Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§54. Случайные события и их вероятности

2.ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ.

Содержание

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Часть 2.

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

Независимость событий

В примере 2 мы говорили о сумме несовместных событий.

А как найти вероятность P(A + B) для событий, которые могут наступать одновременно?

Для ответа на такой вопрос необходима не только сама сумма A + B событий A и B, но и их произведение.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.
Произведение событий А и В

Определение 1. Произведением событий А и В называют событие, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает и событие А, и событие В. Оно обозначается А·В или АВ.

ПРИМЕР 3. Дать описание произведения событий А и В

Пример 3.

<u>Дать описание произведения АВ событий А и В, если:</u>

а) А — цена товара больше 100 р., В — цена товара не больше 110 р.;

б) А — завтра пятница, В — завтра 13-е число;

в) А — координаты случайно выбранной точки на плоскости удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 < 1$; В — координаты случайно выбранной точки положительны;

г) А — случайно выбранное двузначное число четно; В — случайно выбранное двузначное число делится на 11.

Решение примера 3а)

Пример 3.

Дать описание произведения АВ событий А и В, если:

а) А — цена товара больше 100 р., В — цена товара не больше 110 р.;

Решение:

а) Одновременное наступление событий А и В означает, что для цены S товара верно двойное неравенство

$100 < S < 110$.

Решение примера 3б)

Пример 3.

Дать описание произведения АВ событий А и В, если:

б) А — завтра пятница, В — завтра 13-е число;

Решение:

б) Одновременное наступление событий А и В означает, что завтра — пятница, 13-е число.

Решение примера 3в)

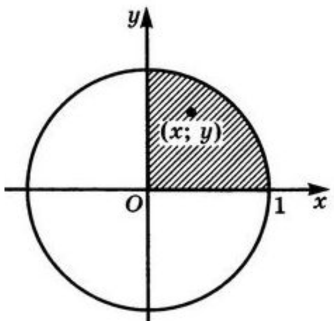

Рис. 242

Пример 3.

Дать описание произведения AB событий A и B, если:

в) A — координаты случайно выбранной точки на плоскости удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leq 1$; B — координаты случайно выбранной точки положительны;

Решение:

в) Геометрически событие A означает, что точка выбрана в единичном круге $\{(x; y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, а событие B означает, что она выбрана в первой координатной четверти. Значит, одновременное наступление A и B означает, что точка выбрана в той четверти единичного круга, которая расположена выше оси абсцисс и правее оси ординат (рис. 242).

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Решение примера 3г)

Пример 3.

Дать описание произведения АВ событий А и В, если:

г) А — случайно выбранное двузначное число четно; В — случайно выбранное двузначное число делится на 11.

Решение:

г) Четные двузначные числа составляют множество {10, 12, 14, ..., 94, 96, 98}. Двузначные числа, которые делятся на 11, составляют множество {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}. Одновременное наступление событий А и В означает, что выбранное число принадлежит и множеству {10, 12, 14, ..., 94, 96, 98} и множеству {11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}. Значит, событие АВ состоит в том, что выбранное число принадлежит пересечению указанных множеств, т. е. множеству {22, 44, 66, 88}. Всего 4 случая.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Произведение АВ событий А и В связано с пересечением множеств

- Мы видим, что произведение АВ событий А и В связано с пересечением множеств, соответствующих событиям
  А и В.
- В курсе алгебры 9-го класса мы говорили о связи между понятиями и терминами теории вероятностей и теории множеств и составили соответствующую таблицу. Дополним ее новыми связями.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Связь между понятиями и терминами теории вероятностей и теории множеств (таблица)

Теория вероятностей	**Теория множеств**
Испытание с N исходами	Множество из N элементов
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества
Сумма событий	Объединение подмножеств
Несовместные события	Непересекающиеся подмножества
Противоположное событие	Дополнение подмножества до всего множества
Произведение событий	Пересечение подмножеств

ТЕОРЕМА 1. Сумма вероятностей двух событий $P(A)+P(B)=P(AB)+P(A+B)$.

ТЕОРЕМА 1. Сумма вероятностей двух событий равна сумме вероятности произведения этих событий и вероятности суммы этих событий. $P(A) + P(B) = P(AB) + P(A + B)$.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Доказательство теоремы 1

Пусть A_1 — событие, состоящее в том, что наступает A, но не наступает B. Согласно опр.1 AB — событие, состоящее в том, что наступают A и B. Значит, события A_1 и AB несовместны, а их сумма равна A. Поэтому $P(A)=P(A_1)+P(AB)$.

Аналогично обозначим через B_1 событие, состоящее в том, что наступает B, но не наступает A. Тогда события B_1 и AB несовместны, а их сумма равна B. Значит, $P(A) = P(A_1) + P(AB)$.

Сложим эти равенства: $P(A)+P(B) = (P(A_1)+P(AB))+P(B_1)+P(AB)) = P(AB)+(P(A_1)+P(AB)+P(B_1))$.

События A, AB, B_1 попарно несовместны, а их сумма равна A+B. Значит, $P(A_1)+P(AB)+P(B_1)=P(A+B)$, и поэтому $P(A)+P(B) = P(AB)+P(A+B)$. ●

Для несовместных событий А и В

Для несовместных событий А и В доказанная теорема приводит к уже известным формулам.
Действительно, несовместность событий А и В означает, что событие АВ невозможно, т. е. Р(АВ)=0.
Тогда Р(А)+Р(В)=Р(АВ)+Р(А+В)= Р(А+В).
В частности, так как событие $A + \bar{A}$ всегда достоверно, то $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Формулу P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) применяют к независимым событиям A и B

При решении практических задач формулу P(A)+P(B)=P(AB)+P(A+B) чаще всего записывают в виде P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) и применяют ее к независимым событиям A и B.

Это понятие является одним из важнейших в теории вероятностей.

Определение *независимости* двух событий напоминает правило умножения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.
События А и В называются независимыми…

Определение 2. События А и В называют независимыми, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: P(AB) = P(A)P(B).

Не следует путать несовместность событий А и В и их независимость. Напомним, что несовместность событий А и В означает, что соответствующие множества исходов испытания не пересекаются. К сожалению, понятие независимости не имеет никакого наглядного смысла.

В практических задачах независимость событий, как правило, подразумевается в условиях задачи и обосновывается независимостью проводимых испытаний.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

В

ТЕОРЕМА 2. Вероятность суммы двух независимых событий равна P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).

Теорема 2. Вероятность суммы двух независимых событий равна разности суммы вероятностей этих событий и произведения вероятностей этих событий:

$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.

Доказательство. По теореме 1 $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Независимость А и Б означает, что $P(AB) = P(A)P(B)$. Значит

Отметим еще, что если независимы события A и B, то независимы события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

ПРИМЕР 4. Два стрелка независимо друг от друга стреляют

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. *Найти вероятность того, что мишень:*

а) будет поражена дважды;

б) не будет поражена ни разу;

в) будет поражена хотя бы один раз;

г) будет поражена ровно один раз.

Решение примера 4а)

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. *Найти вероятность того, что мишень:*

а) будет поражена дважды;

- Решение. Пусть А — событие, состоящее в том, что первый стрелок попал в мишень, В — событие, состоящее в том, что второй стрелок попал в мишень. По условию Р(А) = 0,9, Р(В) = 0,3, а А и В независимы.

а) Мишень будет поражена дважды, если одновременно произошли оба события А и В, т. е. произошло событие АВ. Поэтому $P(AB) = P(A)P(B) = = 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}27$.

$\overline{\text{B}}$

Решение примера 4б)

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. *Найти вероятность того, что мишень:*

б) не будет поражена ни разу;

Решение:

б) Мишень вообще не будет поражена, если одновременно произошли события $\bar{A}$ и $\bar{B}$, т. е. произошло событие $\bar{A} \cdot \bar{B}$. Поэтому

$$P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07.$$

Решение примера 4в)

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. *Найти вероятность того, что мишень:*

в) будет поражена хотя бы один раз;

Решение: в) Мишень будет поражена, если произошло или А, или В, т. е. произошло событие А + В. Поэтому

P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,9 + 0,3 - 0,27 = 0,93.

Ту же вероятность можно получить и другим способом, действуя «через отрицание». Допустим, что событие $A + B$ *не произошло*, т. е. произошло событие $\overline{A + B}$. Это значит, что мишень вообще не поражена, а вероятность этого уже найдена в пункте б). Значит,

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A + B}) = 1 - 0{,}07 = 0{,}93.$$

Решение примера 4г)

Пример 4. Два стрелка независимо друг от друга по одному разу стреляют в мишень. Вероятность попадания в мишень каждого стрелка в отдельности равна 0,9 и 0,3 соответственно. *Найти вероятность того, что мишень:*

г) будет поражена <u>ровно один раз.</u>

Решение: г) Мишень будет поражена ровно один раз, если произошло событие А + В, но не произошло собы … Р (А+В)

Ту же вероятность можно получить и другим способом. Событие, состоящее в том, что мишень будет поражена ровно один раз, равно сумме двух событий: $A \cdot \bar{B}$ (попал первый, но не попал второй стрелок) и $\bar{A} \cdot B$ (не попал первый, но попал второй стрелок). Значит, искомая вероятность равна

$$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = P(A \cdot \bar{B}) + P(\bar{A} \cdot B) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}66.$$

Ответ: а) 0,27; б) 0,07; в) 0,93; г) 0,66.

Для учителя

Заключительный в этой главе §54 «Случайные события и их вероятности» наиболее объемен и не столь однороден по содержанию, как другие параграфы. Он состоит из четырех пунктов.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей.

2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий.

3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость.

4. Геометрическая вероятность.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

В п. 2 сначала обосновывается формула $P(A + B) + P(AB) = P(A) + P(B)$ вероятности суммы двух произвольных событий. В частном случае, когда события A и B несовместны, получается, что их произведение AB есть событие невозможное, вероятность $P(AB)$ равна нулю и поэтому для таких событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$, что уже объяснялось и в 9 классе и повторялось в п. 1.

В общей ситуации неясно, что проще вычислить: $P(A + B)$ или $P(AB)$. Однако есть крайне важный для всей теории вероятностей случай, когда этот вопрос ясен полностью. Речь идет о *независимых* событиях A и B, что по определению означает справедливость равенства $P(AB) = P(A)P(B)$. В таком случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Понятие независимости двух событий является, пожалуй, одним из наиболее деликатных в теории вероятностей. Мы ограничимся лишь следующей констатацией. При решении практических задач в подавляющем большинстве случаев независимость событий предполагается априорно известной. Другими словами, если строго следовать определению, то при решении задач сначала надо было бы проверить равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ и на его основании сделать вывод о том, что события A и B независимы. На практике все наоборот. Сначала по условию задачи делается предположение о независимости A и B, из этого делается вывод о справедливости равенства $P(AB) = P(A)P(B)$ и затем это равенство применяется в вычислениях. Четыре пункта примера 4 детально демонстрируют технику такого применения.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы