2.1. Многочлены от одной переменной

- Многочлены.
- Делимость многочлена.
- Теорема Безу.
- Схема Горнера.
- Корни многочлена.

1.1. Многочлены

- **Выражение вида:**

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

- **называется многочленом степени *n* одного аргумента (переменной).**
- **Будем обозначать многочлен одной переменной через**
- $P(x)$, $Q(x)$, …

- **Степенью многочлена называется наивысшая степень аргумента многочлена.**
- **Для указания степени многочлена будем использовать нижний индекс заглавной буквы: $P_n(x)$.**

- **Запись**
- $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$
- **представляет собой стандартный вид многочлена одной переменной *x* степени *n*, где**
- $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ **– коэффициенты**
- **степеней переменной x.**

Определение 1.

- **Два многочлена**
- $P_n(x)$ **и** $Q_n(x)$ **,**
- **называются равными,**
- **если их коэффициенты**
- **при соответствующих степенях *x* равны,**

- **т.е. пусть**
- $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ **,**
- $Q_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$ **,**
- **тогда** $P_n(x) \equiv Q_n(x) \quad \Leftrightarrow$
- $a_0 = b_0$ **,** $a_1 = b_1$ **, …** $a_n = b_n$ **.**

- **Многочлен** $Q_m(x)$
- **называется многочленом степени**
- **выше чем многочлен** $G_k(x)$ **,**
- **если наивысший показатель степени** ***x*** **многочлена** $Q_m(x)$
- **больше наивысшего показателя степени** ***x*** **многочлена** $G_k(x)$
- **т. е.** $m > k$

- **Многочлены**
- $Q_m(x)$ **и** $G_k(x)$
- **называются многочленами одинаковой степени, если**
- $m = k$ **.**

Основные формулы сокращенного умножения:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;
- $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;
- $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

1.2. Деление многочлена на многочлен

- **Любой многочлен может быть представлен в виде:**
- $$P_n(x) = Q_m(x) \cdot G_k(x) + R(x)$$ **,**
- **где**
- $Q_m(x)$ **– делитель многочлена** $P_n(x)$ **,**
- $G_k(x)$**– частное от деления многочлена**
- $P_n(x)$ **на многочлен** $Q_m(x)$ **,**

- $R(x)$ **– остаток от деления многочлена**
- $P_n(x)$ **на многочлен** $Q_m(x)$ **.**
- **Причем, сумма степеней делителя и частного равна степени делимого,**
- **т. е.** $m+k=n$ **,**
- **степень остатка меньше степени делителя.**

Определение 1.

- ***Многочлен*** $P_n(x)$
- ***делится на многочлен*** $Q_m(x)$ ***,***
- ***если остаток от деления равен нулю,***
- ***т.е.*** $R(x)=0$ ***.***

Пример 1.

- ***Найти частное и остаток от деления многочлена***

$$P_4(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x - 1$$

- ***на***
- $Q_2(x) = -x^2 + 3x + 2$.

Деление столбиком.

- $x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 6x - 1 \;|\; -x^2 + 3x + 2$
- $\underline{x^4 - 3x^3 - 2x^2}$ $\qquad - x^2 - 6x - 15 = G2(x)$
- $6x^3 - 3x^2 + 6x$
- $\underline{6x^3 - 18x^2 - 12x}$
- $15x^2 + 18x - 1$
- $\underline{15x^2 - 45x - 30}$
- $63x + 29 = R(x)$

1.3. Деление многочлена на двучлен

Теорема Безу

- ***При делении многочлена*** $P_n(x)$
- ***на двучлен*** $x-\alpha$
- ***остаток от деления равен значению многочлена при*** $x-\alpha$***,***
- ***т. е.*** $R(x)=P_n(\alpha)$ ***.***

Доказательство.

- ***Пусть при делении многочлена*** $P_n(x)$
- ***на двучлен*** $x-\alpha$
- ***имеем***
- $P_n(x)=(x-\alpha)\cdot Q_{n-1}(x)+R(x)$ **.**

- ***Подставим в полученное выражение значение*** $x = \alpha$ ***,***
- ***получим*** $P_n(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q_{n-1}(\alpha) + R(\alpha)$ ***,***
- ***или*** $P_n(\alpha) = 0 \cdot Q_{n-1}(\alpha) + R(\alpha)$ ***,***
- ***или*** $P_n(\alpha) = R(\alpha)$ ***,***
- ***что и требовалось доказать.***

Определение 1.

- ***Корнем многочлена называется такое значение аргумента, при котором значение многочлена обращается в нуль.***

- ***Таким образом,*** $x = \alpha$
- ***является корнем многочлена ,*** $P_n(x)$
- ***если*** $P_n(\alpha) = 0$ **.**

Следствия из теоремы Безу

1.

- ***Многочлен*** $P_n(x)$
- ***делится на двучлен*** $(x-\alpha)$
- ***тогда и только тогда, когда число α является корнем многочлена .***

$x = \alpha$

Другими словами,

- *если при делении многочлена* $P_n(x)$
- *на двучлен* $(x-\alpha)$
- *остаток R(x) от деления равен нулю,*
- *то значение* $x=\alpha$
- *– корень многочлена.*

Доказательство.

- ***По теореме Безу*** $P_n(\alpha) = R(\alpha)$,
- ***если*** $R(\alpha) = 0$,
- ***то следовательно*** $P_n(\alpha) = 0$.
- ***По определению корня многочлена имеем, что*** $x = \alpha$
- ***– корень многочлена, что и требовалось доказать.***

2.

3.

4.

Пример1.

Решение.

Пример 2.

Решение:

Теорема.

Доказательство.

Примечание.

Пример 4.

Решение.

1. 4. Корни многочлена. Теорема о корнях многочлена.

Определение

Теорема (без доказательства).