 0$$

$$t = 3^x \ (t > 0)$$

$$t^2 – 4t – 45 = 0$$

$t_1 = 9$; $t_2 = - 5$ – не удовлетворяет условию

$3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$.

Ответ: 2

Замена переменной (2)

Основания степеней одинаковы,
коэффициенты перед переменной противоположны.

$$2^{2-x}-2^{x-1}=1$$

$$2^2\cdot 2^{-x}-2^x\cdot 2^{-1}=1$$

$$t=2^x\ (\mathrm{t}>0)$$

$2 \quad t \quad 2t$

$$\frac{4}{t}-\frac{t}{2}=1$$

$$8-t^2=2t$$

$$t^2+2t-8=0$$

$t_1=-4$ - Не удовлетворяет условию

$$t_2=2$$

$$2^x=2$$

$$x=1$$

Ответ: 1

Деление на показательную функцию

Данный способ используется, если основания степеней разные.

а) в уравнении вида $a^x = b^x$ делим на b^x

Например: $2^x = 5^x \mid : 5^x$

б) в уравнении А a^{2x} + В $(ab)^x$ + С $b^{2x} = 0$ делим на b^{2x}.

Например:

$$3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x = 0 \mid : 9^x$$

Деление
на показательную функцию

$$a)\ 2^x = 5^x \ |: 5^x$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = 1$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^0$$

$$x = 0$$

Ответ: 0

Деление на показательную функцию

$$3\cdot 25^x - 8\cdot 15^x + 5\cdot 9^x = 0 \,\Big|\; :9^x$$

$$\frac{3\cdot 5^{2x}}{3^{2x}} - \frac{8\cdot 5^x\cdot 3^x}{3^{2x}} + 5 = 0$$

$$3\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 8\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 5 = 0$$

$$t = \left(\frac{5}{3}\right)^{x} \quad (t > 0)$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$D = 64 - 4\cdot 3\cdot 5 = 4 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{8+2}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3};$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \frac{5}{3}$$

$$x = 1$$

$$t_2 = \frac{8-2}{6} = 1.$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 1$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \left(\frac{5}{3}\right)^{0}$$

$$x = 0$$

Ответ: 0; 1.

Решение показательных неравенств

Простейшие показательные неравенства

Двойные неравенства

Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем

Неравенства, решаемые заменой переменной

Показательные неравенства

Определение

Простейшие неравенства

Решение неравенств

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в показателе

степени.

Примеры: $3^x \le 9;$ $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b \qquad a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b \qquad a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – *любое число*.

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$\left.\begin{array}{l} a^x > a^b \\ a > 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > b \qquad \left.\begin{array}{l} a^x > a^b \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x < b$$

Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

Простейшие показательные неравенства

1). $3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$

Ответ: $x > 2.$

2). $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x < 2$

Ответ: $x < 2.$

Двойные неравенства

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^{2}$$

3 > 1, то $-1 < 3 + x < 2$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: (- 4; -1).

Решение показательных неравенств

Метод: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}>10$$

$$3^{x-3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot 3^{3}\right)>10$$

$$3^{x-3}(1+9)>10$$

$$3^{x-3}\cdot 10>10 \;\Big|\; :10$$

$$3^{x-3}>1$$

$$3^{x-3}>3^{0}$$

Т.к.
3 > 1, то знак неравенства остается прежним

$$x-3>0$$

$$x>3.$$

Ответ: $x>3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

$$3\cdot 9^x + 11\cdot 3^x < 4$$

$$3\cdot 3^{2x} + 11\cdot 3^x - 4 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

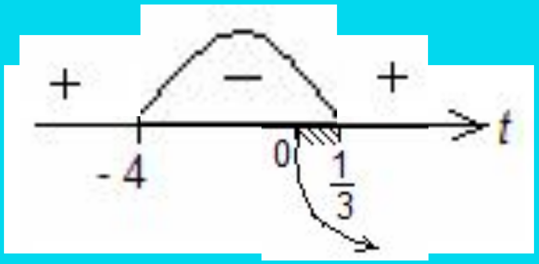
$$3t^2 + 11t - 4 < 0$$

$$D = 11^2 - 4\cdot 3\cdot(-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{-11+13}{2\cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-11-13}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$3(t+4)\left(t - \frac{1}{3}\right) < 0$$



$$0 < t < \frac{1}{3}; 0 < 3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x < 3^{-1};$$

3>1, то $\quad x < -1.$

Ответ: $x < -1.$

Спасибо за урок !!!

Домашнее задание

ПРОВЕРЬ СЕБЯ с *88*