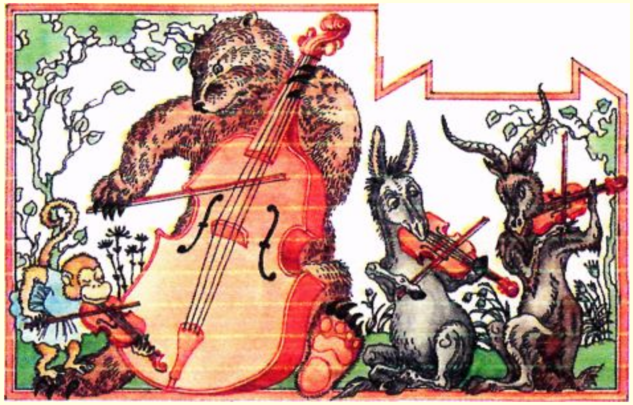
Секреты

Комбинаторики

Введение:



В знаменитой басне Крылова «Квартет» «проказница Мартышка, Осёл, Козёл да косолапый Мишка» устроили любопытный эксперимент: они исследовали влияние взаимного расположения музыкантов на качество исполнения. И если бы не вмешался Соловей, участники квартета, наверное, перепробовали бы все возможные варианты. Зададимся вопросом: сколько существует способов, чтобы рассадить, например в один ряд, четырёх музыкантов? И при помощи, какой науки это можно сделать?

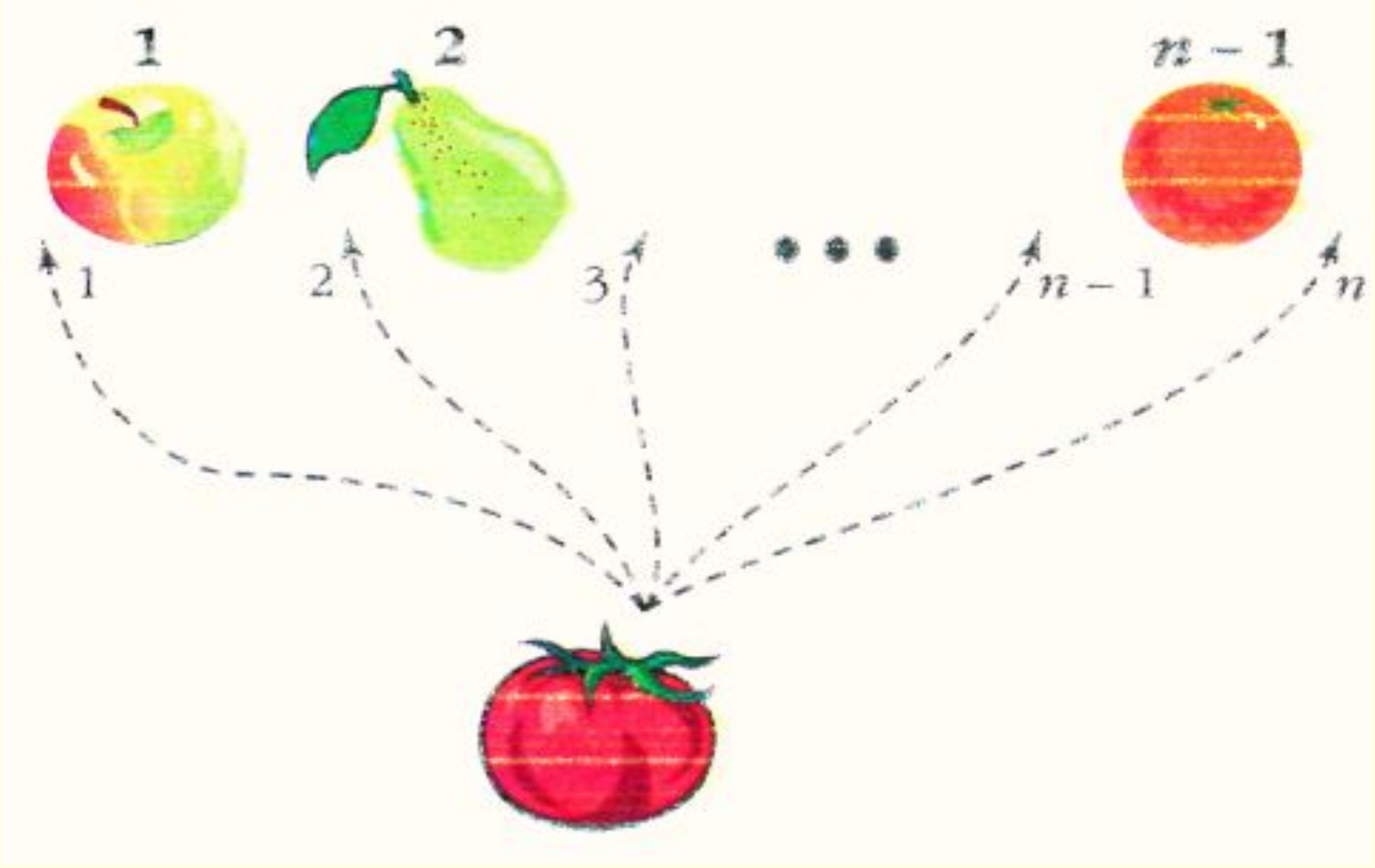
- Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторика. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

- Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни людей того времени большое место занимали азартные игры. В карты и кости выигрывались и проигрывались иной раз целые состояния. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр, например вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число при игре в кости. Проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии не только комбинаторики, но и развивавшейся одновременно с ней теории вероятностей.

- Комбинаторика особенно бурно развивается последние десятилетия. Методы комбинаторики используются для решения транспортных задач (составление расписаний), для составления планов, производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т. д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации. Значительную роль комбинаторные методы играют и в математических вопросах - теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т.д.

Перестановки:

Перестановки из n элементов- различные расположения этих элементов.



Формулы:

Общая формула:

Pn=1• 2• 3-...• n=n!

Формулы для перестановок с повторениями:

$\widetilde{P}$ **k1, k2…kn =** $\frac{(k1+k2+\ldots kn)!}{k1!\cdot k2!\ldots kn!}$

n!= ($\frac{n}{e}$**)n•** $\sqrt{2\Pi n}$

П = 3,14159 (число «пи»)

е = 2,71828 (число Эйлера)

Задачи:

- Как-то раз в воскресенье семеро друзей зашли в кафе, уселись за один столик и заказали мороженое. Хозяин кафе сказал, что если друзья в каждое следующее воскресенье будут садиться по-новому и перепробуют все способы посадки, то с этого момента он обещает кормить их мороженым бесплатно. Удастся ли друзьям воспользоваться предложением хозяина кафе?

  Решение:

  В этой задаче речь идёт о количестве перестановок из элементов, значит решим её, используя формулу $P_n=n!$

  $P_7=7! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7= 5040$

  Все способы пересадки потребуют 5040 воскресений, то есть 5040 недель, это более 96 лет.

  Ответ: нет, не удастся.

- Сколько существует перестановок букв слова «конус», в которых буквы «к», «о», «н» стоят в указанном порядке?

  Решение:

  Будем считать сочетание букв «к», «о», «н» за один элемент, тогда будем делать перестановки из трех элементов, используя формулу $P_n=n!$

  $P_3 = 3! = 1\cdot2\cdot3 = 6$

  Ответ: 6 перестановок.

Размещения:

Размещение из n элементов по k- это упорядоченный набор из k элементов, составленный из данных n элементов.

Формулы:

Общая формула:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Формула размещений с повторениями:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m$$

Задачи:

- Комиссия состоит из председателя, его заместителя и еще пяти человек.

  Сколькими способами члены комиссии могут распределить между собой обязанности председателя и заместителя?

  Решение:

  При выборе важен и состав и порядок следования выбранных элементов. Значит, речь идёт о размещениях из 7 элементов по 2.

  $$A_7^2 = \frac{7!}{(7-2)!} = 42$$

  Ответ: 42.

- Замок открывается только в том случае, если набран определённый трёхзначный код. Попытка состоит в том, что набирают наугад три цифры из заданных пяти. Угадать код удалось только на последней из всех возможных попыток. Сколько попыток предшествовало удачной?

  Решение:

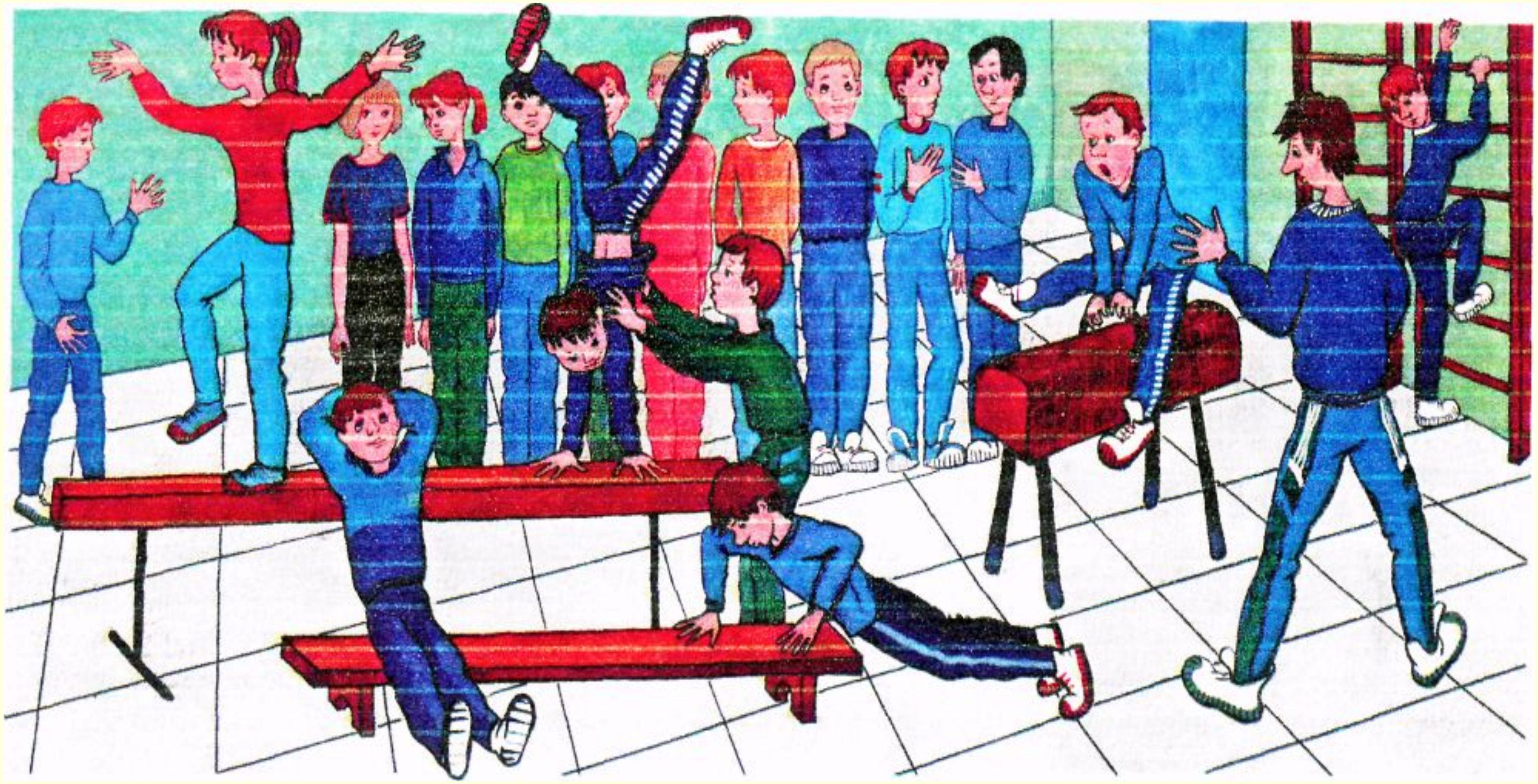
  Общее количество попыток равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по три т.е. $\tilde{A}_5^3 = 5^3 = 125$

  Количество неудачных попыток 124.

  Ответ: 124.

Сочетания:

Сочетание из данных n элементов по k- это любая группа из k этих элементов (1≤k≤n).



Формулы:

Общая формула:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Формула числа сочетаний с повторениями:

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m+1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)}$$

Задачи:

- В кондитерском отделе продаются три сорта пирожных: безе, эклеры и бисквитные. Сколько можно составить различных наборов по 9 пирожных в каждом?

Решение:

Речь идет об отыскании числа сочетаний с повторениями из 3 элементов по 9, значит используем формулу:

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} = \frac{(m+n-1)}{m!(n-1)!}$$

значит:

$$\widetilde{C}_3^9 = \frac{(3+9-1)!}{9!(3-1)!} = \frac{10 \bullet 11}{2} = 55$$

Ответ: 55

Бином Ньютона:

В алгебре довольно часто приходится возводить в степень двучлен (a + b). Аналогичная формула, но уже для произвольного n > 0 называется биномом Ньютона, хотя и была известна задолго до него. (Слово «бином» в переводе с латыни означает «двучлен».) Формула эта имеет прямое отношение к комбинаторике.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

где $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k$ — биномиальные коэффициенты, n — неотрицательное целое число.

Задачи:

- Напишите разложение по формуле бинома Ньютона:

а. $(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5$

б. $(a+x)^6 = a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + x^6$

Треугольник Паскаля:

- Впервые цифровой треугольник подробно описал французский математик Блез Паскаль в своём «Тракте об арифметическом треугольнике» (опубликован в 1665 г.). С тех пор он так и называется — *треугольник Паскаля.*


0 1 0
1 1 1 1
2 1 2 1 2
3 1 3 3 1 3
4 1 4 6 4 1 4
5 1 5 10 10 5 1 5
6 1 6 15 20 15 6 1 6
7 1 7 21 35 35 21 7 1 7
8 1 8 28 56 70 56 28 8 1 8
n C_n^0 C_n^1 C_n^2 C_n^n n

Задачи:

1.Сократите дробь:

$$\frac{a^5+b^5}{a^7+b^7}=\frac{(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)}=$$

$$=\frac{(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}{(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)}$$

2.Сократима ли дробь?

$$\frac{a^{1999}+b^{1999}}{a^{1997}+b^{1997}}=\frac{(a+b)(a^{1998}\cdots+b^{1998})}{(a+b)(a^{1996}\cdots+b^{1996})}= \quad =\frac{(a^{1998}\cdots+b^{1998})}{(a^{1996}\cdots+b^{1996})}$$

Ответ: сократима.

Заключение:

Умение решать комбинаторные задачи поможет диспетчеру станции в его работе. Тем, кто захочет открыть кодовый замок, будет ясно, сколько неудачных попыток ему придется сделать. Оформителям столов комбинаторика подскажет сколькими различными комбинациями можно украсить стол. На различных конкурсах и олимпиадах часто встречаются задачи, связанные с комбинаторикой.

Умение использовать бином Ньютона и треугольник Паскаля поможет в решении алгебраических заданий. ***Вот такие секреты нам раскрывает комбинаторика.***