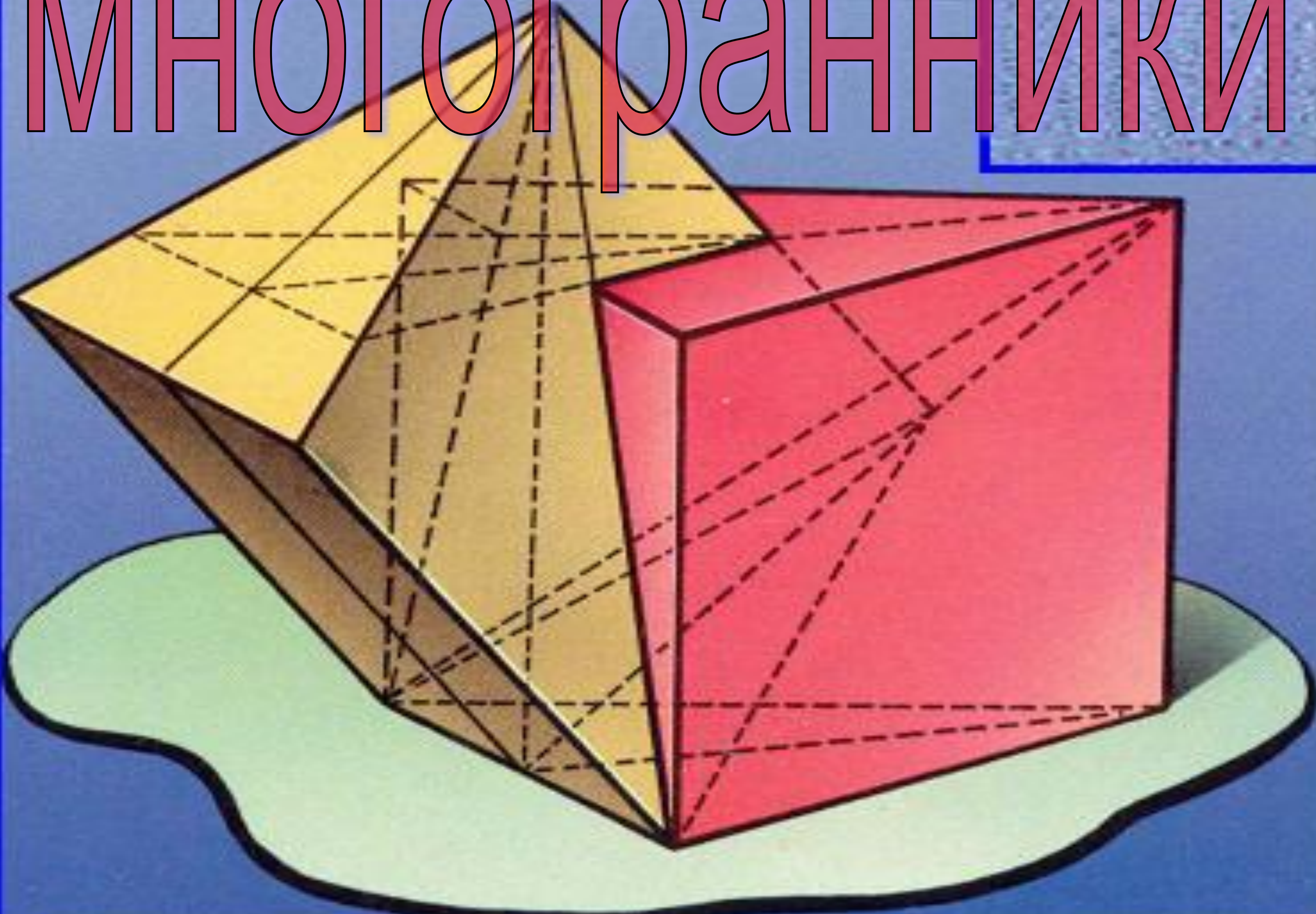
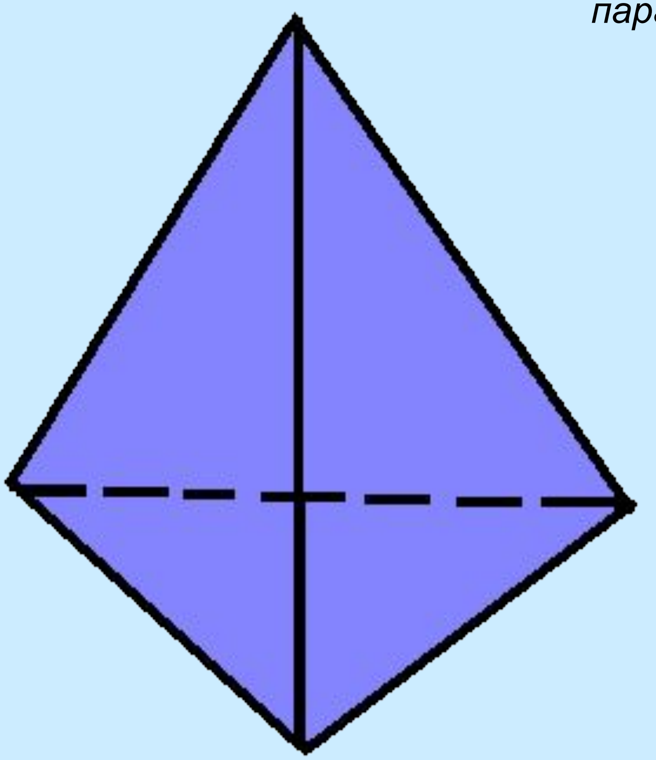
# многогранники



# Общие сведения о многогранниках

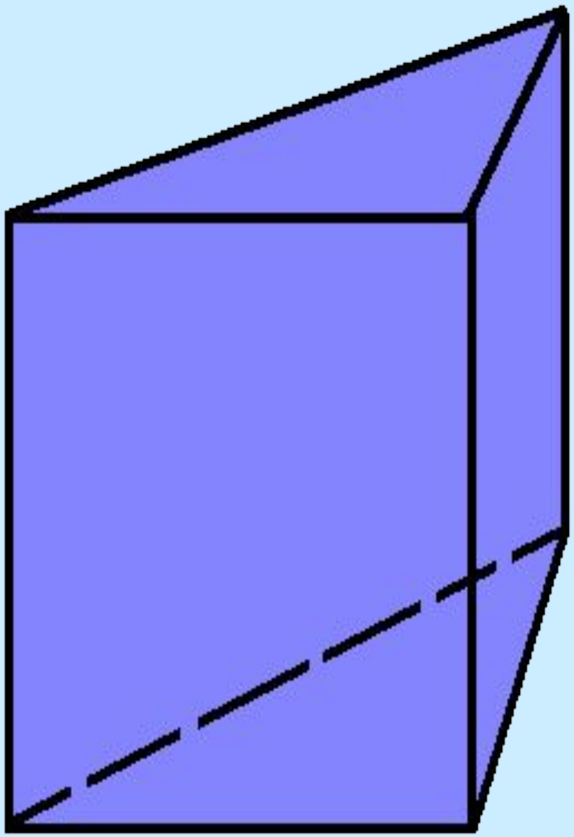
*Многогранник - геометрическое тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Плоские многоугольники называются гранями, стороны многоугольника - ребрами, вершины многоугольника - вершинами многогранника. Виды многогранников: пирамида, призма, параллелепипед и другие.*



## ***Пирамида***

*Пирамида - многогранник, основанием которого является многоугольник, а боковые грани - треугольники. n-угольная пирамида имеет n+1 граней Пирамида называется правильной, если в основании правильный многоугольник, а вершина проектируется в центр основания.*

# ПРИЗМА

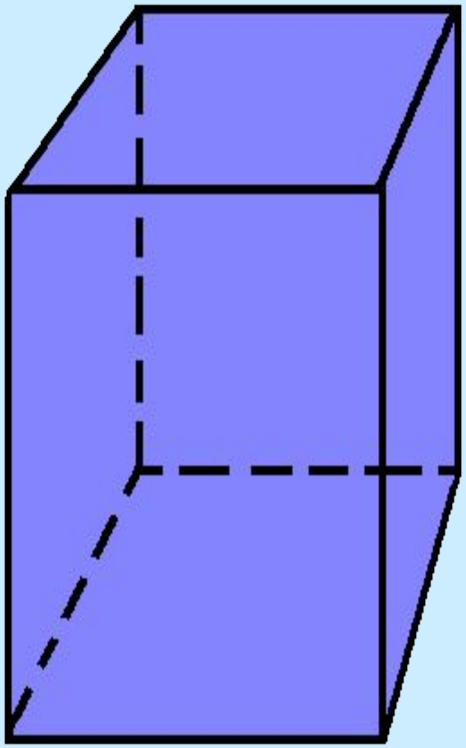


*Призма - многогранник, у которого боковые грани параллелограммы, а два основания равные многоугольники. У треугольной призмы в основании лежит треугольник, у четырехугольной - четырехугольник, у пятиугольной - пятиугольник и т.д.*

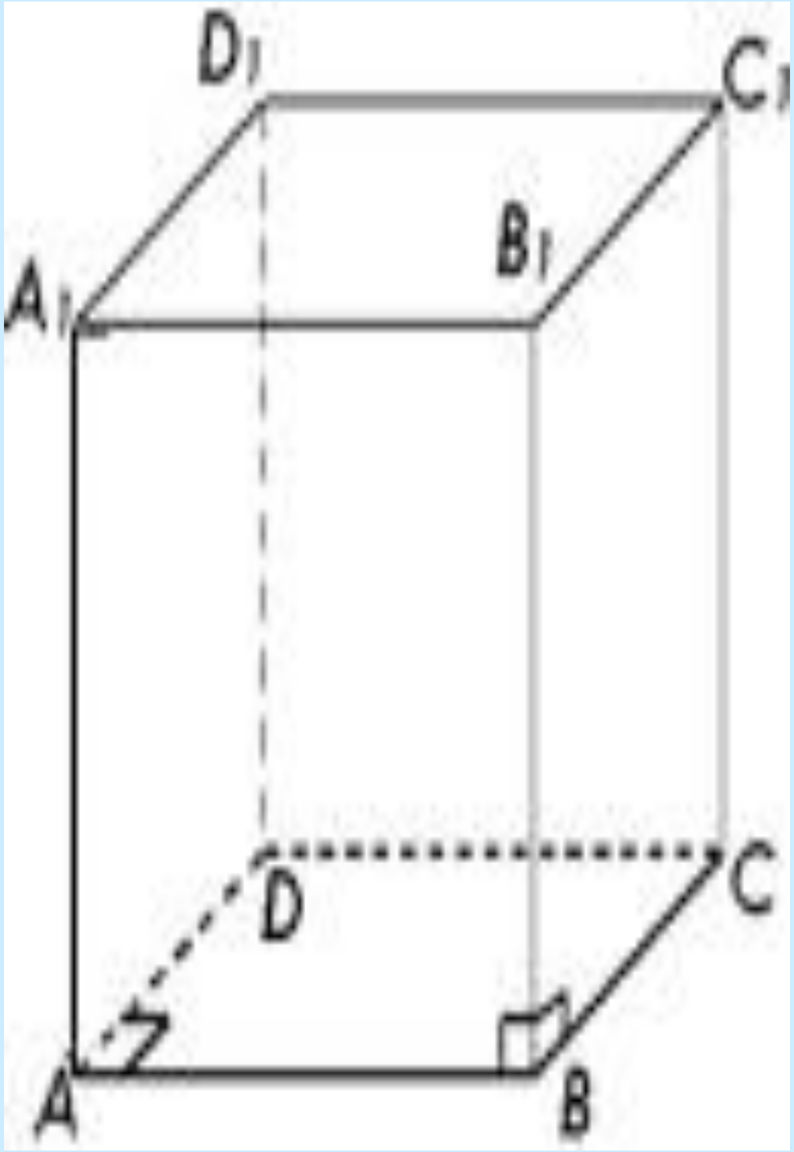
*Призма называется прямой, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям, и наклонной, если ее боковые ребра не перпендикулярны основаниям.*

*Призма называется правильной, если она прямая и основание ее правильный многоугольник.*

# Параллелепипед



- это *призма, основанием которой является параллелограмм. Параллелепипед, основанием которого является прямоугольник или квадрат называется прямым.*



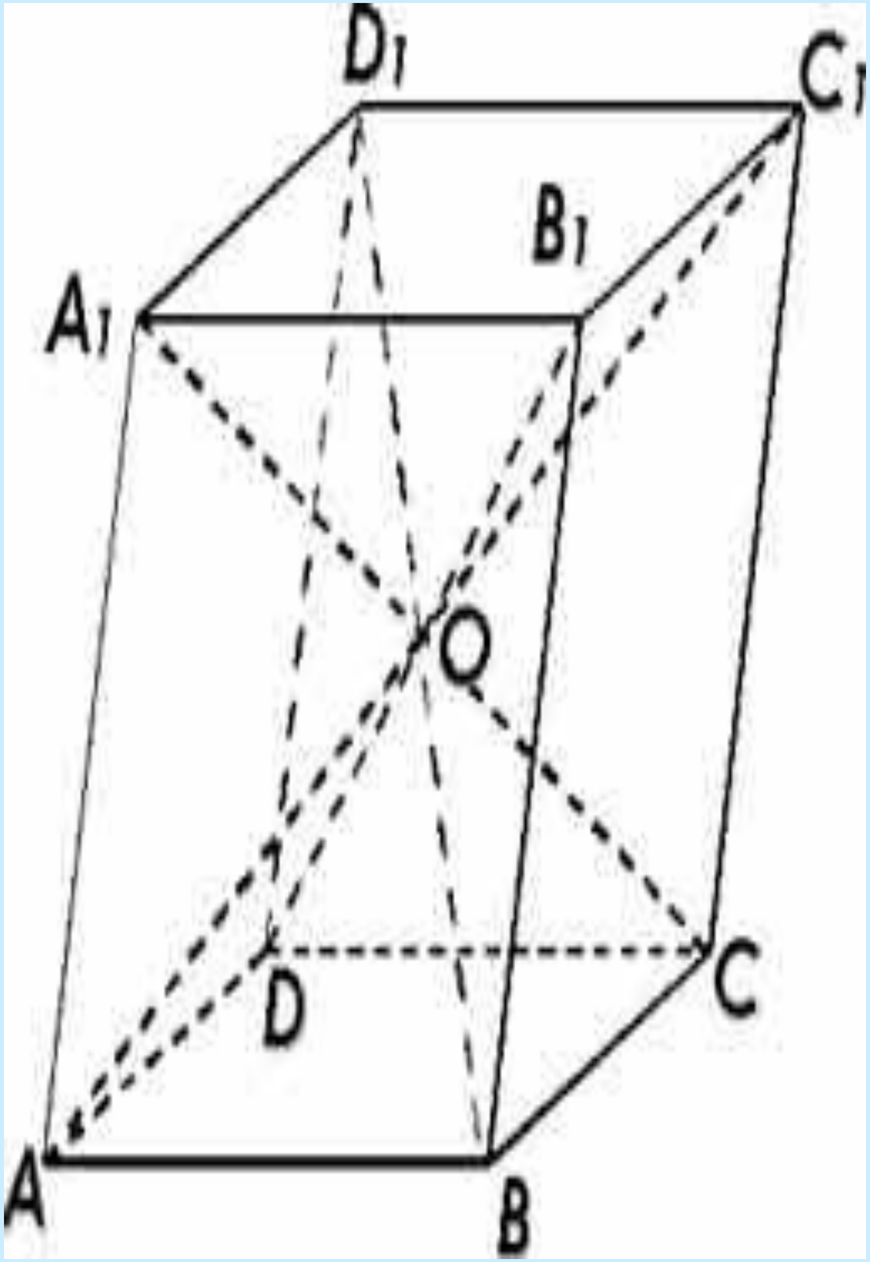

**Параллелепипед**

**Грани** из которых составлен параллелепипед (ABCD) – параллелограммы. **Ребра** (AB) – стороны параллелепипеда. **Диагональ** – отрезок, соединяющий противоположные вершины. Параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин и 4 диагонали.

**Свойства параллелепипеда:**
1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.
2. Диагонали параллелепипеда пересекаются с одной точке и делятся этой точкой пополам.
Докажем 1-е свойство параллелепипеда:

Докажем параллельность граней ABB1A1 и ADD1A1 . Так как ABCD и ADD1A1 – параллелограммы , то AB II DC и AA1 II DD1. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA1 одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD1 другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB1C1 и ADD1A1 параллельны.

Теперь докажем равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда – параллелограммы, то AB=DC и AA1=DD1. По этой же причине стороны углов A1AB и D1DC соответственно сонаправлены и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB1A1соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC1D1, поэтому эти параллелограммы равны.




Докажем второе свойство:

*Рассмотрим четырехугольник A1D1CB, диагональ которого A1C и D1B являются диагоналями параллелепипеда. Так как A1D1¦BC и A1D1=BC, то A1D1CB – параллелограмм. Поэтому диагонали A1C и D1B пересекаются в некоторой точке О и этой точкой делятся пополам. Далее рассмотрим четырехугольник AD1C1B. Он также является параллелограммом и, следовательно, его диагонали AC1 и D1B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D1B является точка О. Таким образом, диагонали A1C, AC1 и D1B пересекаются в точке О и делятся этой точкой пополам. Наконец, рассматривая четырехугольник A1B1CD, точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DB1 параллелепипеда проходит через точку О и делится ею пополам.*

***Многогранник называется <u>правильным</u>, если все его грани - равные*** *правильные* ***многоугольники.***

***К каждой вершине правильного многогранника сходится одно и то же число рёбер.***

***Сумма плоских углов при вершине правильных многогранников не больше пяти. Все двугранные углы при рёбрах и все многогранные углы при вершинах правильного многогранника равны.***

***Доказано, что правильных многогранников только 5 типов:***

***четырёхгранник (тетраэдр),***

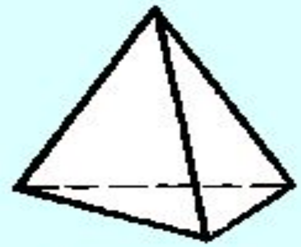
***шестигранник или куб ( гексаэдр),***

***восьмигранник (октаэдр),***

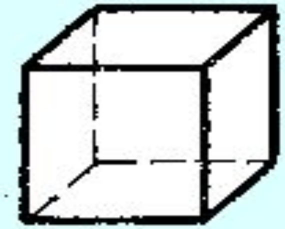
***двенадцатигранник (додекаэдр),***

***двадцатигранник (икосаэдр).***

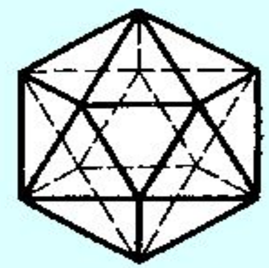
*Других типов правильных многогранников не существует. Этот факт был известен уже древнегреческим геометрам и им посвящена заключительная, XII книга знаменитых начал Евклида. (Евклид доказал этот факт ещё в 3 веке до н.э.) Эти многогранники часто называют Платоновыми телами в идеалистической картине мира, данной древнегреческим мыслителем Платоном. Четыре из них олицетворяли четыре стихии: тетраэдр-огонь, куб-земля, октаэдр-воздух, икосаэдр-вода, додекаэдр-все мироздание, его по латыни стали называть guinta essentia («пятая сущность»).*



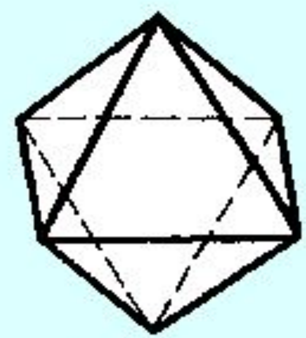
Тетраэдр



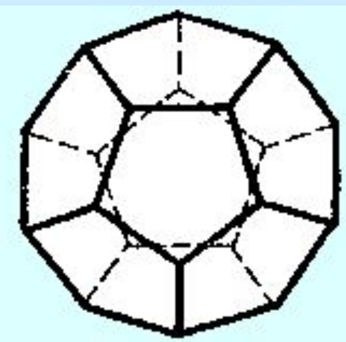
Куб



Икосаэдр



Октаэдр



Додекаэдр

*Декарт, обнаружил удивительную закономерность, что если*

*В - число вершин,*

*Р - число ребер,*

*Г - число граней,*

*то*

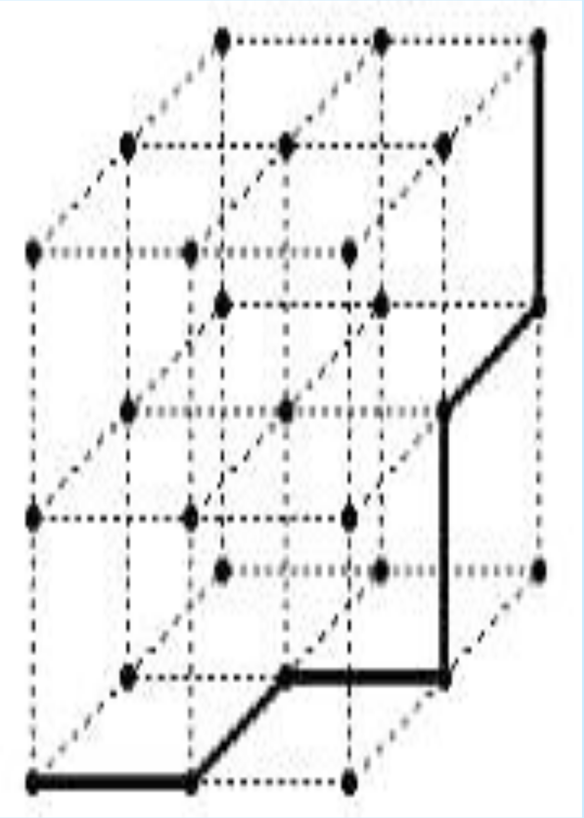
*В-Р+Г=2*

| Тела Платона | В | Р | Г |
|---|---|---|---|
| тетраэдр | 4 | 6 | 4 |
| Куб | 8 | 12 | 6 |
| Октаэдр | 6 | 12 | 8 |
| Додекаэдр | 20 | 30 | 12 |

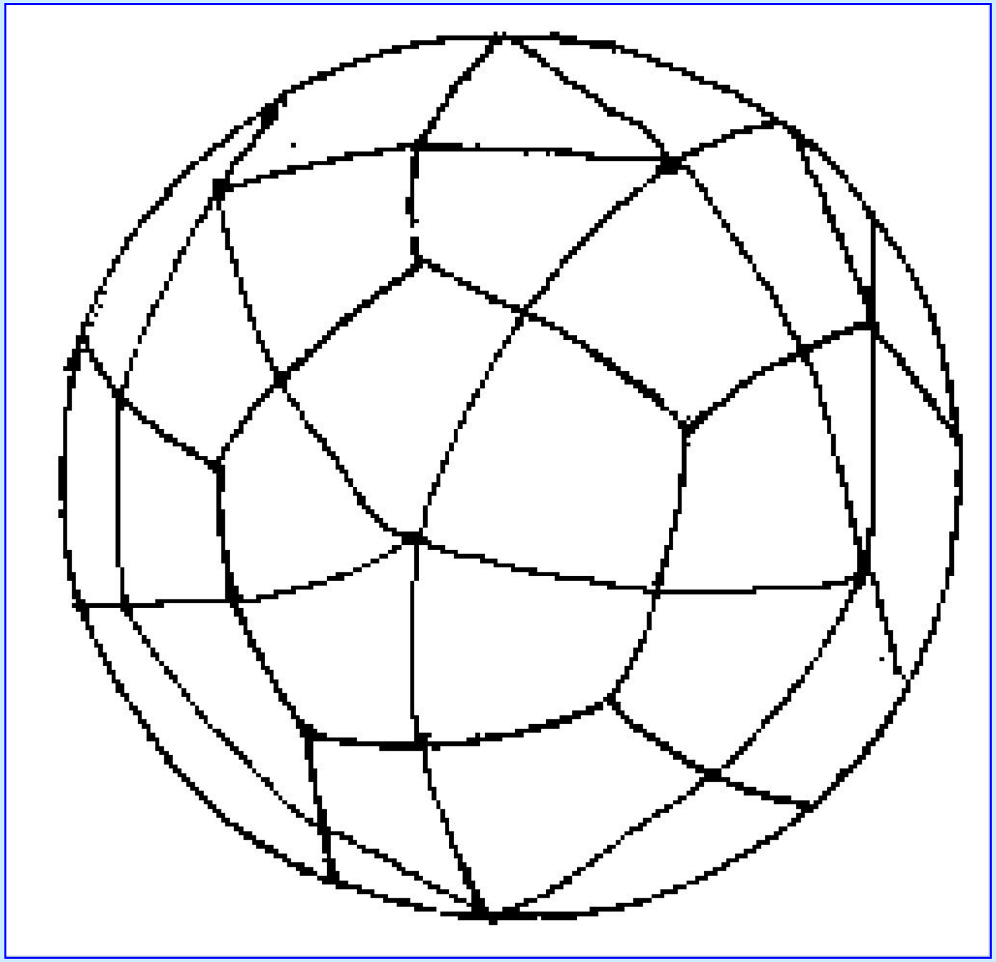
# Многогранники вокруг нас

*Где возможно увидеть эти удивительные тела? В очень красивой книге немецкого биолога начала нашего века Э. Геккеля "Красота форм в природе" можно прочитать такие строки: "Природа вскармливает на своем лоне неисчерпаемое количество удивительных созданий, которые по красоте и разнообразию далеко превосходят все созданные искусством человека формы". Создания природы красивы и симметричны. Это неотделимое свойство природной гармонии. Но здесь мы видим и одноклеточные организмы - феодарии, форма которых точно передает икосаэдр. Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет* наибольший объем и наименьшую площадь поверхности*. Это геометрическое свойство помогает морскому микроорганизму преодолевать давление водной толщи.*

*Интересно и то, что именно икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники, направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень - икосаэдр. Его геометрические свойства, о которых говорилось выше, позволяют экономить генетическую информацию. Правильные многогранники - самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников. Так, куб передает форму кристаллов поваренной соли NaCl, монокристалл алюминиево-калиевых квасцов (KAlSO4)2 12H2O имеет форму октаэдра, кристалл сернистого колчедана FeS имеет форму додекаэдра, сурьменистый сернокислый натрий - тетраэдра, бор - икосаэдра. Правильные многогранники определяют форму кристаллических решеток некоторых химических веществ.*



*Идеи Пифагора, Платона, И.Кеплера о связи правильных многогранников с гармоничным устройством мира уже в наше время нашли свое продолжение в интересной научной гипотезе, авторами которой (в начале 80-х годов) явились московские инженеры В.Макаров и В.Морозов. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обусловливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников: икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами узлами, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.*



Если нанести на глобус очаги наиболее крупных и примечательных культур и цивилизаций Древнего мира, можно заметить закономерность в их расположении относительно географических полюсов и экватора планеты. Многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль икосаэдрово-додекаэдровой сетки. Еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер: тут располагаются очаги древнейших культур и цивилизаций: Перу, Северная Монголия, Гаити, Обская культура и другие. В этих точках наблюдаются максимумы и минимумы атмосферного давления, гигантские завихрения Мирового океана, здесь шотландское озеро Лох-Несс, Бермудский треугольник. Дальнейшие исследования Земли, возможно, определят отношение к этой красивой научной гипотезе, в которой, как видно, правильные многогранники занимают важное место.

*Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором. Заметим также, что анализируя картину можно догадаться о природе источника света для всей композиции - это окно, которое отражается левой верхней части сферы.*

## *МНОГОГРАННИКИ В ИСКУССТВЕ*

*Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов. Большое количество различных многогранников может быть получено объединением правильных многогранников, а также превращением многогранника в звезду. Для преобразования многогранника в звезду необходимо заменить каждую его грань пирамидой, основанием которой является грань многогранника. Изящный пример звездчатого додекаэдра можно найти в работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен внутрь стеклянной сферы.*

Фигуры, полученные объединением правильных многогранников, можно встретить во многих работах Эшера. Наиболее интересной среди них является гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры. Таким образом нам необходимо отвлечься от привычного восприятия картины и попытаться взглянуть на нее свежим взором, чтобы представить ее целиком. Этот аспект данной картины является еще одним предметом восхищения математиков творчеством Эшера.