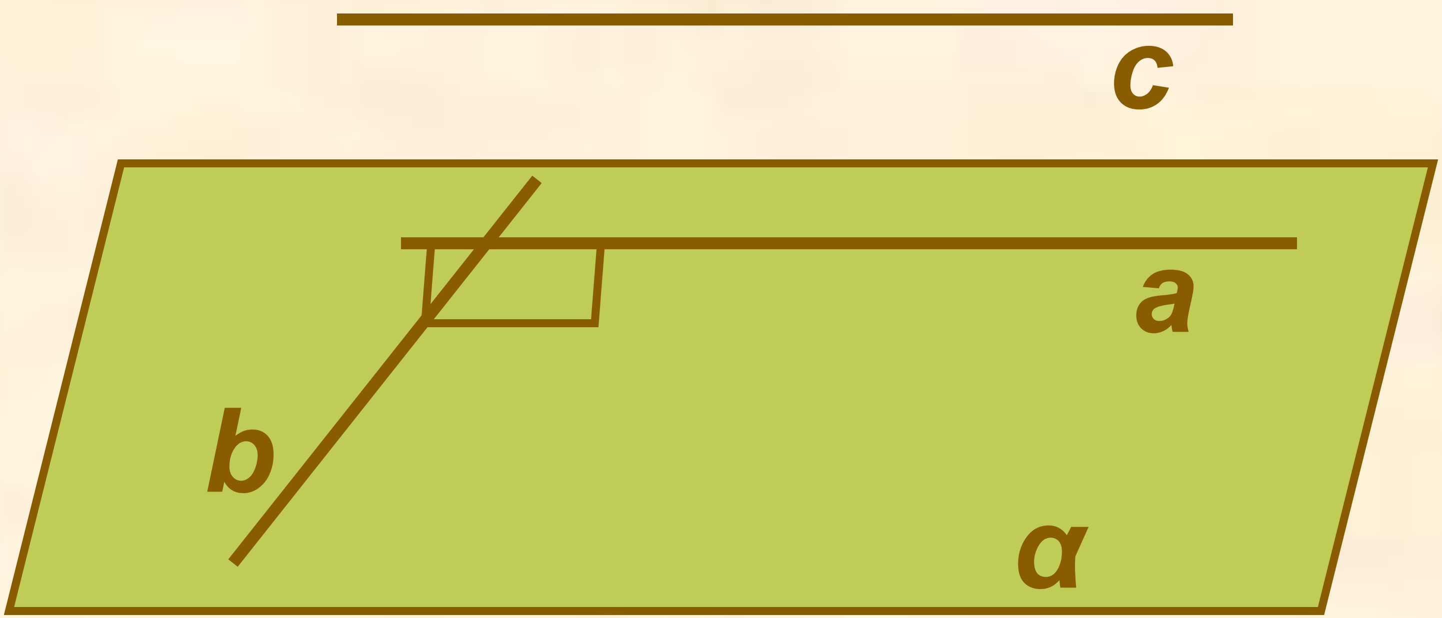
Перпендикулярность прямых и плоскостей

Перпендикулярные прямые в пространстве

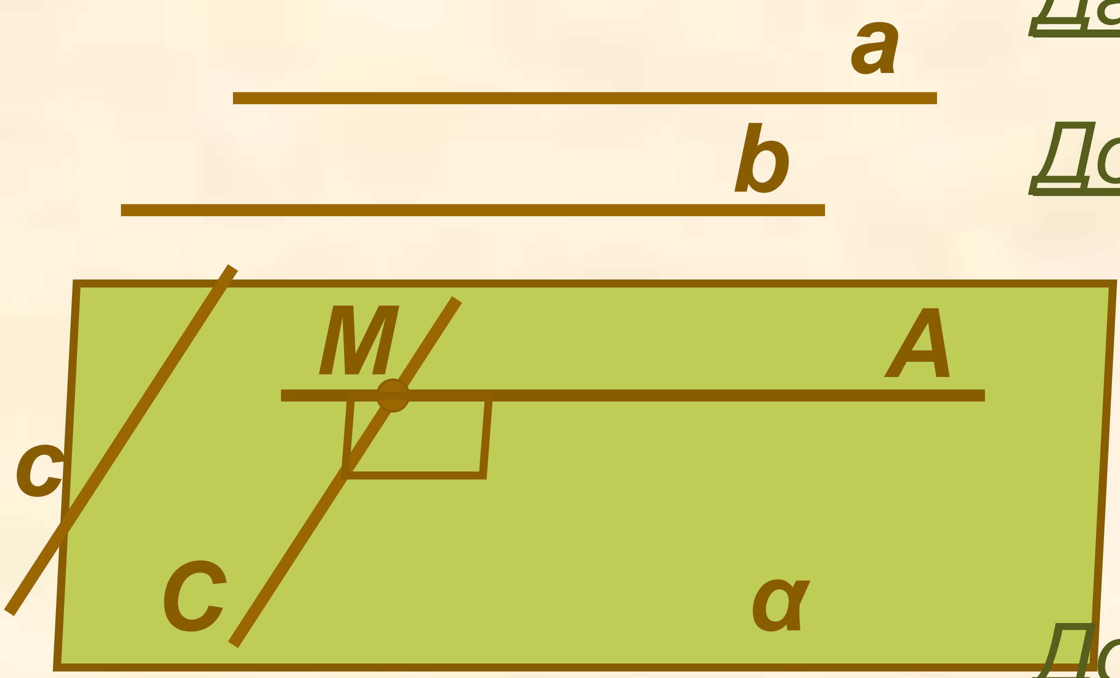
Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90º



$a \perp b$ $\qquad$ $c \perp b$

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

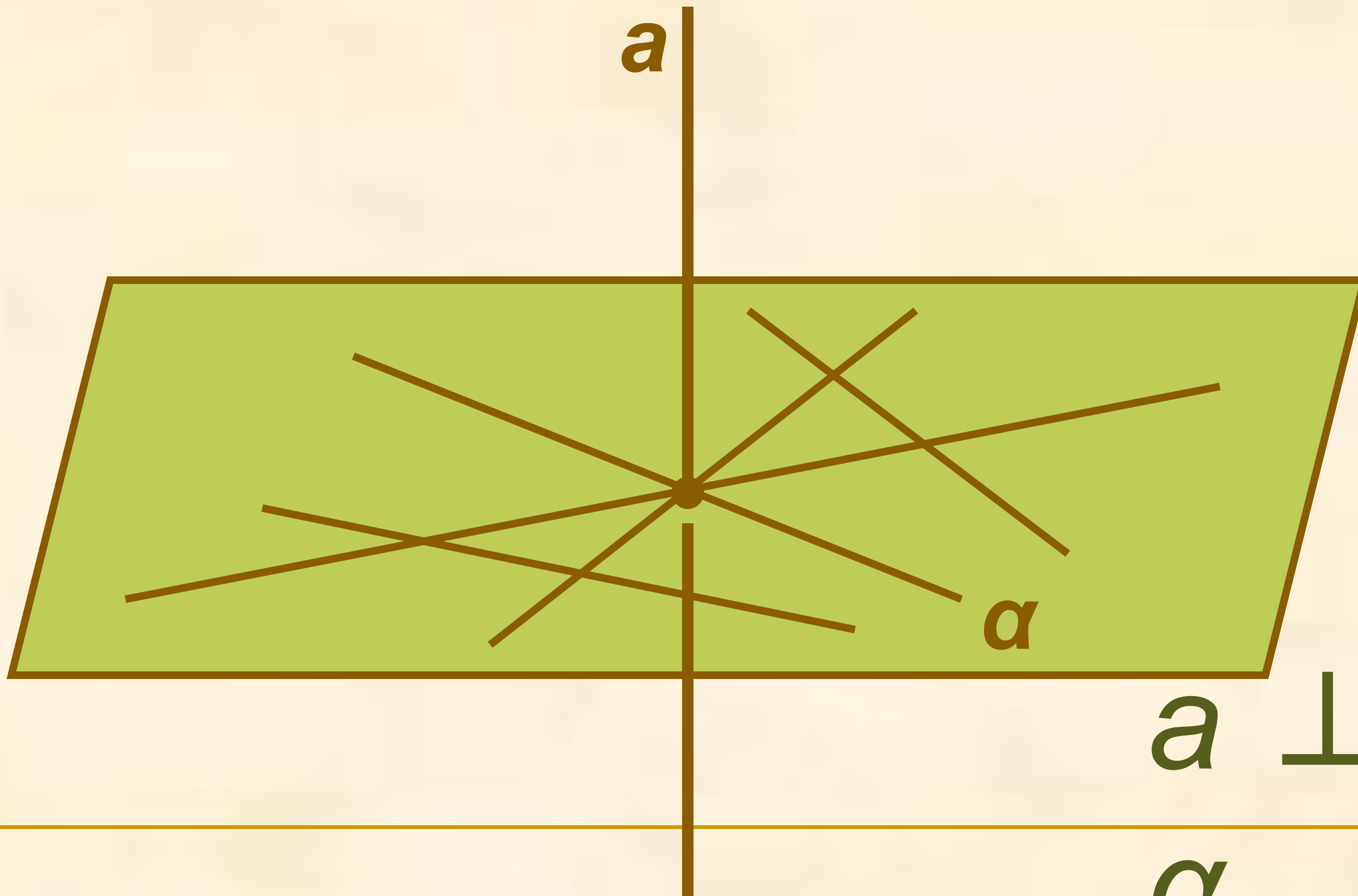


<u>*Дано:*</u> *$a \parallel b$, $a \perp c$*

<u>*Доказать:*</u> *$b \perp c$*

<u>*Доказательство:*</u>

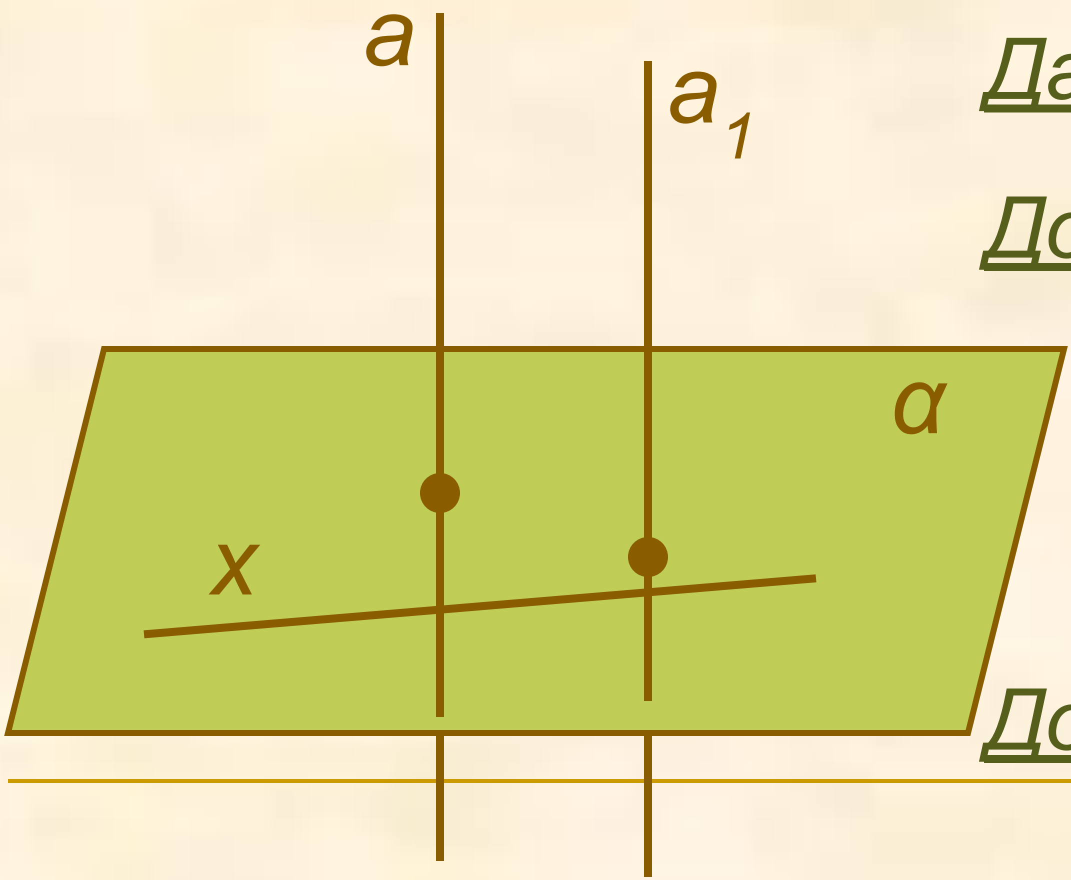
Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости



$a \perp \alpha$

Теорема 1

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.



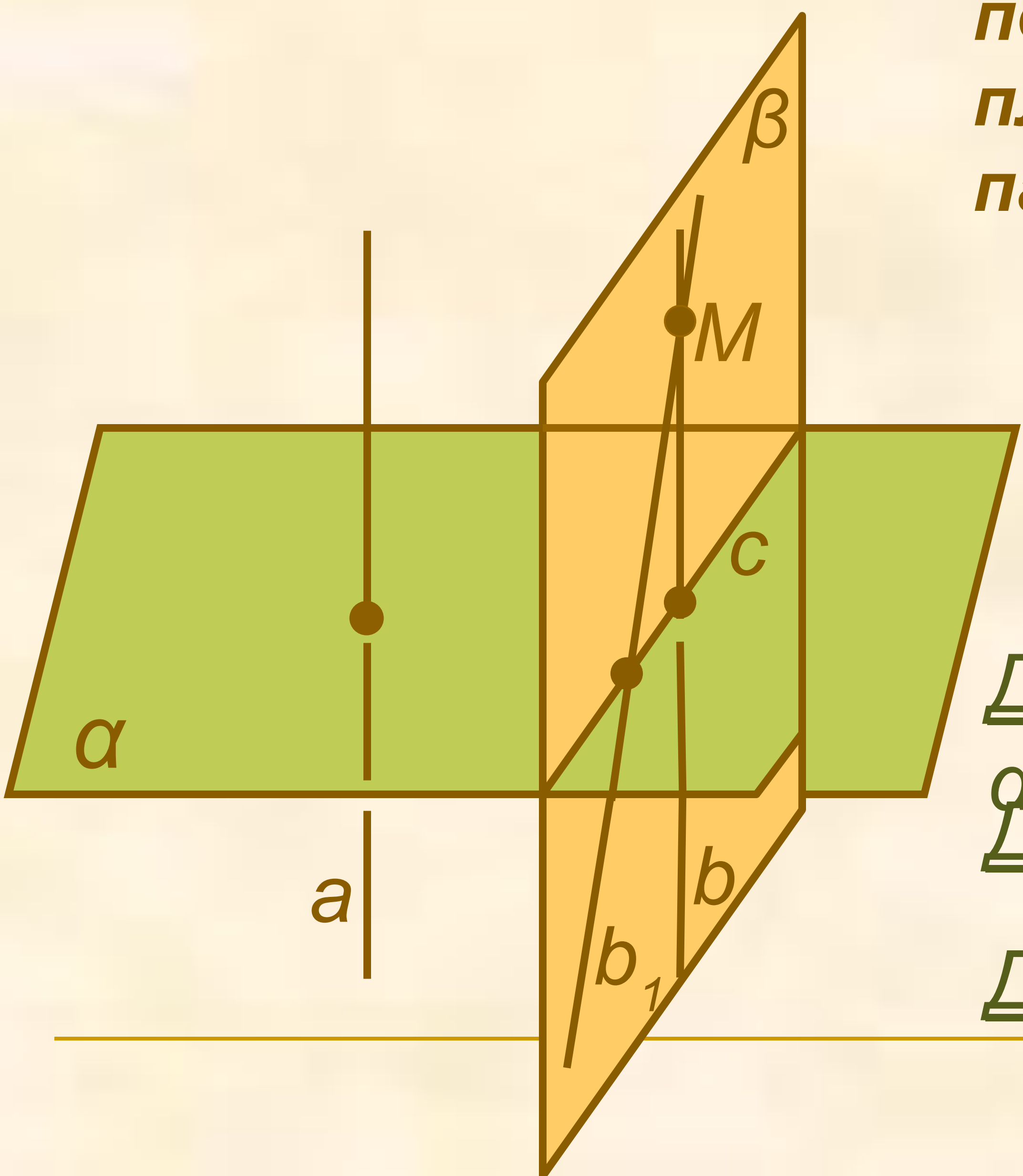
__Дано:__ $a \parallel a_1$; $a \perp \alpha$

__Доказать:__ $a_1 \perp \alpha$

__Доказательство:__

Теорема 2

Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.



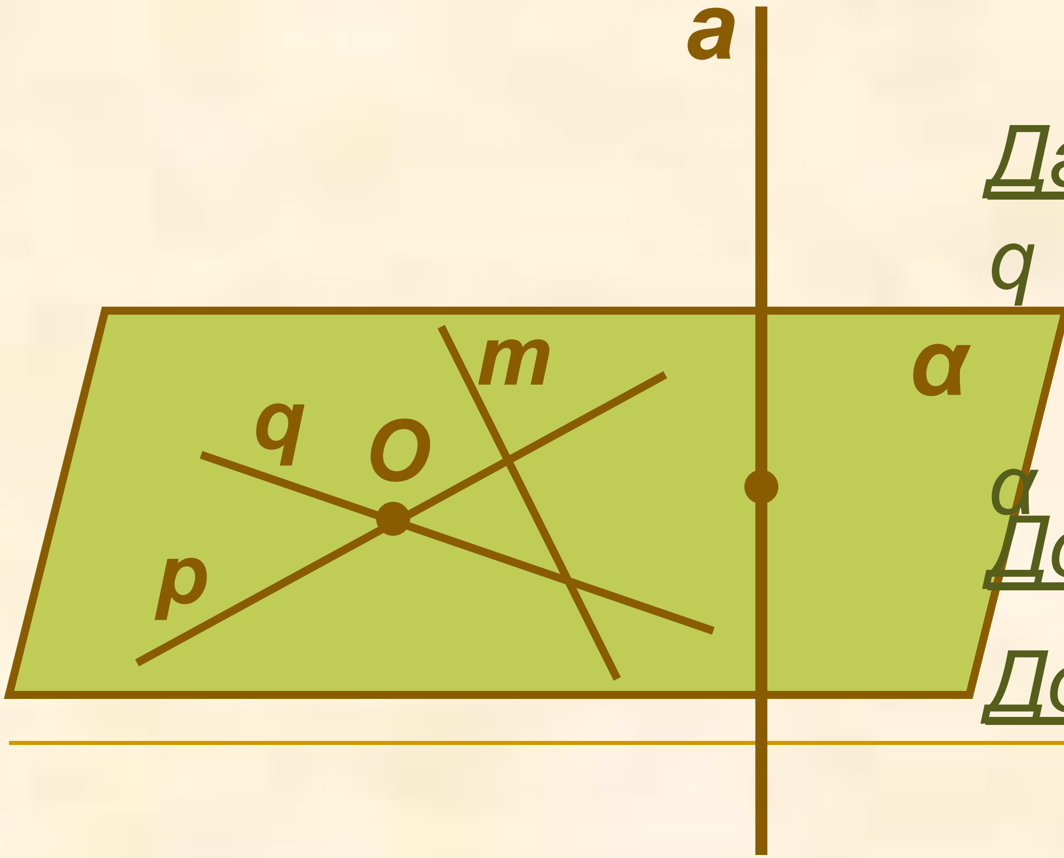
<u>Дано:</u> $a \perp \alpha$; $b \perp \alpha$

<u>Доказать:</u> $a \parallel b$

<u>Доказательство:</u>

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.



<u>Дано:</u> $a \perp p$; $a \perp q$

$p \subset \alpha$; $q \subset \alpha$

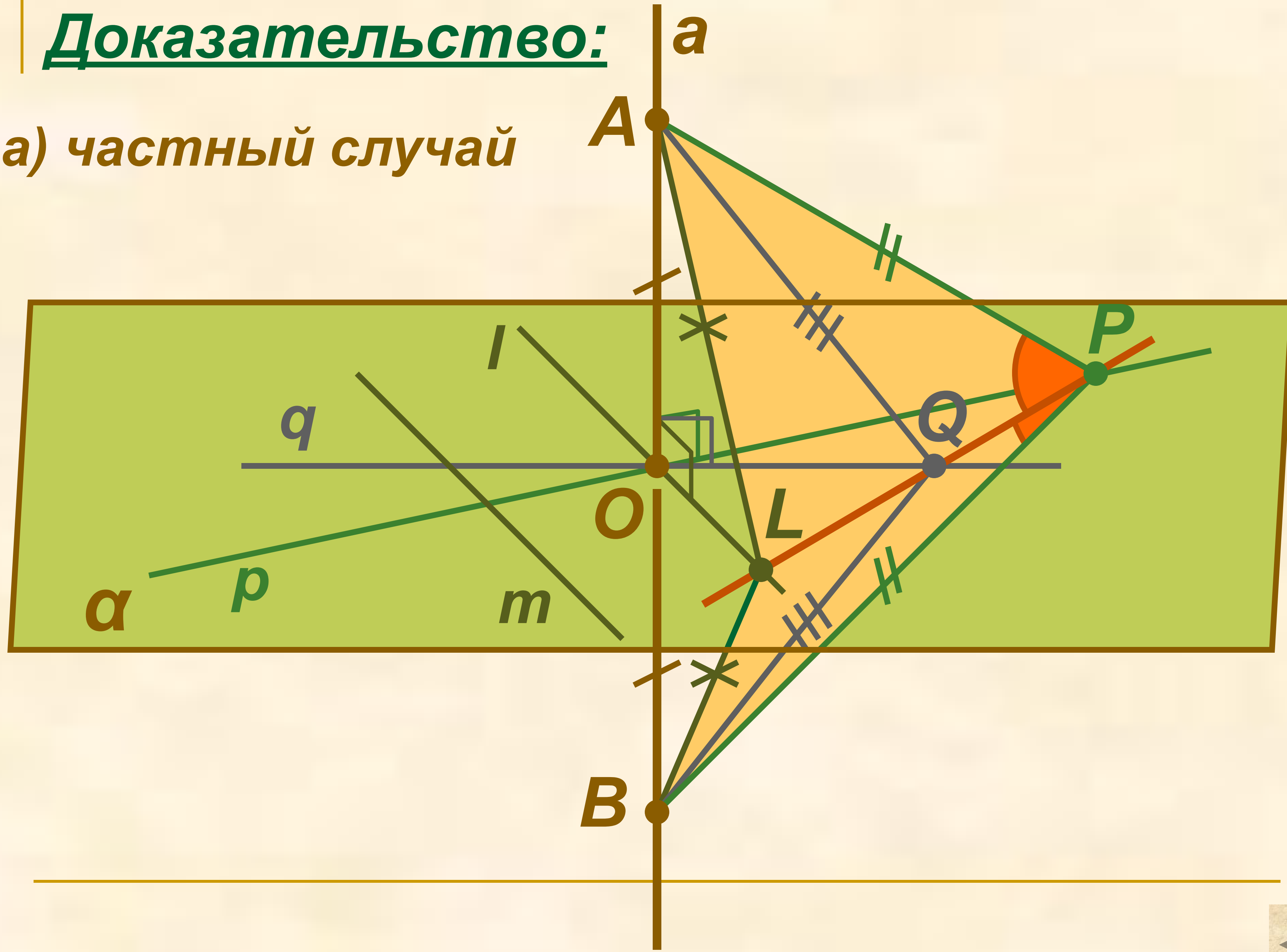
<u>Доказать:</u> $a \perp \alpha$

$p \cap q = O$

<u>Доказательство:</u>

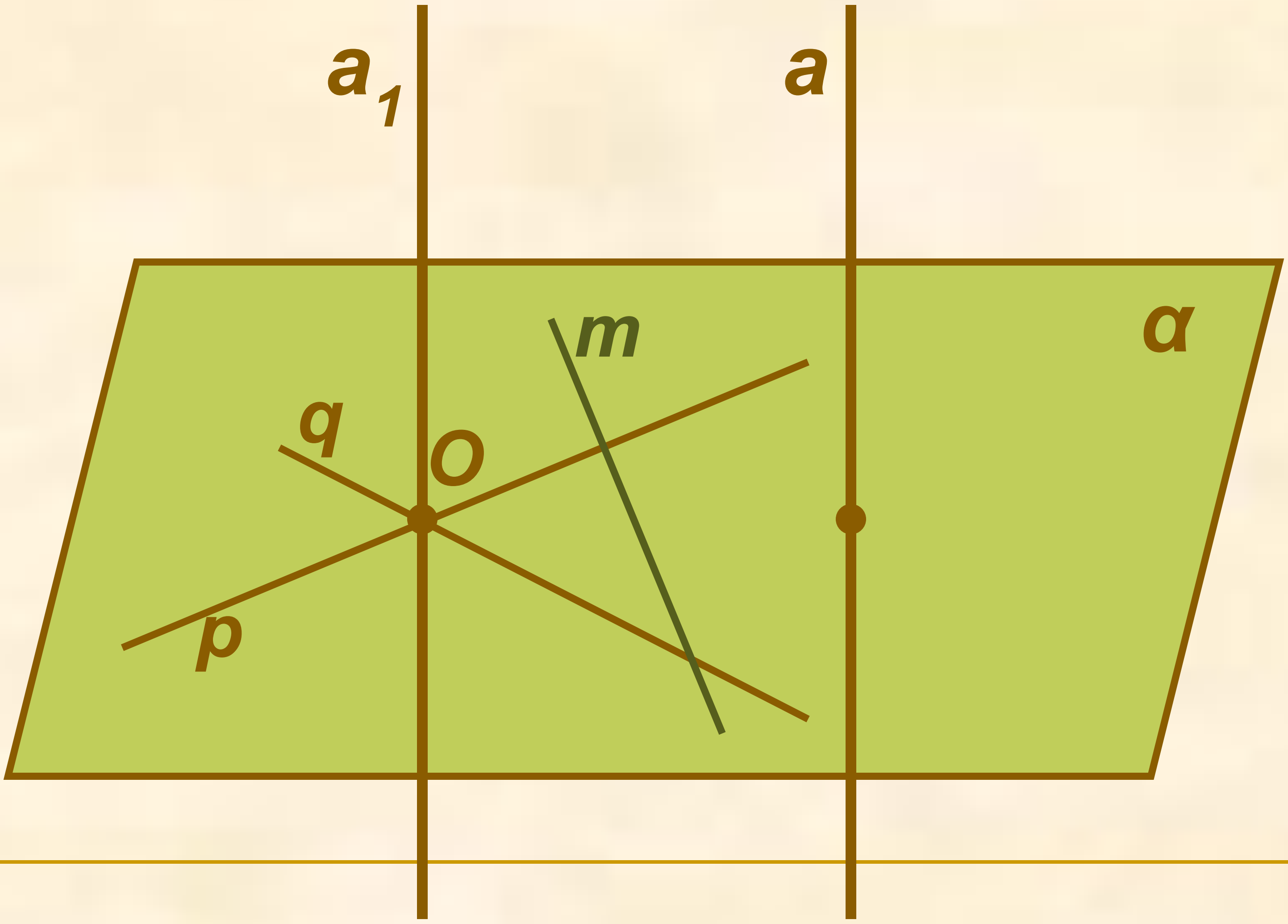
Доказательство:

а) частный случай



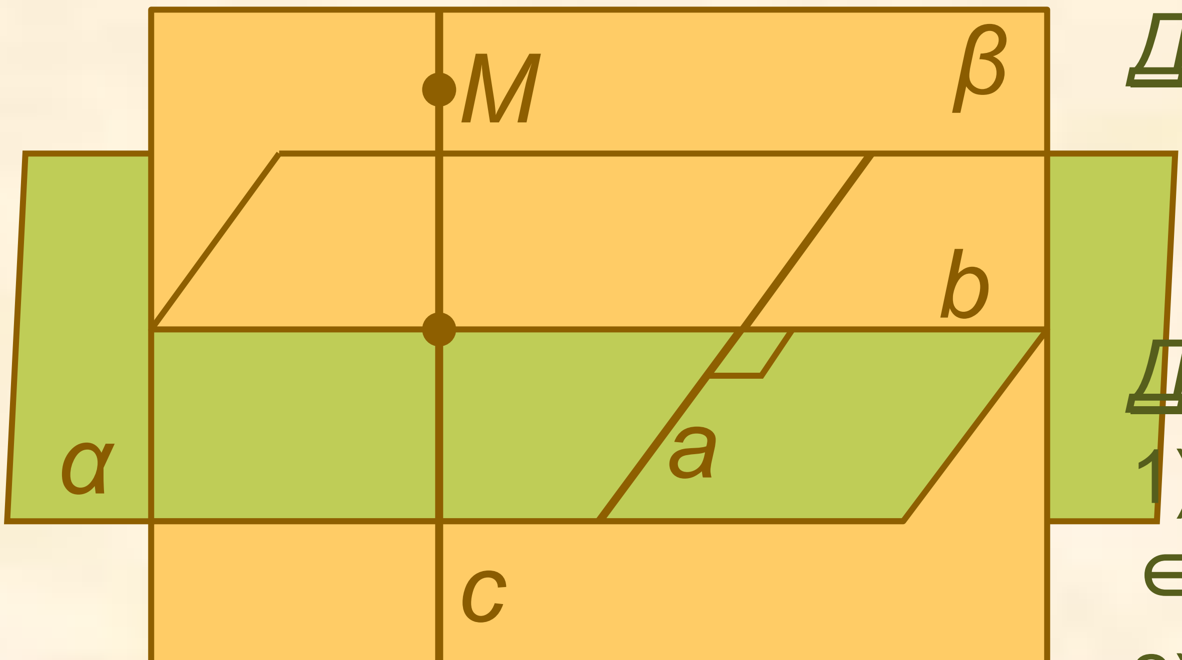
Доказательство:

а) общий случай



Теорема 4

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



Дано: α; $M \notin \alpha$

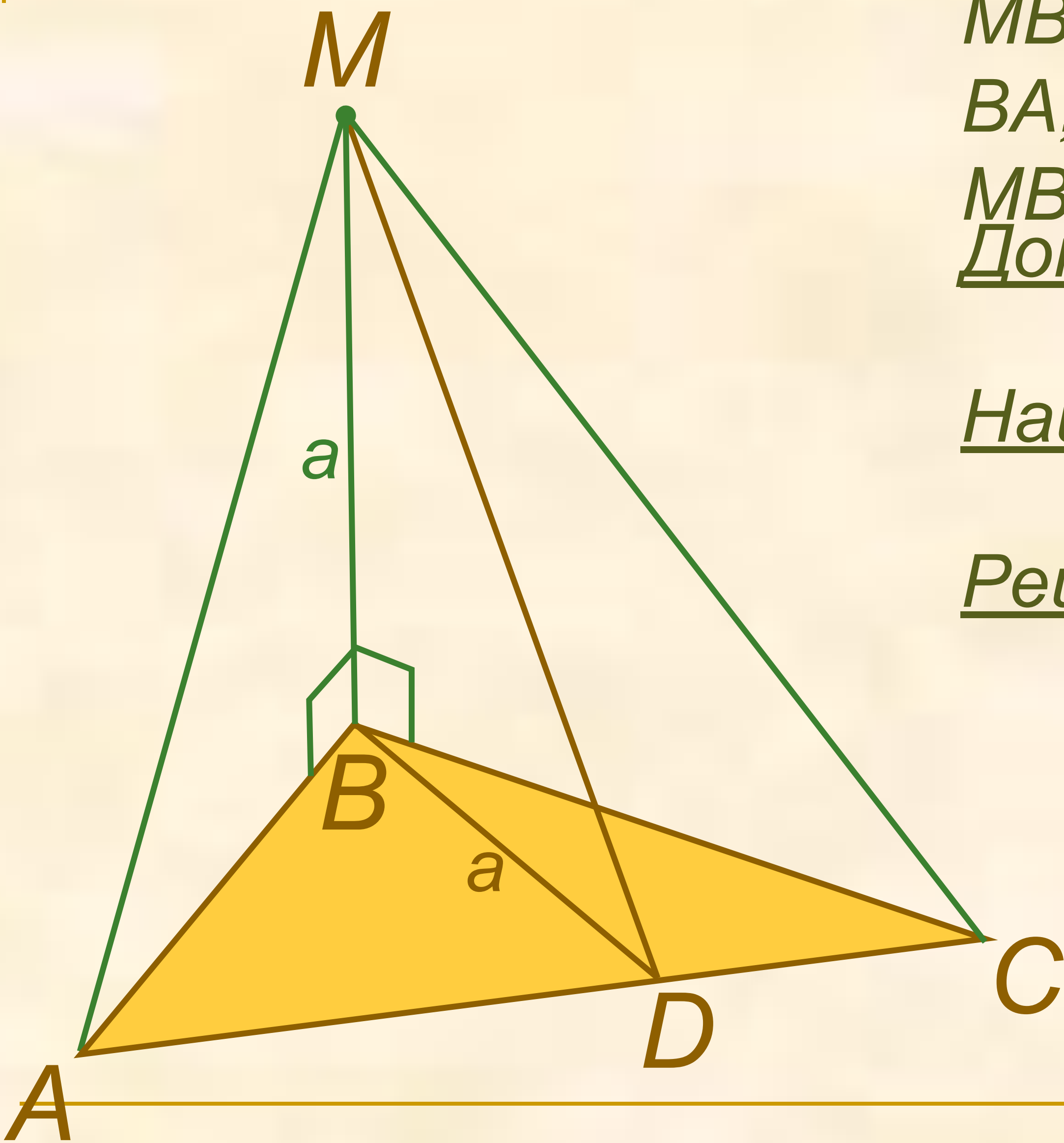
Доказать:

1) $\exists$ c, $c \perp \alpha$, $M \in c$;

2) c – !

Доказательство:

Задача



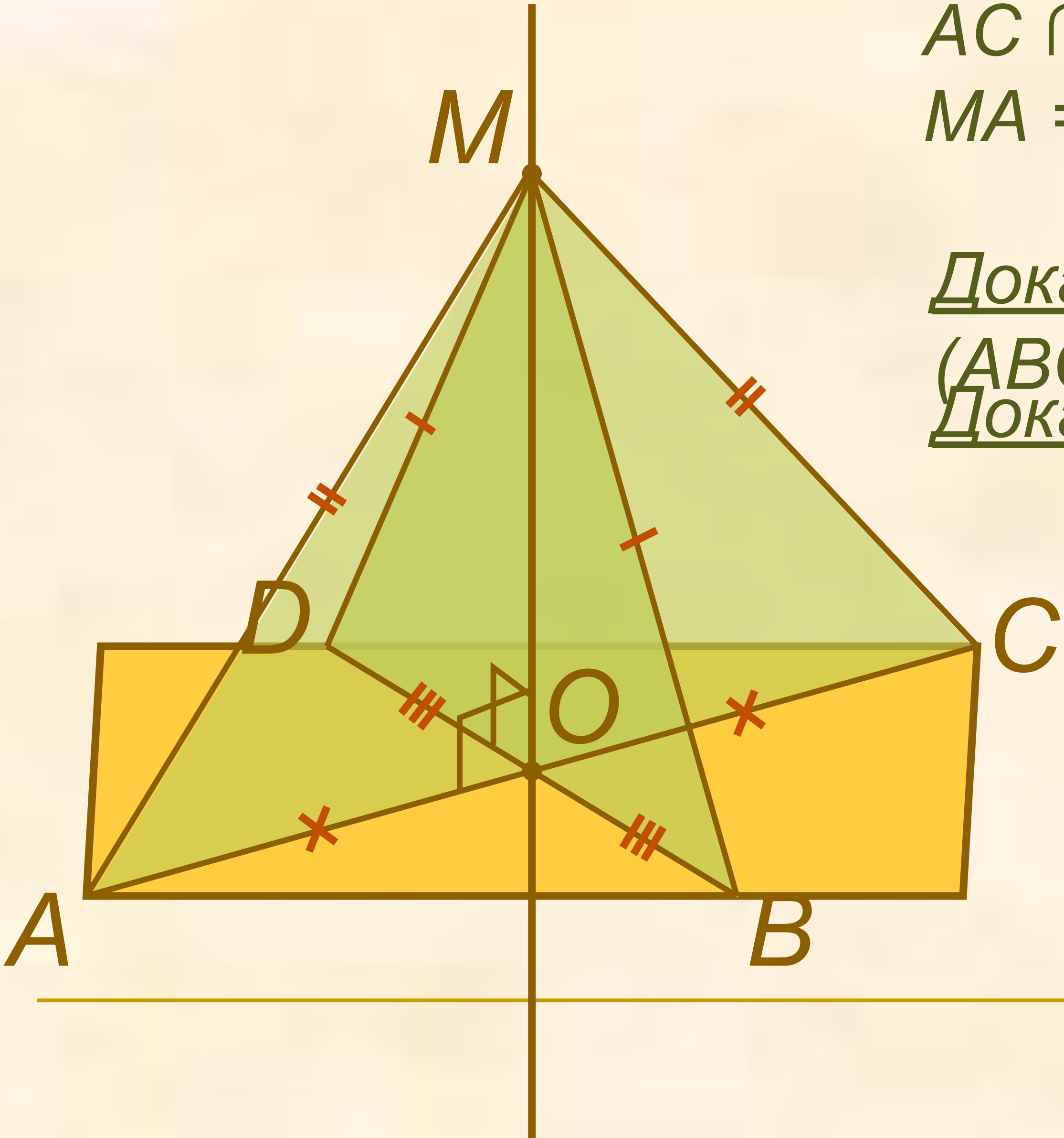
<u>Дано:</u> ΔABC;
$MB \perp BC$; $MB \perp BA$;
$MB = BD = a$

<u>Доказать:</u> $MB \perp BD$

<u>Найти:</u> MD

<u>Решение:</u>

Задача 128



<u>Дано:</u> *ABCD - параллелограмм;*

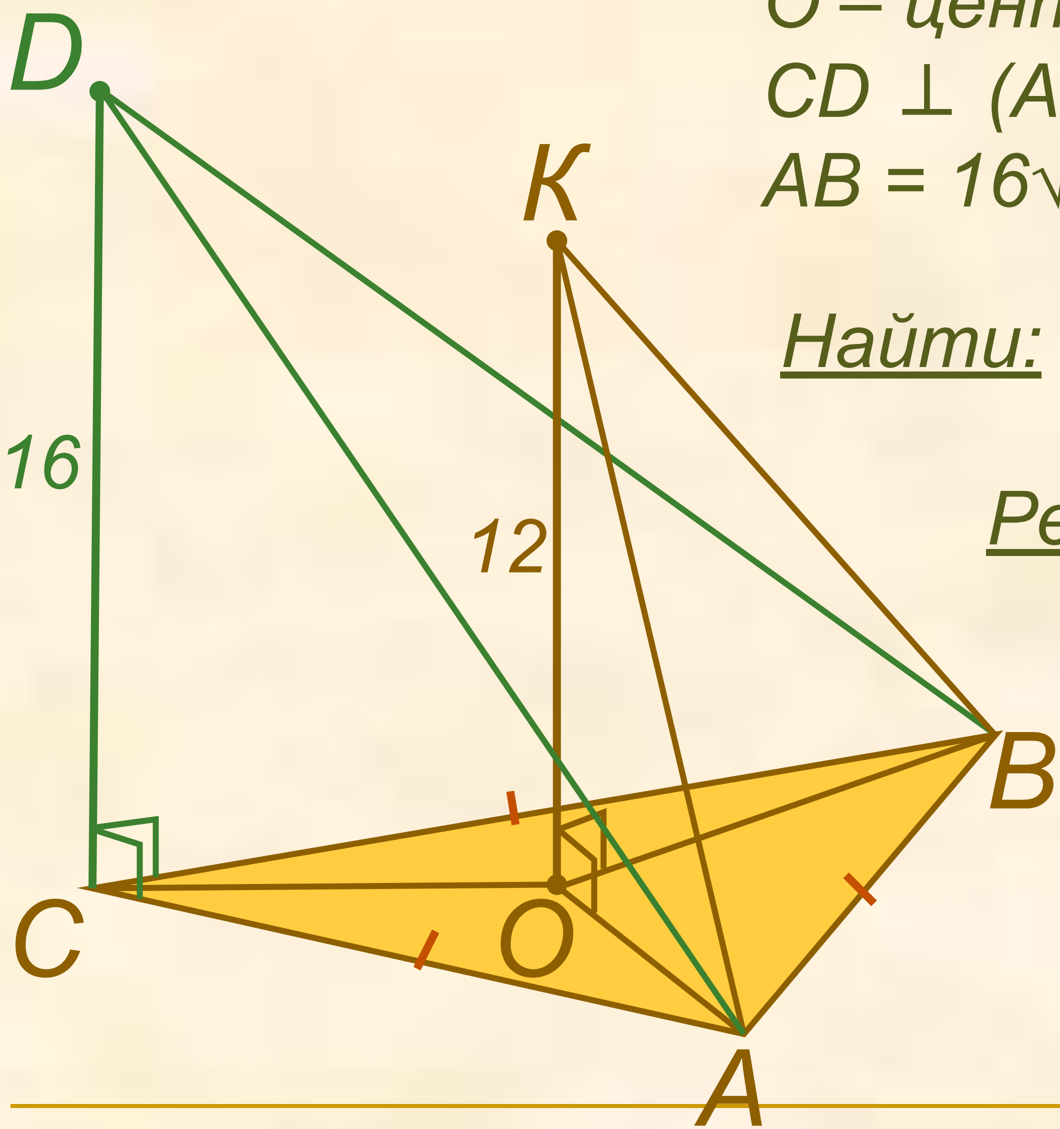
AC ∩ BD = O; M ∉(ABC);

MA = MC, MB = MD

<u>Доказать:</u> *OM ⊥ (ABC)*

<u>Доказательство:</u>

Задача 122



<u>Дано:</u> ΔABC – р/с;

O – центр ΔABC

$CD \perp (ABC)$; $OK \parallel CD$

$AB = 16\sqrt{3}$, $OK = 12$; $CD = 16$

<u>Найти:</u> AD; BD; AK; BK.

<u>Решение:</u>

Перпендикуляр и наклонные

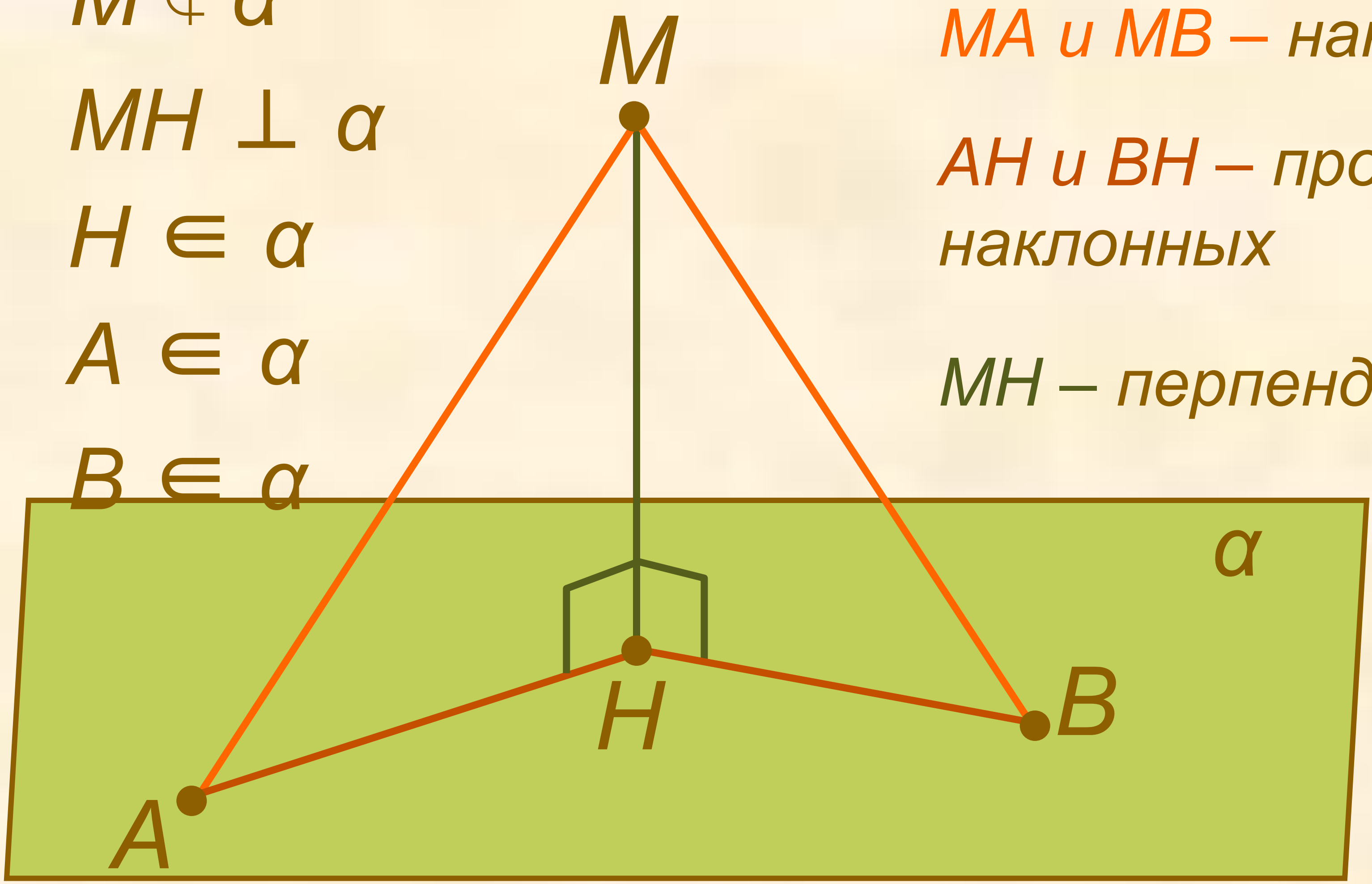
$M \notin \alpha$

$MH \perp \alpha$

$H \in \alpha$

$A \in \alpha$

$B \in \alpha$



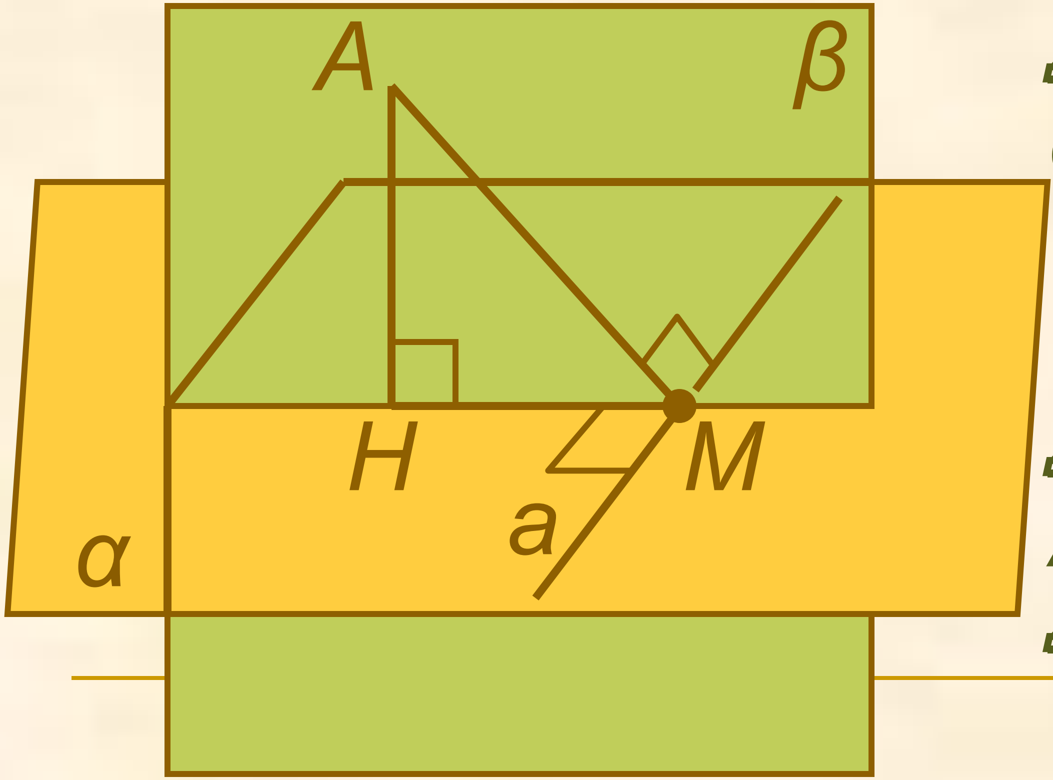
MA и MB – наклонные

AH и BH – проекции наклонных

MH – перпендикуляр

Теорема о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна к самой наклонной.



<u>Дано:</u> $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

AM – наклонная,

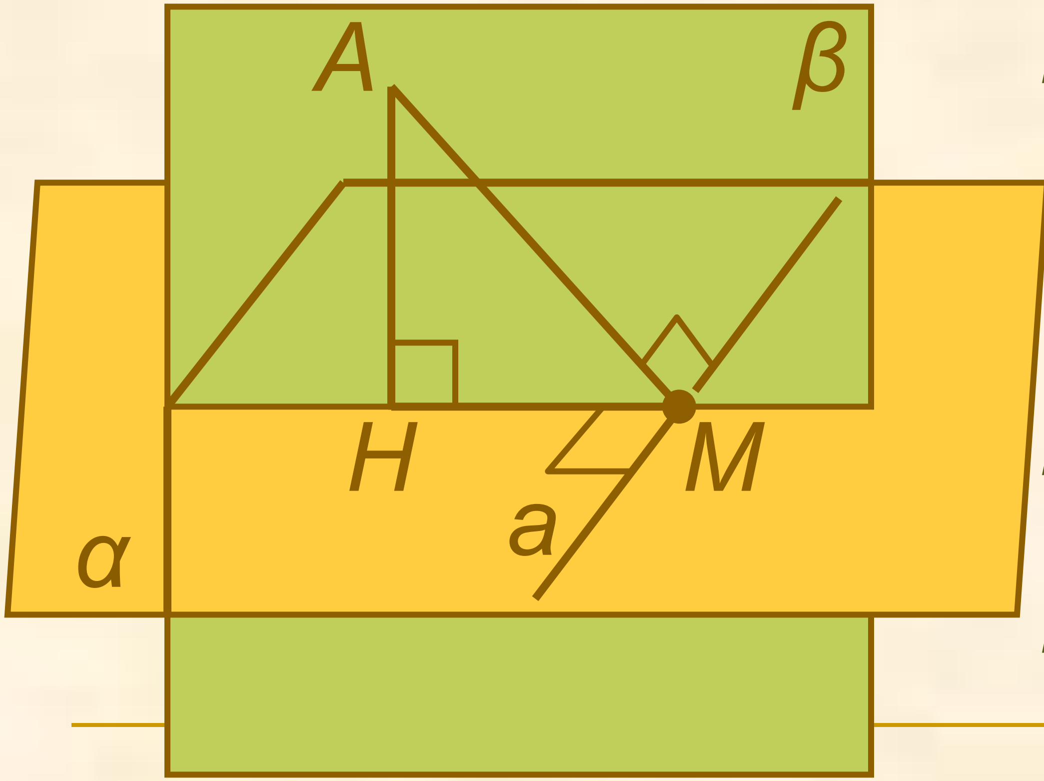
$a \perp HM$, $M \in a$

<u>Доказать:</u> $a \perp AM$

<u>Доказательство:</u>

Теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции.



<u>Дано:</u> $a \subset \alpha$, $AH \perp \alpha$,

AM – наклонная,

$a \perp AM$, $M \in a$

<u>Доказать:</u> $a \perp HM$

<u>Доказательство:</u>

Угол между прямой и плоскостью

$$\widehat{(a\,;\,\alpha)} = \angle AOH = \varphi$$