



Олимпиадные задачи по математике

Учитель математики
МАОУ СОШ № 22

Плеханова А.А.

5 класс

Три яблока, четыре груши и один персик стоят 61 рубль. Два яблока, четыре груши и два персика стоят 66 рублей. Сколько рублей стоит одна груша, если персик стоит столько, сколько стоят два яблока?

Решение:

Запишем условия в виде равенств:

- $3я + 4г + 1п = 61,$
- $2я + 4г + 2п = 66,$
- $1п = 2я.$

Учитывая первое и третье условия, получим, что $5я + 4г = 61$, а из второго и третьего условий получим, что $6я + 4г = 66$. Значит, одно яблоко стоит 5 рублей. Тогда один персик стоит 10 рублей. Четыре груши стоят 36 рублей, то есть одна груша стоит 9 рублей.

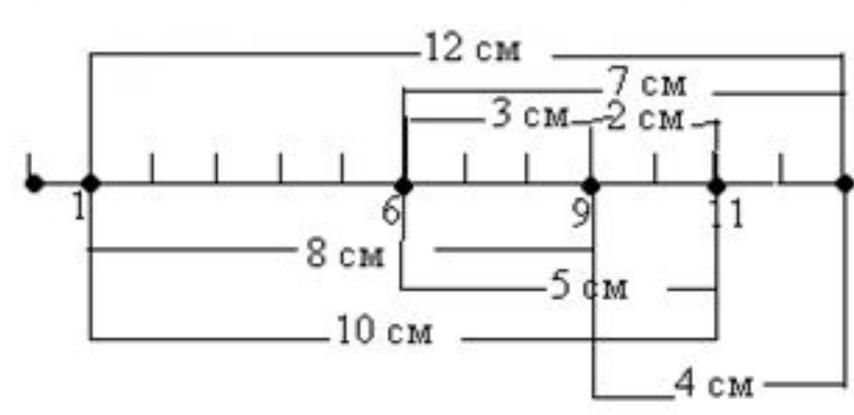


6 класс

Имеется линейка без делений длиной 13 см. Какое минимальное число делений нужно нанести на линейку, чтобы на линейке было видно изображение отрезков длиной $1, 2, 3, \dots, 12, 13$ см?

Решение:

Если на линейку нанести четыре деления, соответствующие 1 см, 6 см, 9 см и 11 см, то на линейке будут видны изображения отрезков, длины которых равны $1, 2, 3, \dots, 12, 13$ см (см. рис.).



Трёх делений недостаточно, так как если на отрезке длиной 13 см разместить три точки, то наибольшее число различных отрезков будет равняться 10 , а нужно 13 .

7 класс

Двузначное число в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, дает полный квадрат. Найдите все такие числа, в ответе укажите их количество.

Решение:

Пусть a – это цифра десятков, а b – это цифра единиц, тогда получаем, что

$$10a + b + 10b + a = 11(a + b) \rightarrow a + b = 11$$

Искомые числа 29, 92, 38, 83, 47, 74, 56, 65.



8 класс

У четырёх братьев всего 32000 рублей. Если деньги первого брата увеличить на 7 рублей, а деньги второго – уменьшить на 7 рублей, третьего – увеличить в 7 раз, а четвертого – уменьшить в 7 раз, то у братьев станет денег поровну. Сколько рублей было у второго из братьев первоначально?

Решение: Пусть у первого брата x рублей, у второго – y рублей, у третьего – z рублей, у четвертого – t рублей. Тогда:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 32000, \\ x + 7 = y - 7 = 7z = \frac{1}{7}t \end{cases}$$

Выразим все переменные через z и подставим в первое уравнение системы:

$$(7z - 7) + (7z + 7) + z + 49z = 32000$$

$64z = 32000$	$z = 500$
$x = 7 \cdot 500 - 7$	$x = 3493$
$y = 7 \cdot 500 + 7$	$y = 3507$
$t = 49 \cdot 500$	$t = 24500$

Итак, у первого брата 3493 рублей, у второго – 3507 рублей, у третьего – 500 рублей, у четвертого – 24500 рублей.



9 класс

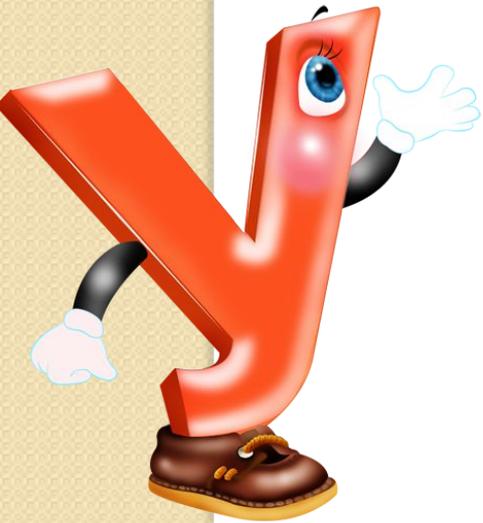
Найдите все пары натуральных чисел,
удовлетворяющих уравнению: $x^2 - xy - 2x + 3y = 11$.
В ответе укажите количество найденных пар чисел.



Решение:

Исходное уравнение $x^2 - xy - 2x + 3y = 11$ преобразуем к виду $y(x - 3) = x^2 - 2x - 11$, откуда $y = (x^2 - 2x - 11)/(x - 3) = x + 1 - 8/(x - 3)$.

Следовательно (обратите внимание на дробь), возможны варианты $x = 1; 2; 4; 5; 7; 11$. Находя соответствующие значения переменной y , получаем пары чисел: $(1; 6)$, $(2; 11)$, $(4; -3)$, $(5; 2)$, $(7; 6)$, $(11; 11)$. С учётом того, что числа должны быть натуральным, удовлетворять уравнению будут следующие 5 пар чисел: $(1; 6)$, $(2; 11)$, $(5; 2)$, $(7; 6)$, $(11; 11)$.



10 класс

Найти наименьшее натуральное число, дающее остатки: 1 – при делении на 2, 2 – при делении на 3, 3 – при делении на 4, 4 – при делении на 5, 5 – при делении на 6.

Решение:

$$\begin{cases} n = 2k + 1 \\ n = 3m + 2 \end{cases} \rightarrow 2k + 1 = 3m + 2 \rightarrow 2k - 3m = 1 \rightarrow \begin{cases} k = 3r - 1 \\ m = 2r - 1 \end{cases} \rightarrow n = 6r - 1$$

$$n = 4l + 3 \rightarrow 6r - 1 = 4l + 3 \rightarrow 2l - 3r = -2 \rightarrow \begin{cases} r = 2w + 2 \\ l = 3w + 2 \end{cases} \rightarrow n = 12w + 11$$

$$n = 5s + 4 \rightarrow 12w + 11 = 5s + 4 \rightarrow 12w - 5s = -7 \rightarrow \begin{cases} w = -1 + 5u \\ s = -1 + 12u \end{cases} \rightarrow n = 60u - 1$$

$$n = 6t + 5 \rightarrow 60u - 1 = 6t + 5 \rightarrow t = 10u - 1$$

Т.е. $n = 60u - 1 \rightarrow n_{\min} = 59$



11 класс

Набор, состоящий из чисел a, b, c , заменили на набор $a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c , если их сумма равна (-3) . В ответе укажите число a .

Решение:

Из того, что наборы совпадают, следует совпадение их сумм. Значит, $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = a + b + c = -3$, затем $(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 + (c^2 - 1)^2 = 0$. Откуда $a^2 - 1 = b^2 - 1 = c^2 - 1 = 0$, т.е. $a = \pm 1, b = \pm 1, c = \pm 1$. Условию $a + b + c = -3$ удовлетворяют только $a = b = c = -1$. Осталось проверить, что найденная тройка удовлетворяет условиям задачи.





**Спасибо за
внимание!!!**