Дифференциальные уравнения

Тема: ***Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка***

Лектор ДьяконоваН.В..

2011 г.

# §14. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка

## 1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции* $y$ *и ее производных* $y'$, $y''$, …, $y^{(n)}$, т. е. уравнение вида

$$p_0(x)\cdot y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = g(x)\,, \quad (7)$$

где $p_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным однородным***.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Так как $p_0(x) \not\equiv 0$ , то уравнение (7) можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \quad (8)$$

Уравнение (8) называют ***приведенным***.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$.

Тогда в области

$$D = \{(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \mid \forall x \in [a;b] , \ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (8) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения.

Следовательно, $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0 , y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_{01} , y''(x_0) = y_{02} , \ \ldots , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} .$$

## 2. Линейные однородные уравнения *n*-го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение (ЛОДУ) порядка $n$, т.е. уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 \,. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 1 (свойство решений ЛОДУ).

*Если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями ЛОДУ* (9), *то*

$$y_1(x) + y_2(x) \;\; и \;\; C \cdot y_1(x) \;\; (\forall\, C \in \mathbb{R})$$

*тоже является решениями уравнения* (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – *решения уравнения* (9), *то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$$

*тоже является решением уравнения* (9) *для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Обозначим: $S[a;b]$ – множество решений уравнения (9),
$C[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

Имеем: $S[a;b] \subset C[a;b]$ ,

Из теоремы 1 $\Rightarrow$ $S[a;b]$ – линейное подпространство $C[a;b]$

ЗАДАЧА. Изучить $S[a;b]$ как линейное пространство.

Пусть $y_1(x)$ , $y_2(x)$ , … , $y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции.

Запишем для них определитель порядка $n$ вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель $W$ – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ и называют ***определителем Вронского*** (***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости функций).

*Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ).

*Если $n$ решений ЛОДУ (9) линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 5 (теоремы 3 и 4).

*Пусть* $y_1(x)\,,y_2(x)\,,\,\ldots\,,y_n(x)$ *решения ЛОДУ* (9). *Тогда*

1) *либо* $W[y_1\,,y_2\,,\,\ldots\,,y_n\,]\equiv 0$ *и это означает, что решения линейно зависимы*;

2) *либо не* $W[y_1\,,y_2\,,\,\ldots\,,y_n\,]\neq 0\,,\quad\forall x\in[a;b]$ *, и это означает, что решения линейно независимы*.

ТЕОРЕМА 5 (о размерности пространства решений ЛОДУ).

*Пространство решений* $S[a;b]$ *ЛОДУ* (9) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, т.е.* $\dim S[a;b]=n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Система $n$ линейно независимых решений ЛОДУ $n$-го порядка (базис пространства $S[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений*** (фср).