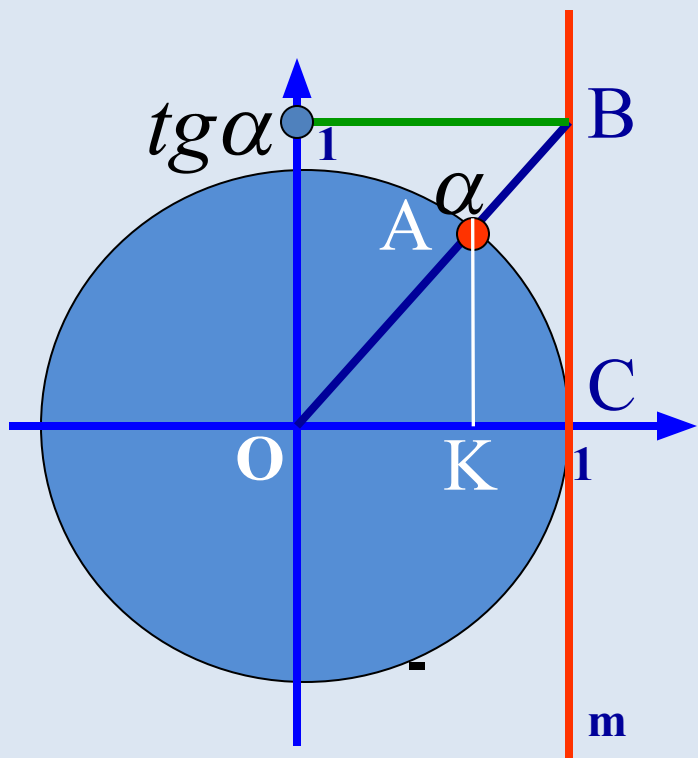


**Решение уравнений $\operatorname{tg}x=a$.
Понятие арктангенса числа.**

Преподаватель математики СПб СВУ МО РФ
Лошак В.С.

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА



т-ось тангенсов

$\triangle OAK$ подобен $\triangle OBC$

$$\frac{AK}{OK} = \frac{BC}{OC}$$

$$BC = \frac{AK \cdot OC}{OK}$$

$$AK = \sin \alpha$$

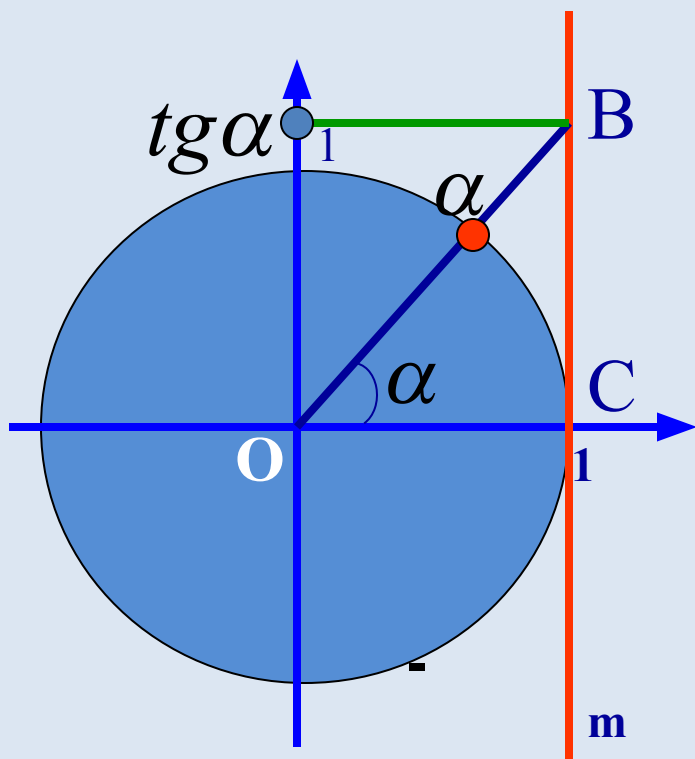
$$OK = \cos \alpha$$

$$OC = 1$$

$$BC = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

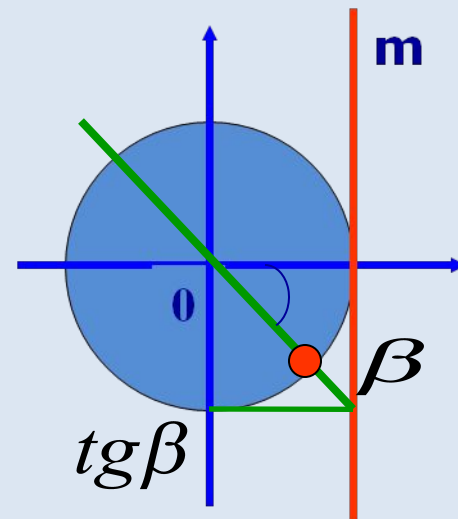
$$BC = \operatorname{tg} \alpha$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

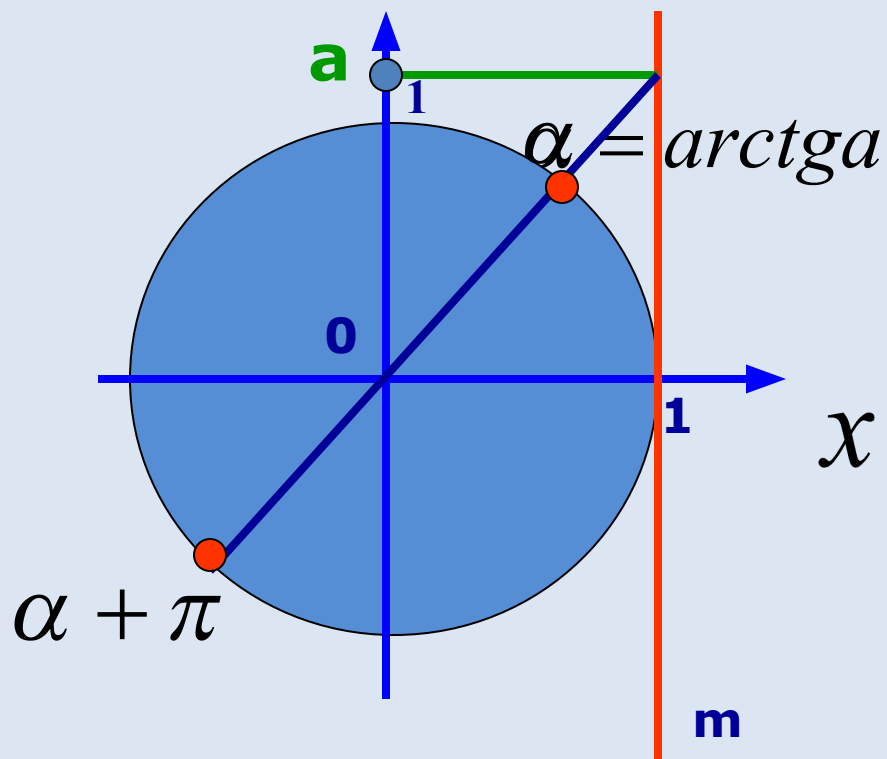


Тангенс числа α равен ординате точки пересечения оси тангенсов и прямой, соединяющей точку, изображающую число α на единичной окружности, с началом координат.

$$BC = tg\alpha$$



Уравнение $\operatorname{tg}x=a$



$$\operatorname{tg}x = a, a \in R$$

$$x = \alpha + \pi k, k \in Z.$$

$$x = \operatorname{arctg}a + \pi k, k \in Z.$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Определение. Арктангенсом числа a называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a .

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, a \in R$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2},$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

- Например

$$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}; \quad \text{т.к.} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\operatorname{arctg} 0 = 0; \quad \text{т.к.} \quad -\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}; \operatorname{tg} 0 = 0.$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}; \quad \text{т.к.} \quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}; \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

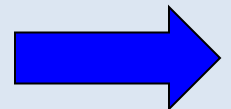
Основные формулы

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a, \operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), a \in \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

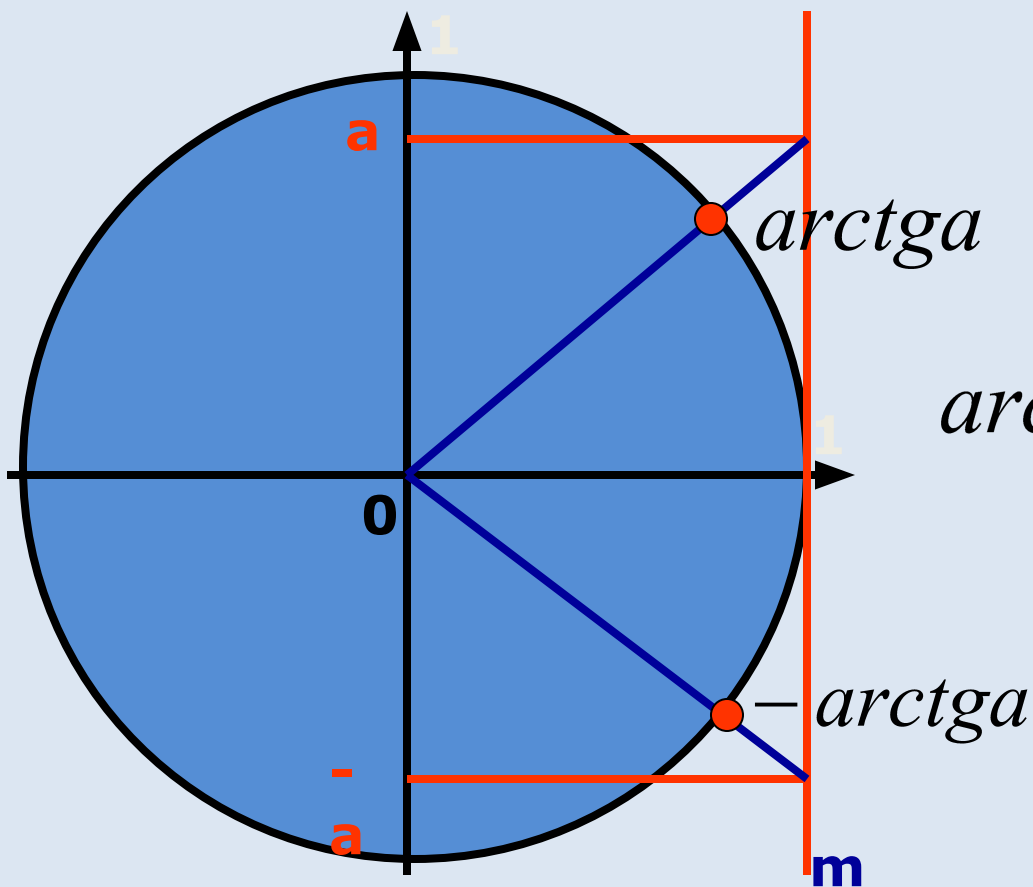
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} \alpha) = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} a) = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$



АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Основные формулы



$$\arctg(-a) = -\arctg a$$



АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

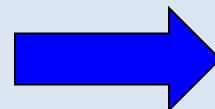
Основные формулы

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arctg} a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos(\operatorname{arctg} a) = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} a)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$$



АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Основные формулы

- **Вычислите:**

1. $2\operatorname{arctg}1 + 3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - 3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} =$
 $= \frac{\pi}{2} - 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

2. $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\operatorname{arcsin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6 \cdot \frac{\pi}{3} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi + \pi = 3\pi$

3. $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 2\operatorname{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3 \cdot \frac{\pi}{6} + 2 \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) =$
 $= -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Основные формулы

• Например

$$tg(\operatorname{arctg} a) = a$$

$$4. \quad tg(\operatorname{arctg} \sqrt{3}) = \sqrt{3} \qquad 5. \quad tg\left(\operatorname{arctg} \frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$6. \quad \sin\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$7. \quad \cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{5}\right)\right) = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{26}{25}}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos(\operatorname{arctg} a) = \sqrt{\frac{1}{1 + a^2}}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Основные формулы

Вычислите:

$$7. \cos(5 \cdot \operatorname{arctg} 1) = \cos \frac{5}{4} \pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$8. \operatorname{ctg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} \right)} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$9. \operatorname{tg} \left(\underbrace{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}}_{\alpha} \right) = \frac{2 \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg}^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2} \right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Основные формулы

- Вычислите:

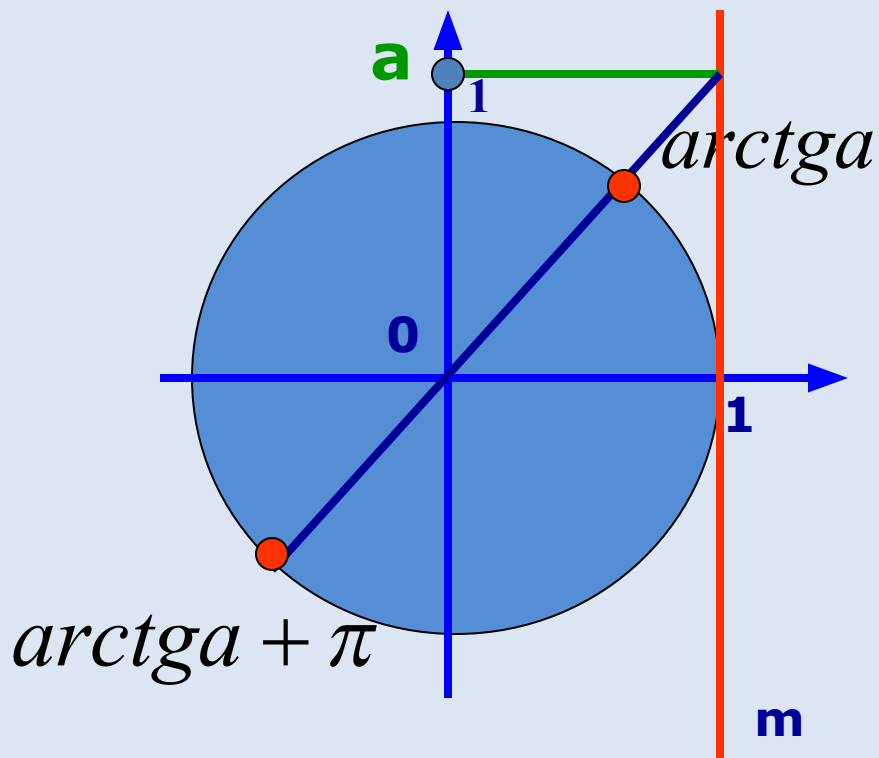
$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$10. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$$

$$11. \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{5}{7}\pi\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\pi - \frac{2}{7}\pi\right)\right) = \\ = \operatorname{arctg}\left(-\operatorname{tg}\frac{2}{7}\pi\right) = -\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{2}{7}\pi\right) = -\frac{2}{7}\pi$$

Уравнение $\operatorname{tg}x=a$

$$\operatorname{tg}x = a, a \in \mathbb{R}$$



$$x = \operatorname{arctga} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg}x=a$

• **Пример 1.**

$$\operatorname{tg}x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Пример 2.

$$\operatorname{tg}2x = 4$$

$$2x = \operatorname{arctg}4 + \pi k$$

$$x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}4 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}4 + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Уравнение $\operatorname{tg}x=a$

• **Пример 3.** $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}; \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k;$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k; \quad 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$2x = \frac{7}{12}\pi + \pi k; \quad x = \frac{7}{24}\pi + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{7}{24}\pi + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$