Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти(если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

ПРИМЕР

Исследовать функцию $y = \frac{x}{1 - x^2}$

и построить ее график.

Шаг 1.

Функция не определена при x=1 и x=-1. Область ее определения состоит из трех интервалов (-∞; -1), (-1;1), (1; +∞), а график из трех ветвей.

Шаг 2.

$$y = \frac{x}{1 - x^2}$$

Если х=0, то у=0. График пересекает ось *Оу* в точке *О*(0;0). Если у=0, то х=0. График пересекает ось *Ох* в точке *О*(0;0).

Шаг 3.

Функция $y = \dfrac{x}{1-x^2}$ **является нечетной, так как**

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x)$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при x≥0.

Шаг 4.

Прямые x=1 и x=-1 являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=0$$

(k=0 при x→+∞ и при x→-∞),

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1-x^2}-0x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение *y=0*. Прямая *y=0* является асимптотой и при x→+∞, и при x→-∞.

Шаг 5.

$$y = \frac{x}{1-x^2}$$

Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то $y' > 0$ **в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.**

Шаг 6.

Исследуем функцию на экстремум. Так как

$$y' = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},$$

то критическими точками являются точки

$x_1 = 1$ и $x_2 = -1$

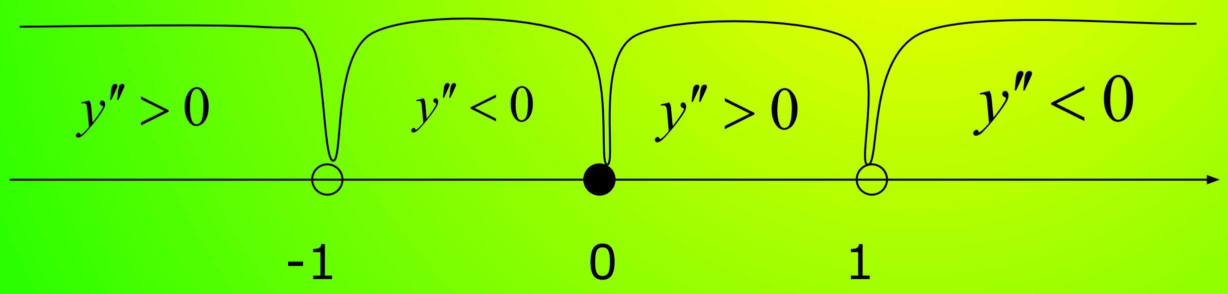
(y' не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

Шаг 7.

Исследуем функцию на выпуклость. Находим y'':

$$y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)^2-(x^2+1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках $x_1=0, x_2=-1, x_3=1.$



Точка *O*(0;0) – точка перегиба графика функции.

График выпуклый вверх на интервалах (-1;0) и (1; ∞); выпуклый вниз на интервалах (-∞;-1) и (0;1).

График функции