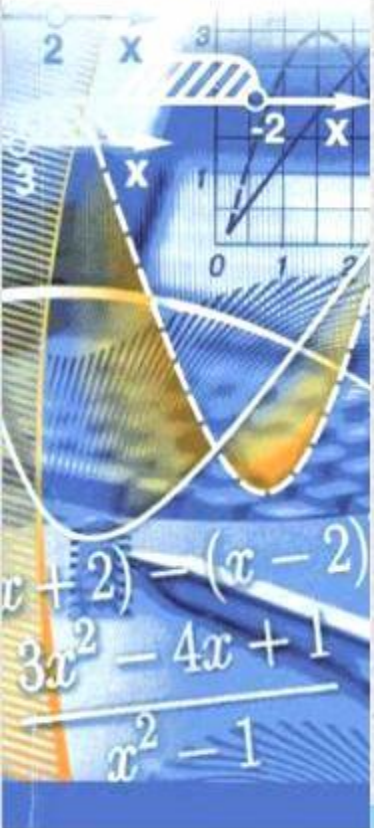




МОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

Геометрические задачи типа «С4»

по материалам ЕГЭ – 2010



Чудаева Елена Владимировна, учитель математики,
г. Инсар, Республика Мордовия



Задачи

№1

№2

№3

№4

Желаю успеха!

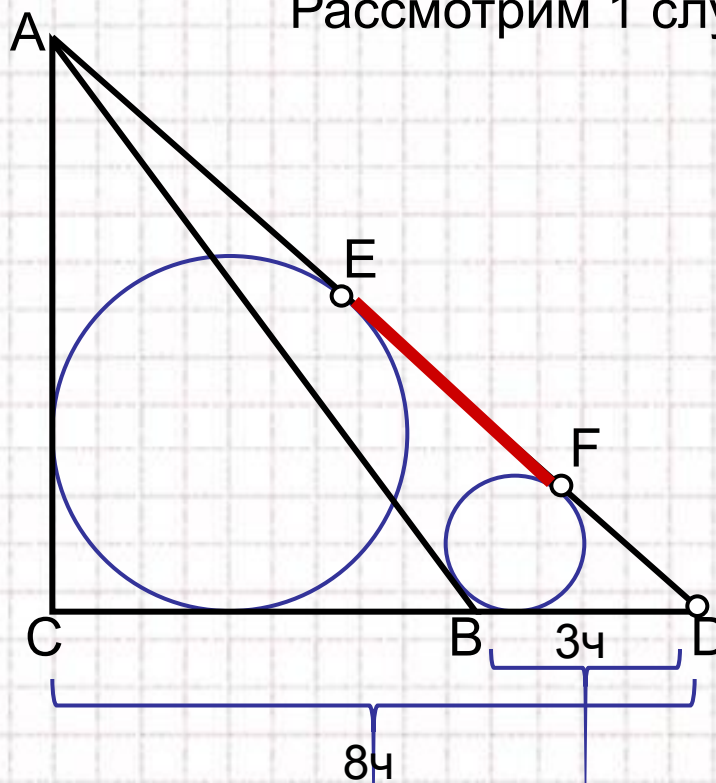
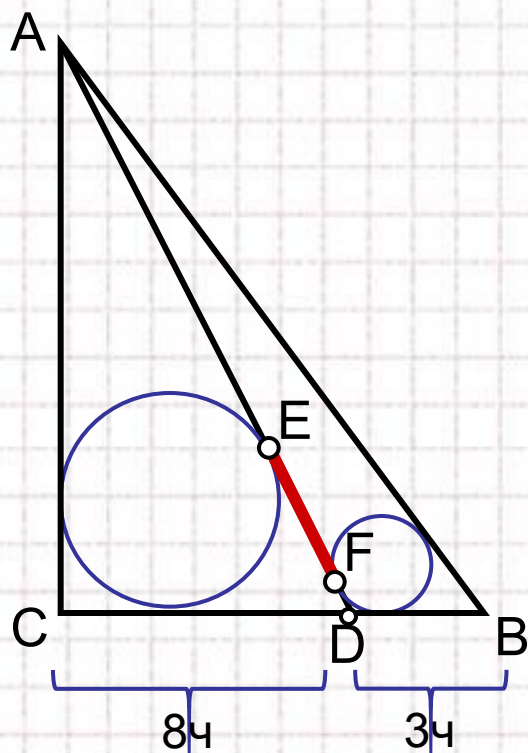
Помните: "Дорогу осилит идущий!"

№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .

Рассмотрим 1 случай.

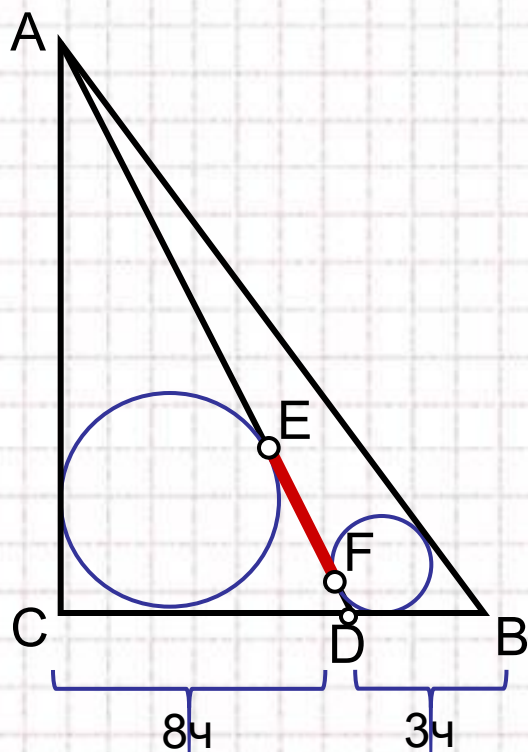


№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .

Рассмотрим 1 случай.



$$\text{Найдем: } BD = \frac{3}{11} \cdot BC = \frac{36}{11}, \quad DC = \frac{8}{11} \cdot BC = \frac{96}{11}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC, \quad DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2}, \quad ?$$

$$\text{Из } \triangle ADB, \quad DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$$

Значит,

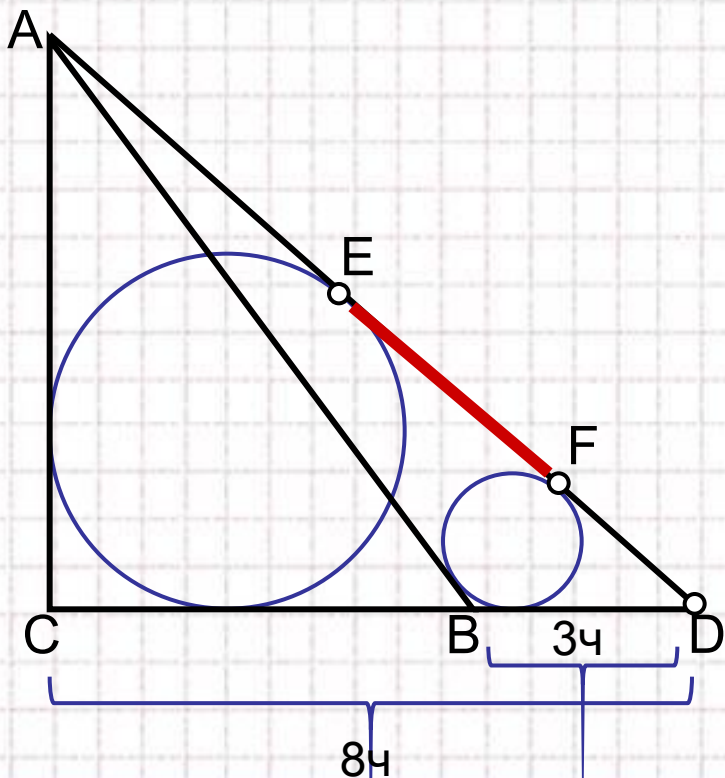
$$EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = \frac{63}{11}.$$

№
1

В треугольнике ABC $AB=15$, $BC = 12$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC = 3:8$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найдите длину отрезка EF .

Решение. Возможны два случая: точка D лежит на отрезке BC и точка D лежит вне отрезка BC .

Рассмотрим 2 случай.



$$BC = \frac{5}{8} \cdot DC = 8, \quad DC = \frac{96}{5},$$

$$BD = DC - BC = \frac{96}{5} - 12 = \frac{36}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC, \quad DE = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{AD + DC - 9}{2},$$

$$\text{Из } \triangle ADB, \quad DF = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{AD + BD - 15}{2}.$$

$$\text{Значит, } EF = DE - DF = \frac{6 + DC - BD}{2} = 9.$$

$$\text{Ответ: } 9 \text{ или } \frac{63}{11}.$$

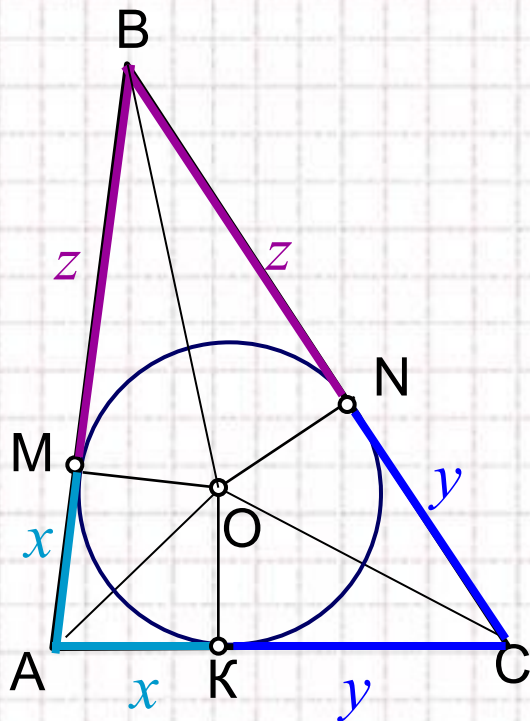


Вспомогательная задача.

Пусть окружность вписана в треугольник ABC. Тогда расстояние от вершины A до точки касания окружности со стороной AB равно

$$x = p - a = \frac{b + c - a}{2}.$$

Доказательство.



Мы знаем, что центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, значит $AM = AK = x$, $BM = BN = y$, $CK = CN = z$.

Тогда, периметр $\triangle ABC$ равен: $P = 2x + 2y + 2z$, откуда

$$p = \frac{P}{2} = x + y + z, \quad \text{или} \quad x = p - (y + z) = p - a,$$

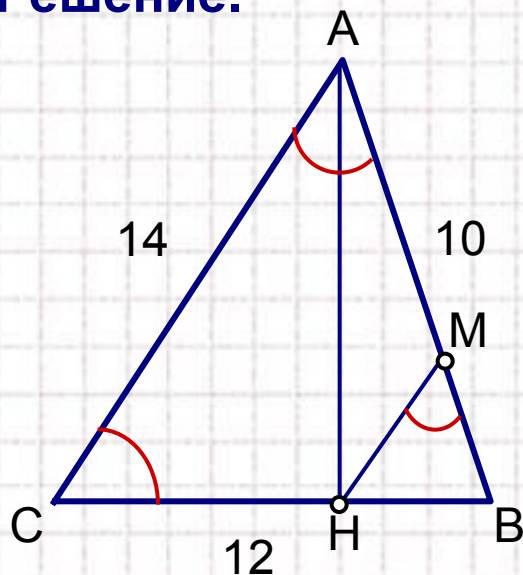
$$x = p - a = \frac{a + b + c}{2} - a = \frac{b + c - a}{2}.$$



№
2

Точка H – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M . Найдите HM .

Решение.



Пусть $AB = 10$, $BC = 12$, $AC = 14$.

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{100 + 144 - 196}{2 \cdot 10 \cdot 12} = \frac{1}{5}.$$

$\triangle ABH$ – прямоугольный, $BH = AB \cdot \cos B = 2$.

По условию $\triangle ABC \sim \triangle HBM$, и имеют общий угол B , значит возможны два случая.

1 случай. $\angle BMH = \angle BAC$; $k = \frac{BH}{BC} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

значит, $HM = \frac{1}{6} \cdot AC = \frac{1}{6} \cdot 14 = \frac{7}{3}$.

$k = \frac{BH}{AB} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, значит, $HM = \frac{1}{5} \cdot AC = \frac{1}{5} \cdot 14 = \frac{14}{5}$.

2 случай. $\angle BMH = \angle ACB$;

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$.



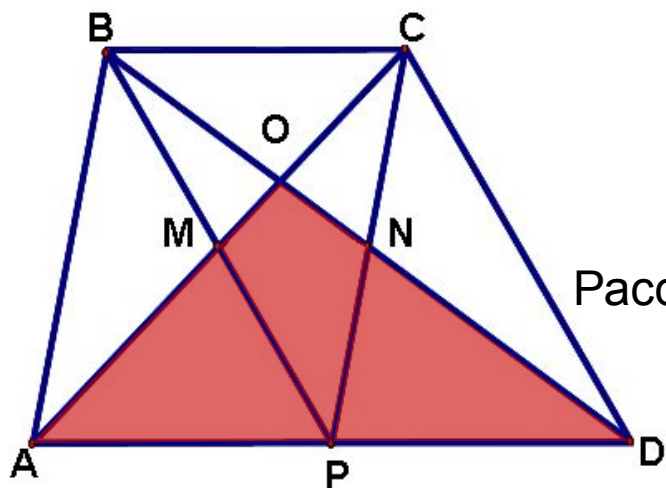
№
3

Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O , отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N . Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

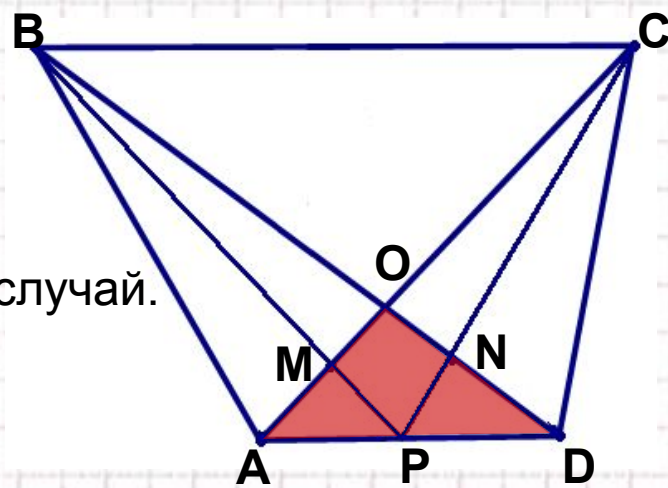
Решение. Возможно два вида трапеции. В обоих случаях:

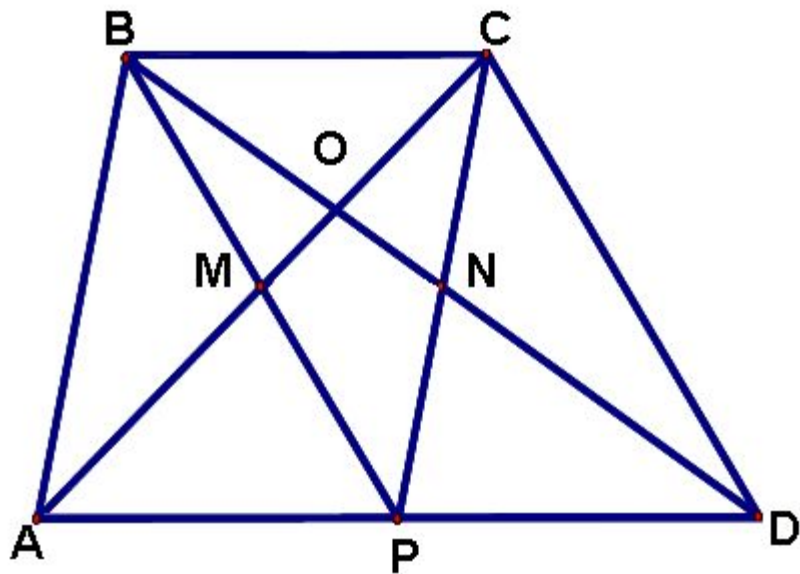
$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \begin{cases} 1) \text{ нижнее основание вдвое больше верхнего, } BC = a, AD = 2a, \\ 2) \text{ верхнее основание вдвое больше нижнего, } AD = a, BC = 2a. \end{cases} \frac{ah}{2} = 240, ah = 480, ah = 120$$

Найдем площадь $OMPN$: $S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$.



Рассмотрим первый случай.





по условию $BC = a$, $AD = 3a$, $ah = 120$.

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

значит высота ΔAOD равна $\frac{3}{4}h$, тогда:

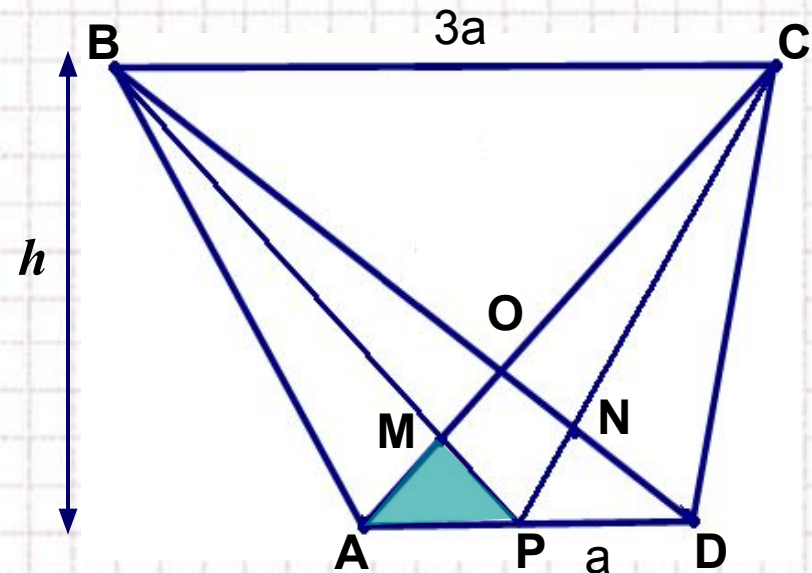
$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{3}{8} \cdot 3ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135.$$

2) $\Delta BMC \sim \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{a}{3a/2} = \frac{2}{3}$.

Тогда высота треугольника AMP равна $\frac{3}{5}$ высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{3}{5}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot \frac{3}{5}h = \frac{9}{20} \cdot 120 = 54.$$

3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\square AOD} - 2S_{\square AMP} = 135 - 2 \cdot 54 = 27$.



По условию $BC = 3a$, $AD = a$, $ah = 120$.

$$S_{MONP} = S_{\Delta AOD} - S_{\Delta AMP} - S_{\Delta PND}$$

1) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, по трем углам

$$k = \frac{BC}{AD} = \frac{3a}{a} = 3.$$

Значит высота ΔAOD равна $\frac{1}{4}h$, тогда:

$$S_{\Delta AOD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8} \cdot ah = \frac{1}{8} \cdot 120 = 15.$$

2) $\Delta BMC \sim \Delta AMP$, по трем углам, $k = \frac{BC}{AP} = \frac{3a}{a/2} = 6.$

Тогда высота треугольника AMP равна $1/7$ высоты трапеции.

$$S_{\Delta AMP} = S_{\Delta PND} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{7}h = \frac{1}{28} \cdot 120 = \frac{30}{7}.$$

3) Находим искомую площадь: $S_{MONP} = S_{\square AOD} - 2S_{\square AMP} = 15 - 2 \cdot \frac{30}{7} = 5.$

Ответ: 27 или 5.

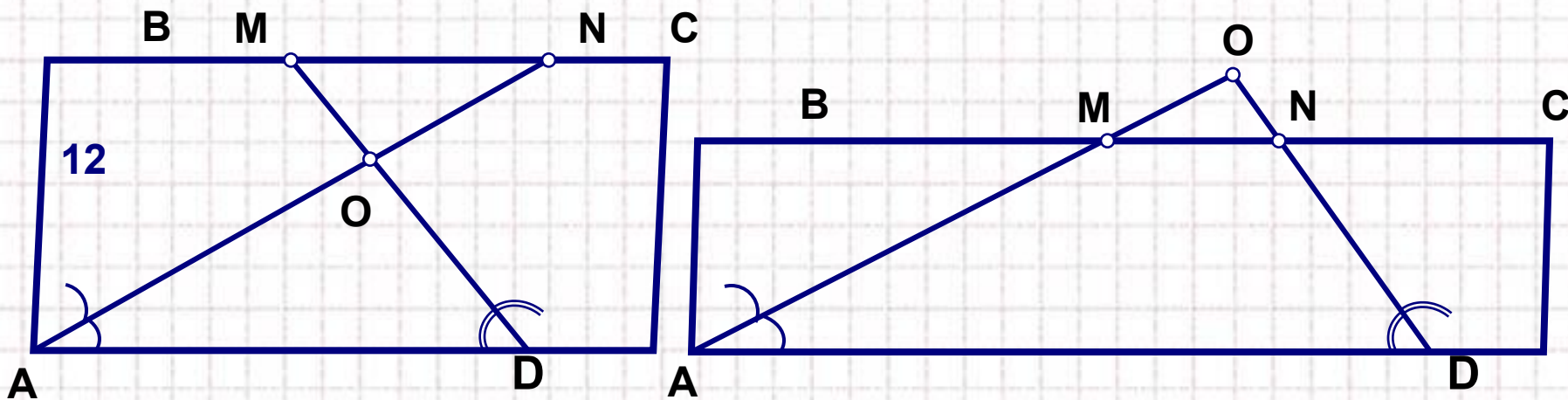


№
4

В параллелограмме $ABCD$ $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N , так что $BM:MN=1:7$.
Найдите BC .

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N .



Возможны два случая.

- 1) точка O – лежит внутри параллелограмма;
- 2) точка O – лежит вне параллелограмма.

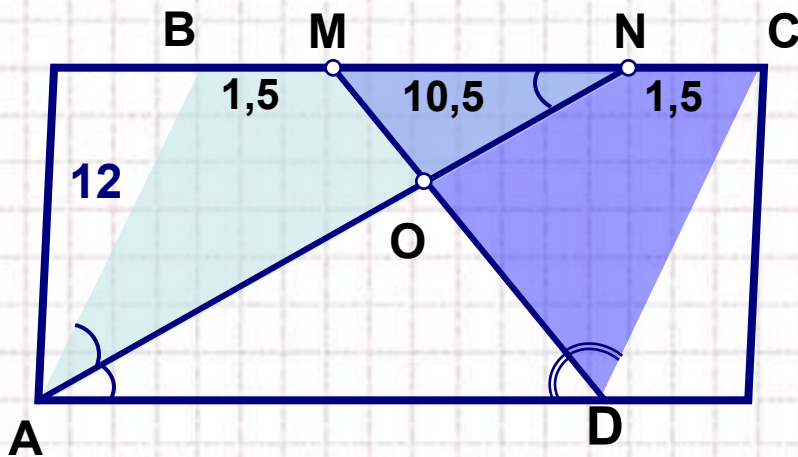
Рассмотрим первый случай.

№
4

В параллелограмме ABCD $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что $BM:MN=1:7$.
Найдите BC.

Решение. Пусть O – точка пересечения биссектрис.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7} < 1$, значит M лежит между точками B и N.



1) $\triangle ABN$ – равнобедренный, т.к.
 $\angle BNA = \angle NAD$ – накрест лежащие;
AN – биссектриса $\angle A$,
значит $\angle BNA = \angle BAN$ и $AB = BN = 12$,
тогда $BM = \frac{1}{8}BN = \frac{1}{8} \cdot 12 = 1,5$.
Найдем $MN = BN - BM = 12 - 1,5 = 10,5$.

2) Аналогично, $\triangle DMC$ – равнобедренный, $MC = DC = 12$.

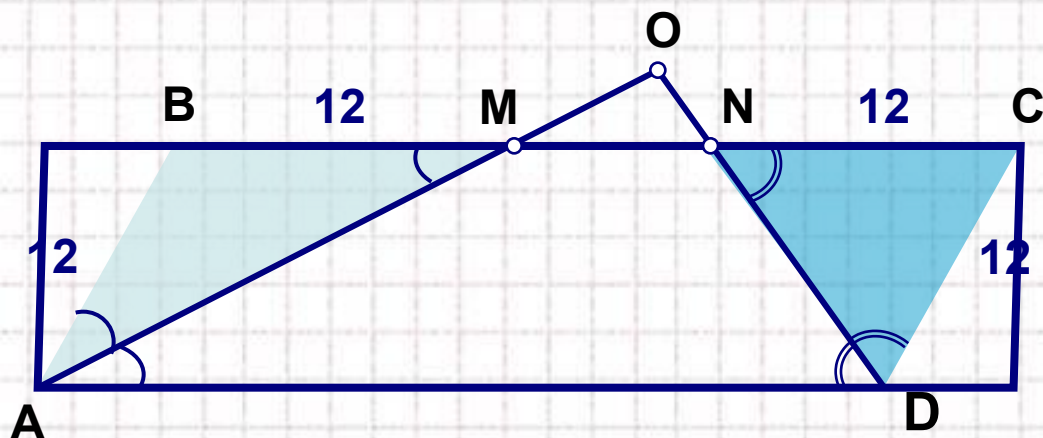
Тогда $NC = MC - MN = 12 - 10,5 = 1,5$.

3) ~~Важно, что $BM + MN + NC = 12$.~~

№
4

В параллелограмме ABCD $AB=12$, биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N, так что $BM:MN=1:7$.
Найдите BC.

Решение. Рассмотрим второй случай:
точка O – лежит вне параллелограмма.



- 1) $\triangle ABM$ – равнобедренный, т.к.
 $\angle BMA = \angle MAD$ – накрест лежащие
AM – биссектриса $\angle A$,
значит $\angle BMA = \angle BAM$.
Тогда $AB = BM = 12$.

По условию $\frac{BM}{MN} = \frac{1}{7}$, значит $BM = \frac{1}{8}BN, \Rightarrow BN = 8 \cdot 12 = 96$.

2) Аналогично $\triangle DNC$ – равнобедренный, тогда $NC = DC = 12$.

3) Значит, $BC = BN + NC = 96 + 12 = 108$.

Ответ: 13,5 или 108.



Использованные ресурсы

Тексты задач взяты с сайта Александра Ларина

<http://alexlarin.narod.ru/ege.html>

Рисунок на слайде №2

<http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B>

Для создания шаблона презентации использовалась картинка

http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg

и шаблон с сайта <http://aida.ucoz.ru>