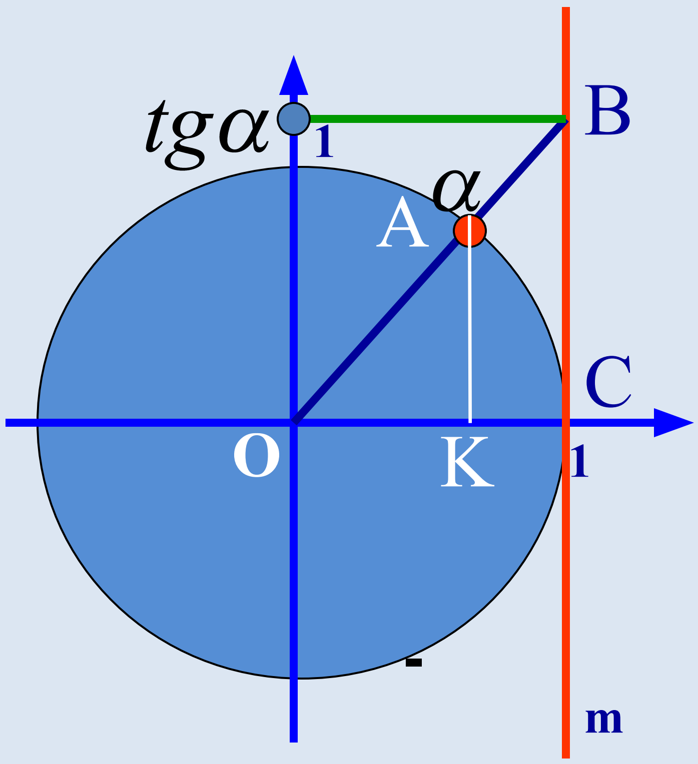
Решение уравнений tgx=a.
Понятие арктангенса числа.

Преподаватель математики СПб СВУ МО РФ
Лошак В.С.

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА



m-ось тангенсов

ΔOAK **подобен** ΔOBC

$$\frac{AK}{OK} = \frac{BC}{OC} \qquad BC = \frac{AK \cdot OC}{OK}$$

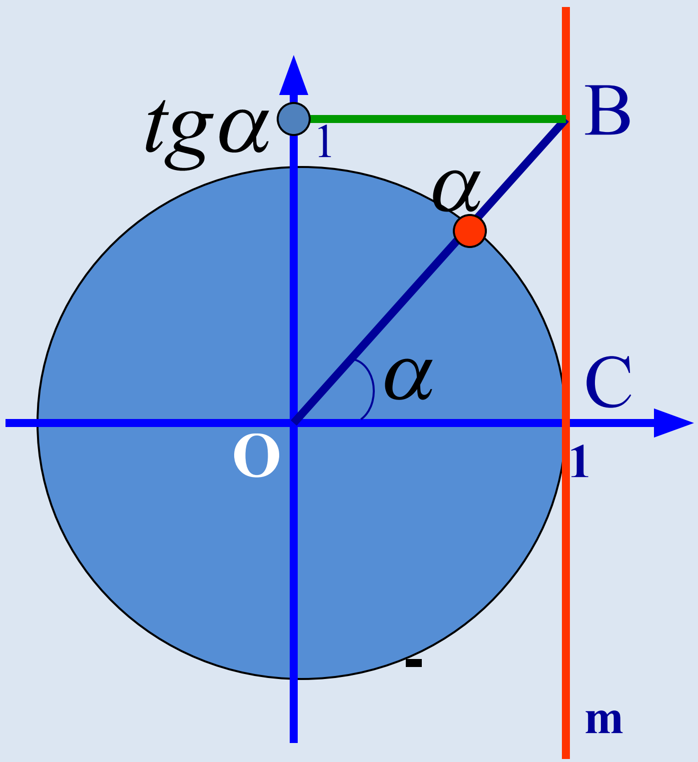
$$AK = \sin\alpha$$

$$OK = \cos\alpha \qquad BC = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$OC = 1$$

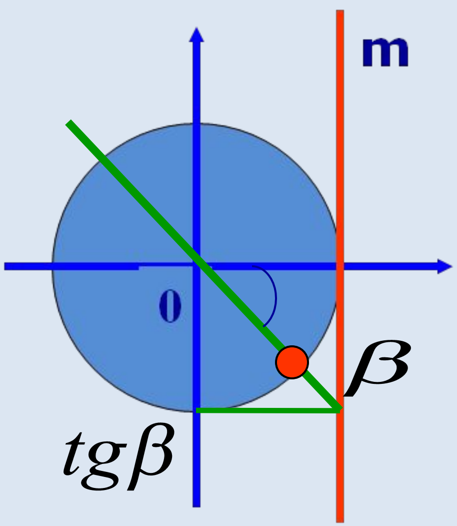
$$BC = tg\alpha$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

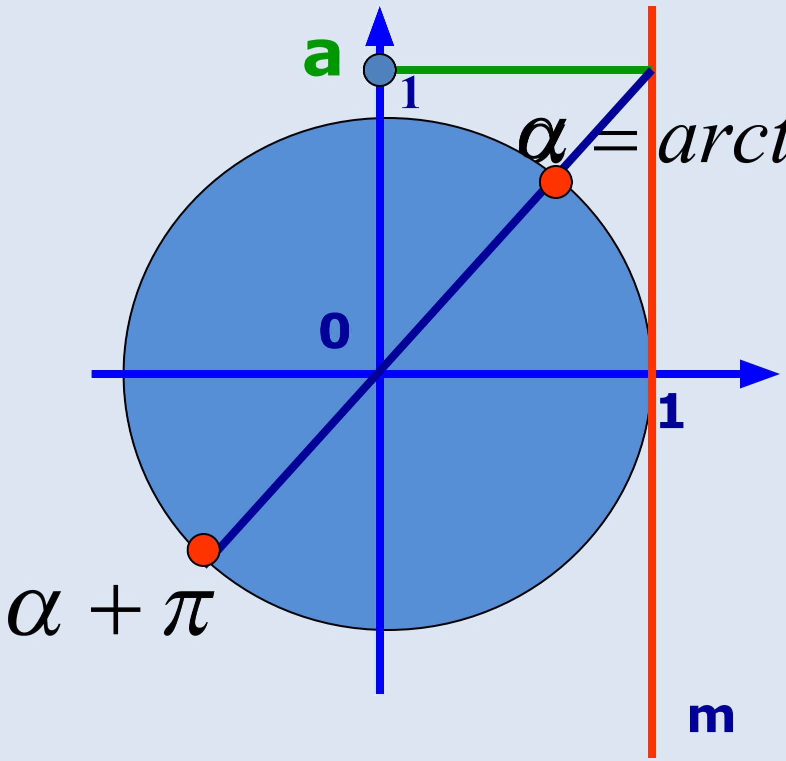


Тангенс числа α равен ординате точки пересечения оси тангенсов и прямой, соединяющей точку, изображающую число α на единичной окружности, с началом координат.

$$BC = tg\alpha$$



Уравнение tgx=a



$$tgx = a, a \in R$$

$$x = \alpha + \pi k, k \in Z.$$

$$x = arctga + \pi k, k \in Z.$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

Определение. Арктангенсом числа а называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен а.

$$tg(arctga) = a, a \in R$$

$$-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2},$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА

- **Например**

$$arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6};$$ **т.к.** $$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2};tg\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$arctg0=0;$$ **т.к.** $$-\frac{\pi}{2}<0<\frac{\pi}{2};tg0=0.$$

$$arctg1=\frac{\pi}{4};$$ **т.к.** $$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2};tg\frac{\pi}{4}=1.$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

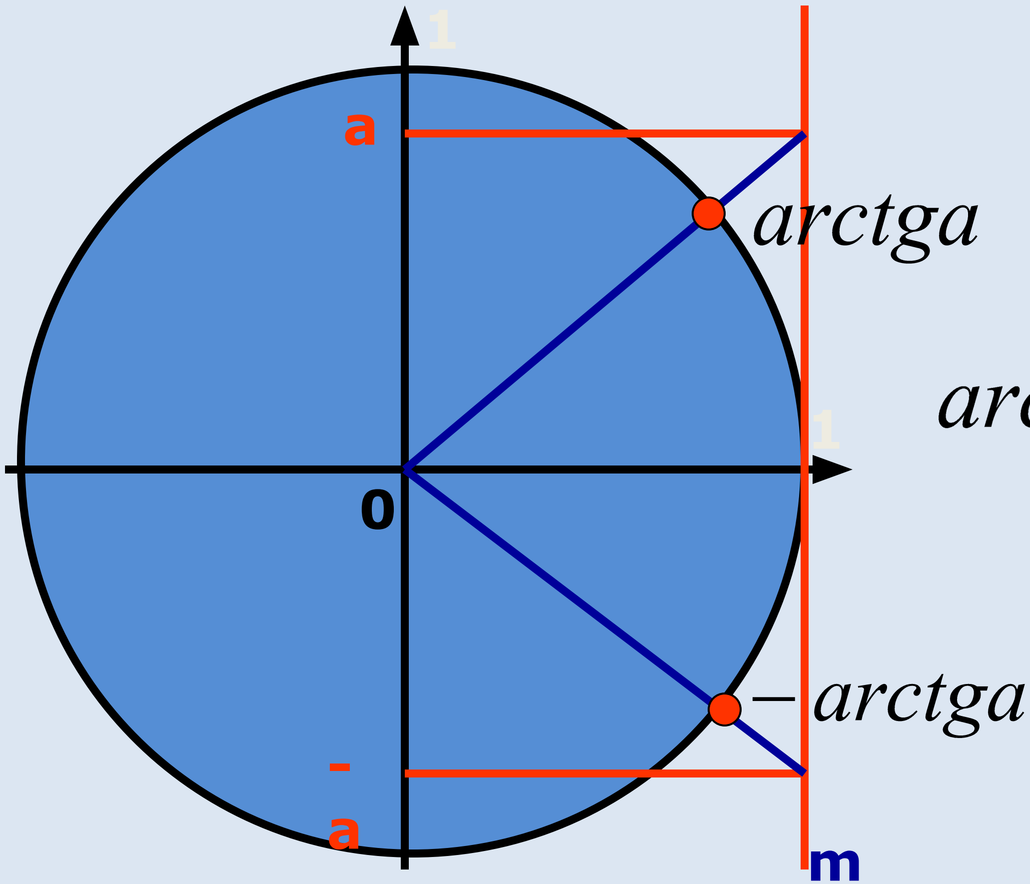
$$tg(arctg a) = a, arctg a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), a \in R.$$

$$arctg(-a) = -arctg a$$

$$arctg(tg\alpha) = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(arctg a) = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы



$$arctg(-a) = -arctga$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}$$

$$\alpha = arctga$$

$$arctga \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(arctga) = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2(arctga)}} = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

- **Вычислите:**

1. $$2arctg1+3arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{\pi}{4}-3arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-3\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$$

2. $$6arctg\sqrt{3}-4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=6\cdot\frac{\pi}{3}+4\cdot\frac{\pi}{4}=\ 2\pi+\pi=3\pi$$

3. $$3arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3\cdot\frac{\pi}{6}+2\cdot\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{5}{6}\pi=\ \frac{7}{6}\pi$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

- **Например**

$$tg(arctg\,a) = a$$

4. $tg\left(arctg\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$

5. $tg\left(arctg\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$

6. $\sin\left(arctg\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

7. $\cos\left(arctg\left(-\dfrac{1}{5}\right)\right) = \sqrt{\dfrac{1}{1+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{26}{25}}} =$

$= \sqrt{\dfrac{25}{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}} = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$

$$\cos(arctg\,a) = \sqrt{\frac{1}{1+a^2}}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

Вычислите:

7. $$\cos(5\cdot arctg1)=\cos\frac{5}{4}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. $$ctg\left(arctg\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{tg\left(arctg\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

$$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$$

9. $$tg\left(2\underbrace{arctg\frac{1}{2}}_{\alpha}\right)=\frac{2tg\left(arctg\frac{1}{2}\right)}{1-tg^2\left(arctg\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

АРКТАНГЕНС ЧИСЛА
Основные формулы

$$arctg(tg\alpha) = \alpha, \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

- **Вычислите:**

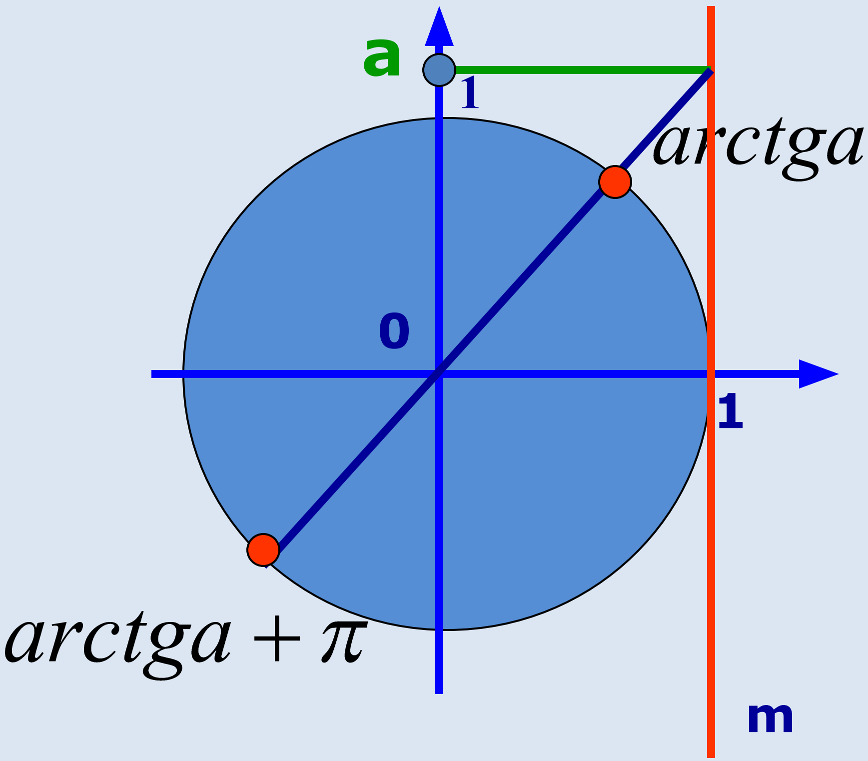
10. $$arctg\left(tg\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}$$

11. $$arctg\left(tg\frac{5}{7}\pi\right) = arctg\left(tg\left(\pi - \frac{2}{7}\pi\right)\right) =$$

$$= arctg\left(-tg\frac{2}{7}\pi\right) = -arctg\left(tg\frac{2}{7}\pi\right) = -\frac{2}{7}\pi$$

Уравнение tgx=a

$$tgx = a, a \in R$$



$$x = arctga + \pi k, k \in Z.$$

Уравнение tgx=a

- **Пример 1.**

$$tgx = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Пример 2.

$$tg2x = 4$$

$$2x = arctg4 + \pi k$$

$$x = \frac{1}{2}arctg4 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Ответ: $\frac{1}{2}arctg4 + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

Уравнение tgx=a

- **Пример 3.** $ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$tg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3};$ $2x-\frac{\pi}{4}=arctg\sqrt{3}+\pi k;$

$2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{3}+\pi k;$ $2x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}+\pi k;$

$2x=\frac{7}{12}\pi+\pi k;$ $x=\frac{7}{24}\pi+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$

Ответ: $\frac{7}{24}\pi+\frac{\pi k}{2},k\in Z.$