Решение тригонометрических уравнений различными способами

Решите уравнение sin x – cos x = 1

Решение:

1. Преобразуем данное уравнение к виду

$\sin x - (1 + \cos x) = 0.$

2. Применяя формулы половинного и двойного аргумента

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}, \qquad \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

получим:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0;$$

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$$

3. Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла, поэтому

$$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ \sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=0;\end{array}\right.$$

$$\cos\frac{x}{2}=0;$$

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k;$$

$$x=\pi+2\pi k; k\in Z;$$

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=0$$

однородное уравнение I степени

Делим обе его части на $\cos\frac{x}{2}$

Получим

$$tg\frac{x}{2}-1=0;$$

$$tg\frac{x}{2}=1;$$

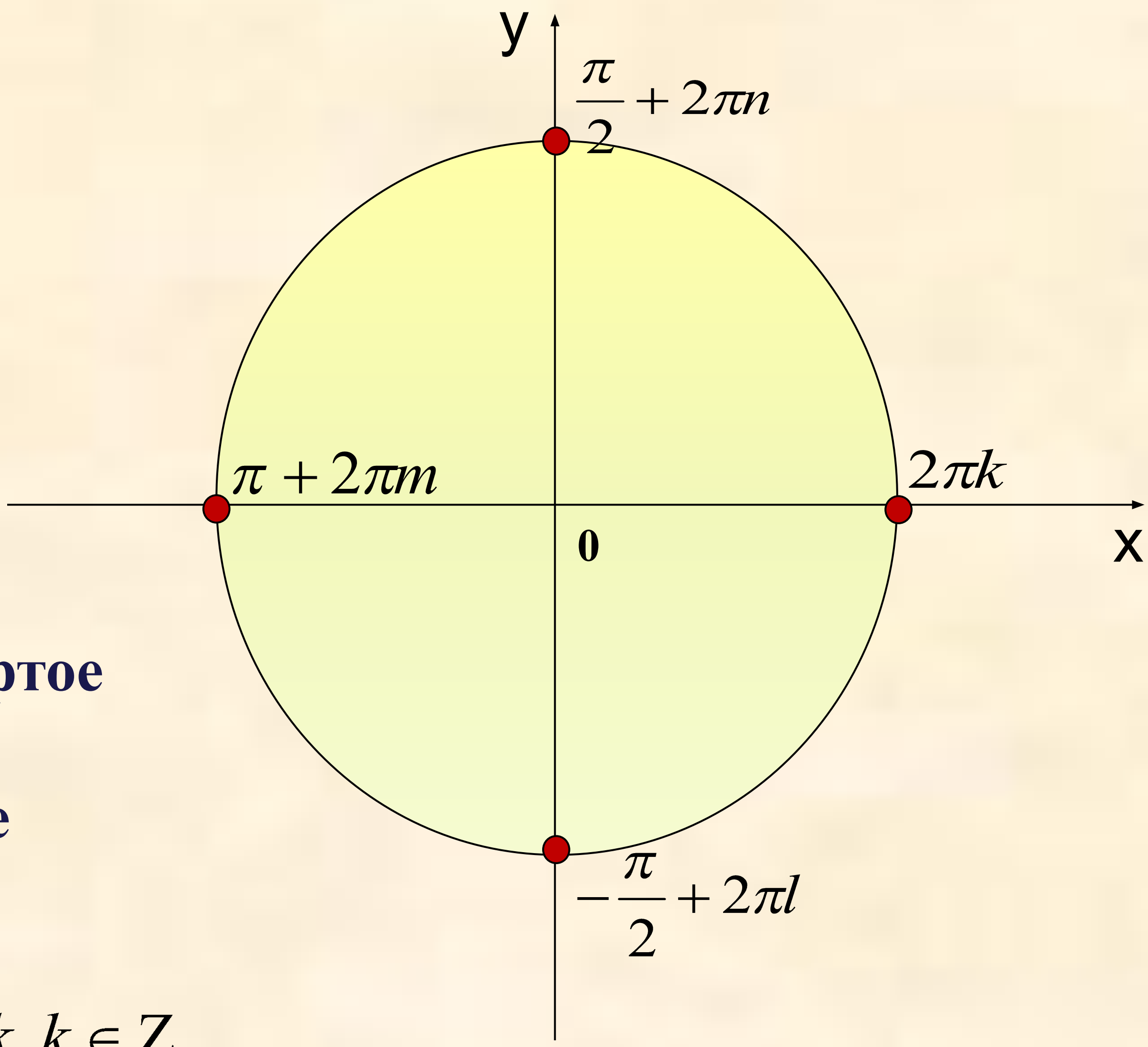
$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n;$$

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n; n\in Z.$$

$$Ответ: x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$$

$$x=\pi+2\pi k, k\in Z.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pi + 2\pi m, m \in Z, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in Z. \end{array}\right.$$



Первое и четвертое решения – посторонние

$$Ответ: x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

Убедимся, что решения данного уравнения

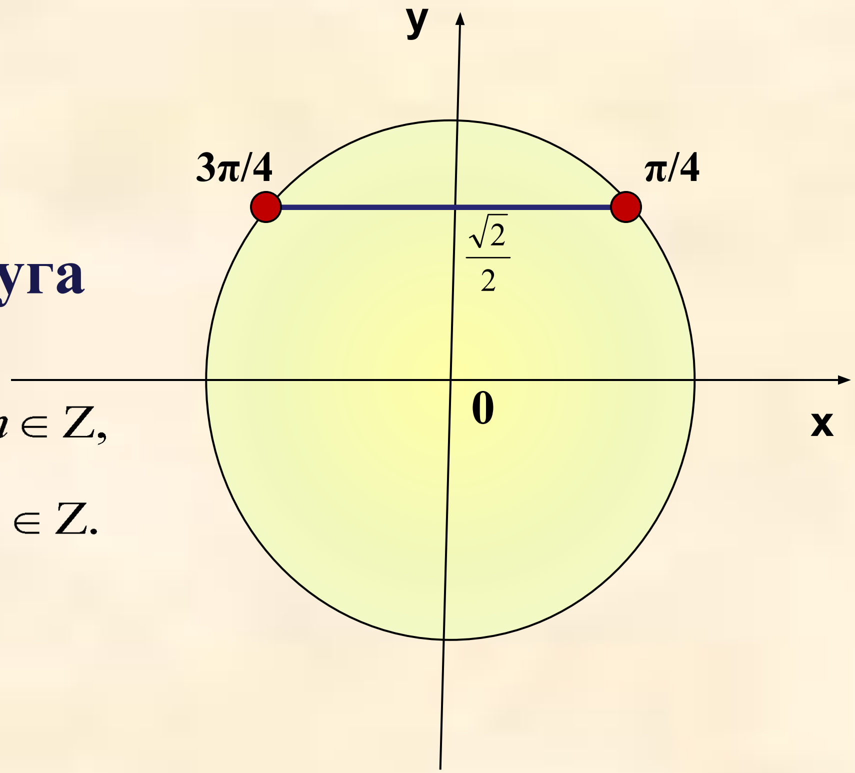
$$x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$$ **и** $$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; \end{array}\right.$$ **совпадают**

Для этого решим уравнение

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

с помощью тригонометрического круга

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$



Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1$

Решение:

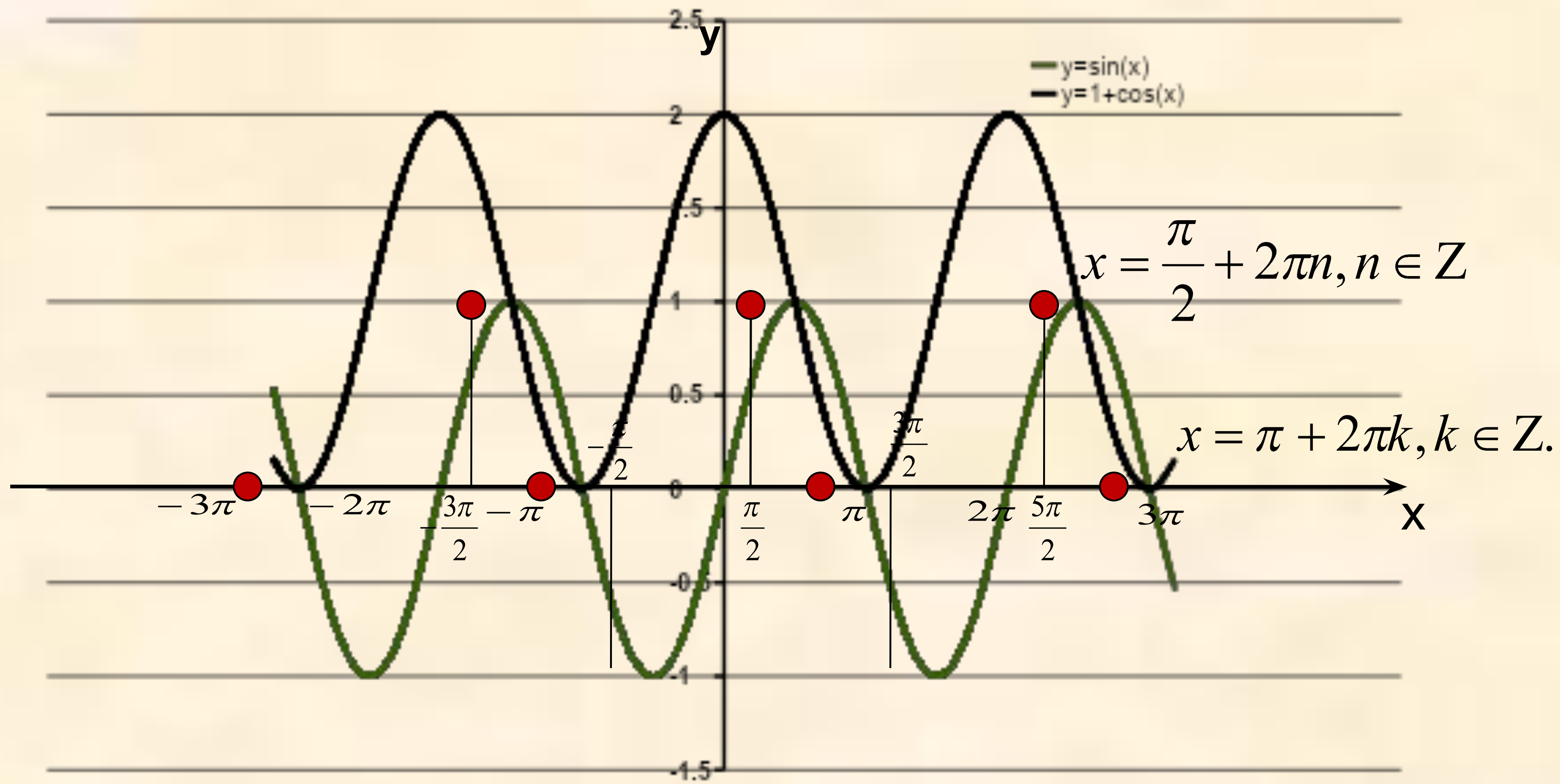
1. Преобразуем данное уравнение к виду

$$\sin x = 1 + \cos x.$$

2. Построим графики функций $y=\sin x$ и $y=1+\cos x$ в одной системе координат.

3. Найдем абсциссы точек пересечения графиков функций.

$\sin x - \cos x = 1$



$$Ответ: x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$$