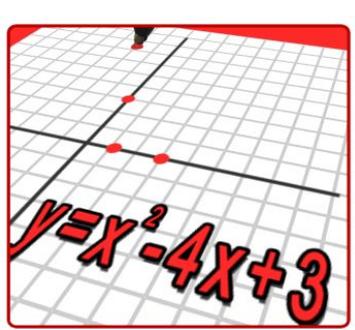


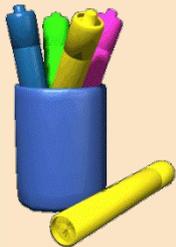
09/21/2023



Целое уравнение с параметром

Методическая разработка к учебнику Ю.Макарычева
«Алгебра-9» углубленное изучение

Драгунова Е.Ю. учитель математики МОУ СОШ № 10 г.о.Жуковский



Что такое уравнение с параметром?

- *Решить уравнение:*

$$6x - 1 = x + 6$$

$$6x - x = 6 + 1$$

$$5x = 7$$

$$x = 7:5$$

$$x = 1,4$$

$$5x - 1 = x + 5$$

$$4x - 1 = x + 4$$

$$3x - 1 = x + 3$$

$$ax - 1 = x + a$$

*Это – уравнение
с параметром*



Определения

- **Решить уравнение с параметром** - это значит **установить соответствие**, позволяющее для любого значения параметра решить уравнение, т. е. найти множество его корней.

Задания в зависимости от параметра

Найти
количество корней

Решить уравнение
при каждом a



Вернемся к уравнению

$ax - 1 = x + a$ – *линейное уравнение*

$$ax - x = a + 1$$

$$x(a - 1) = a + 1$$

Не будем торопиться с делением на $(a - 1)$, т.к. при $a = 1$ выражение обращается в нуль.

Рассмотрим возможные случаи:

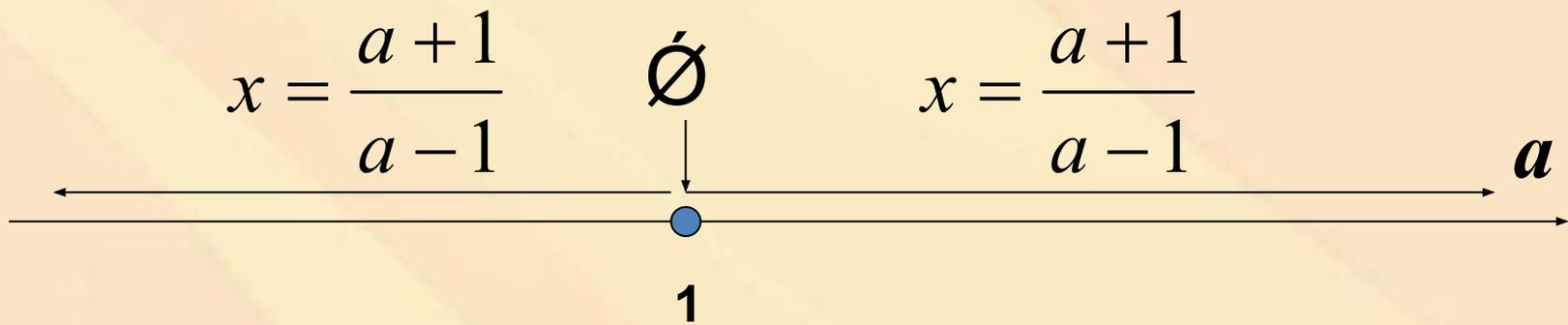
1) Если $a = 1$, то уравнение имеет вид $0x = 2$ и значит в этом случае данное уравнение не имеет корней.

2) Если $a \neq 1$, то на $(a - 1) \neq 0$ можно делить

$$x = \frac{a + 1}{a - 1} - \text{единственный корень}$$



- На числовой прямой покажем, что мы не пропустили ни одного значения параметра a , не указав при этом значения x , которое соответствует данному значению a



Ответ: при $a = 1$ корней нет;

при $a \neq 1$ - $x = \frac{a+1}{a-1}$



Пример 2

09/21/2023

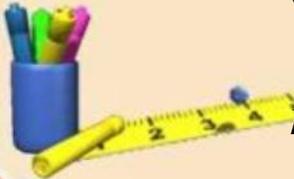
решить уравнение

$$(a-2)(a+5)x = (a+1)(a-2)$$

- Рассмотрим возможные случаи:
- 1) Если $a = 2$, то уравнение имеет вид $0x = 0$ и его решением является **любое действительное число**;
- 2) Если $a = -5$, то уравнение имеет вид $0x = 28$ и **не имеет корней**;
- 3) Если $a \neq 2$ и $a \neq -5$, то уравнение имеет **единственный корень**

$$x = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a-5)} = \frac{a+1}{a-5}$$

Ответ: при $a = 2$ $x \in \mathbb{R}$, при $a = -5$ корней нет

 при $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 2) \cup (2; +\infty)$ $x = \frac{a+1}{a-5}$

Квадратные уравнения с параметром

Решить уравнение: $(a+4)x^2+2x$

При ~~любом ли значении~~ $(a+6)+2a+9=0$ a данное уравнение является квадратным?

1. Если $(a+4)=0$, то уравнение не будет квадратным

Если $a = -4$, то уравнение имеет вид: $4x+1=0$ и $x = -1/4$

2. Если $a \neq -4$, то уравнение квадратное, значит находим дискриминант

$$D = (a + 6)^2 - (a + 4)(2a + 9) = -a(a + 5)$$



При $a \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$ $D < 0 \Rightarrow$ корней нет

При $a = 0$ или $a = -5$ $D = 0 \Rightarrow$ корень один

При $a \in (-4; 0) \cup (-5; -4)$ $D > 0 \Rightarrow$ корней два



$$D = -a(a + 5)$$

09/21/2023



При $a \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$ $D < 0 \Rightarrow$ корней нет

При $a \in (-5; -4) \cup (-4; 0)$ $D > 0 \Rightarrow$ корней два

$$x = \frac{-(a + 6) \pm \sqrt{-a(a + 5)}}{a + 4}$$

При $a = 0$ или $a = -5$ $D = 0 \Rightarrow$ корень один (дважды совпавших)

$$x_1 = x_2 = -1,5 \quad x_1 = x_2 = 1$$

Ответ: при $a = -4$ $x = -\frac{1}{4}$;

при $a \in (-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$ корней нет

$$\text{при } a \in [-5; -4) \cup (-4; 0] \quad x = \frac{-(a + 6) \pm \sqrt{-a(a + 5)}}{a + 4}$$

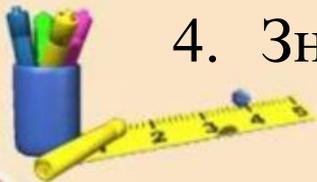


Расположение нулей квадратичной функции на координатной прямой

- Пусть дана функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$
- x_1 и x_2 нули этой функции (корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$) и $x_2 \geq x_1$
- Числа α и β

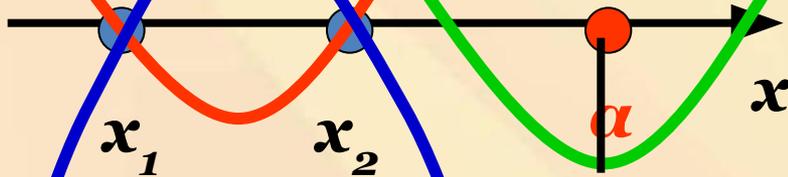
Условия, которые придется учитывать:

1. Знак дискриминанта (корни должны быть)
2. Формула для нахождения координат вершины параболы
3. Направление ветвей параболы
4. Знак числа $f(\alpha)$ и $f(\beta)$



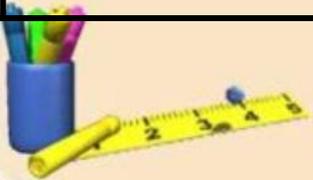
Расположение нулей квадратичной функции

1) Оба корня меньше α



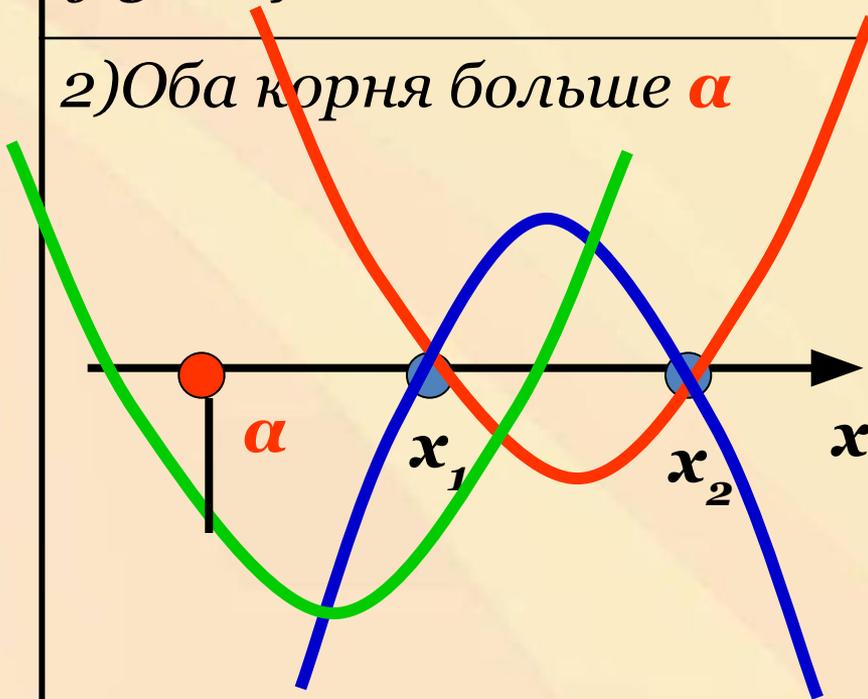
Необходимые и достаточные условия

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_v < \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$$



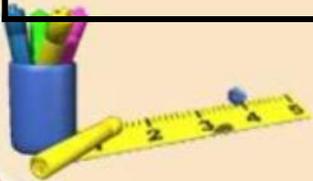
Расположение нулей квадратичной функции

2) Оба корня больше α



Необходимые и достаточные условия

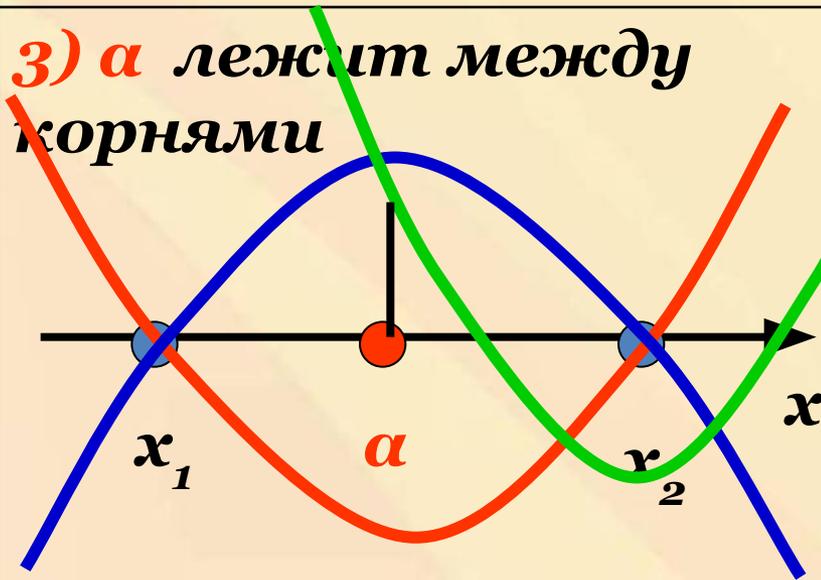
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_v > \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$$



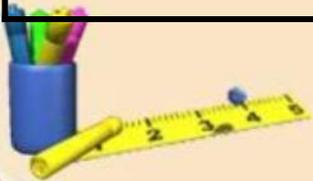
Расположение нулей квадратичной функции

Необходимые и достаточные условия

3) α лежит между
корнями



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \end{cases}$$



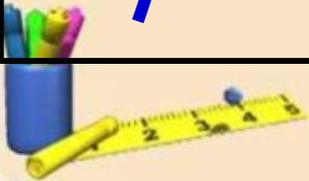
Расположение нулей квадратичной функции

4) Оба корня лежат внутри промежутка $(\alpha; \beta)$



Необходимые и достаточные условия

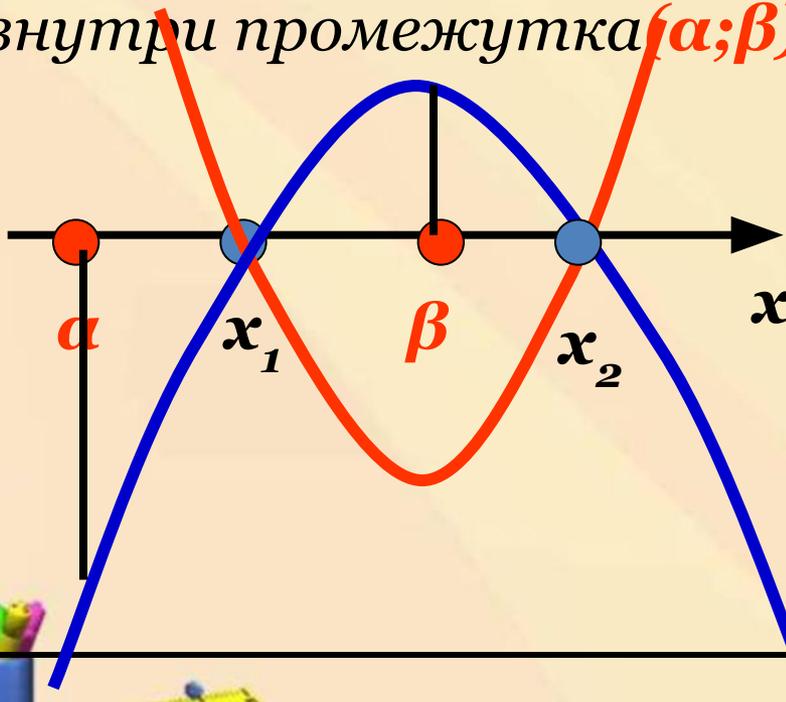
$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0 \\ \alpha < x_v < \beta \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{array} \right.$$



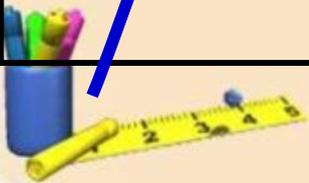
Расположение нулей квадратичной функции

Необходимые и достаточные условия

5) Меньший корень лежит внутри промежутка $(\alpha; \beta)$



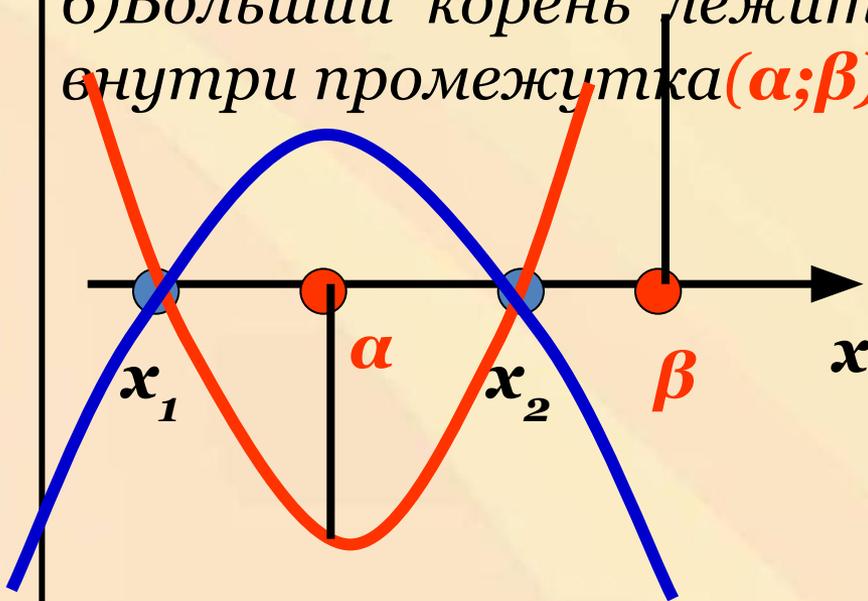
$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$



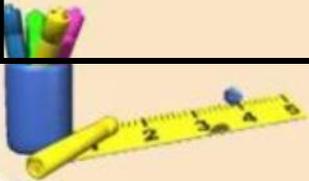
Расположение нулей квадратичной функции

Необходимые и достаточные условия

б) Большой корень лежит внутри промежутка $(\alpha; \beta)$

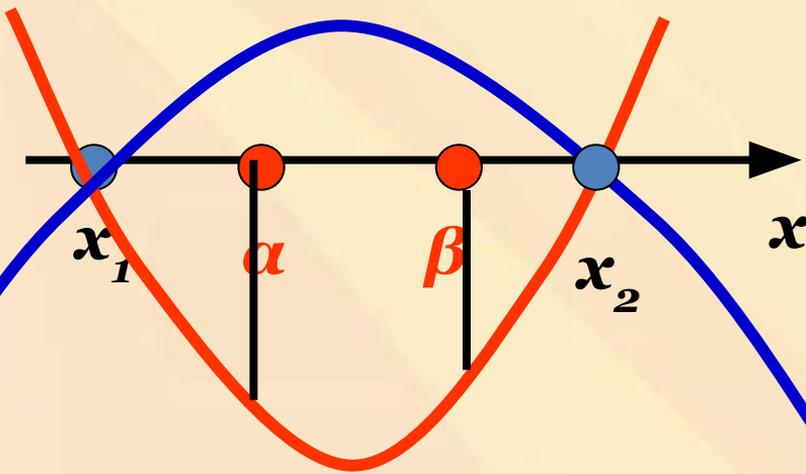


$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$$



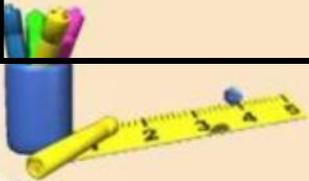
Расположение нулей квадратичной функции

7) Оба корня лежат вне промежутка $(\alpha; \beta)$



Необходимые и достаточные условия

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$$



09/21/2023

1. Найти все значения параметра a , при которых решением системы является вся прямая.

$$\begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \\ \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3. \end{cases}$$

2. При каких значениях параметра p функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$?

$$y = \sqrt{(4 - p)x^2 - 5x + \frac{5}{8}(1 - p)}$$

3. При каких значениях параметра a система неравенств
а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений?

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \geq 0, \\ x^2 - (a + 4)x + 4a \leq 0. \end{cases}$$



1. Найти все значения параметра a , при которых решением системы является вся прямая.

$$\begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \\ \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3. \end{cases}$$

09/21/2023

Решение.

$$\begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \\ \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + ax - 2 - 2x^2 + 2x - 2}{x^2 - x + 1} < 0, \\ \frac{x^2 + ax - 2 + 3x^2 - 3x + 3}{x^2 - x + 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - (a + 2)x + 4}{x^2 - x + 1} > 0, \\ \frac{4x^2 + (a - 3)x + 1}{x^2 - x + 1} > 0. \end{cases}$$

Так как квадратный трехчлен $x^2 - x + 1 = (x^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot x + 0,25) + 0,75 = (x - 0,5)^2 + 0,75 > 0$ при любом значении x , то получим систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - (a + 2)x + 4 > 0, \\ 4x^2 + (a - 3)x + 1 > 0. \end{cases}$$



Решим второе неравенство системы:

09/21/2023

2.

$$4x^2 + (a - 3)x + 1 > 0.$$

Решением неравенства является вся числовая прямая, если

$D < 0 \Leftrightarrow (a - 3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0$, т. е. квадратичная функция

$y = 4x^2 + (a - 3)x + 1$ **не пересекает ось абсцисс.**

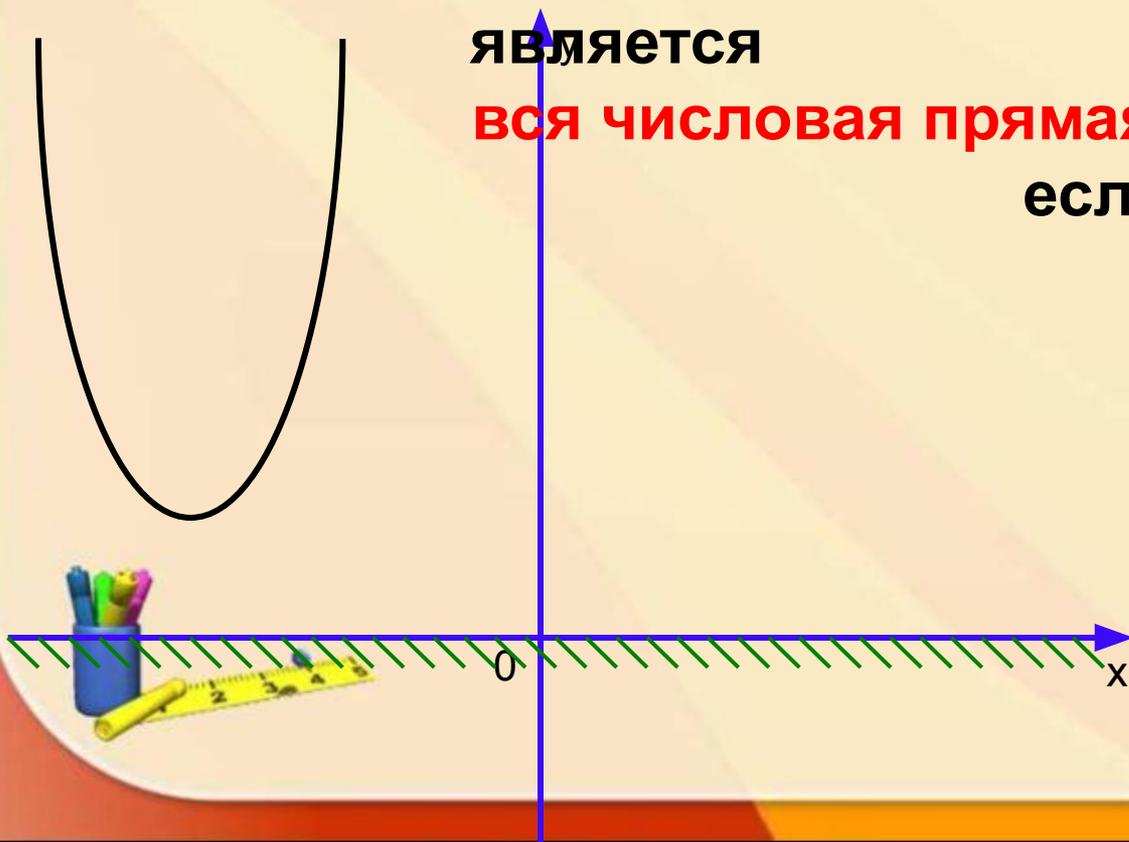
Решением неравенства

является

вся числовая прямая,

если...

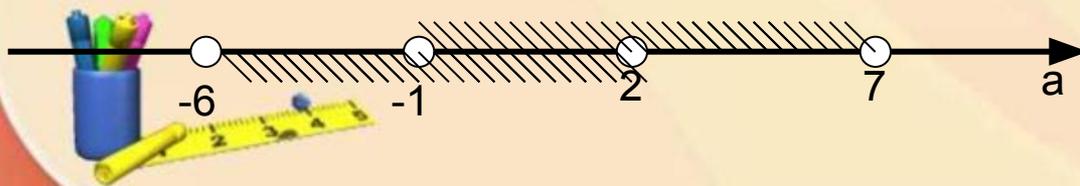
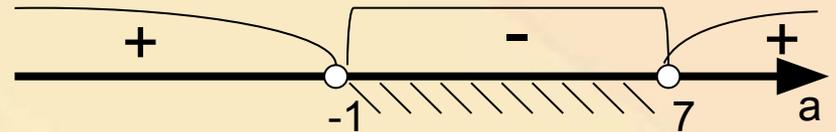
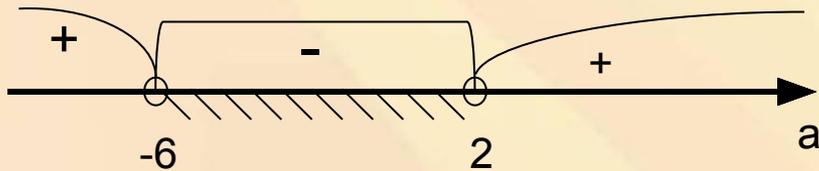
$$(a - 3)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 < 0$$



Решим систему неравенств: 09/21/2023

$$\begin{cases} (a+2)^2 - 16 < 0, \\ (a-3)^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a - 12 < 0, \\ a^2 - 6a - 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a+6)(a-2) < 0, \\ (a+1)(a-7) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < a < 2, \\ -1 < a < 7. \end{cases}$$



Ответ: (-1;2).

параметра p функция
определена
при всех $x \in \mathbb{R}$?

09/21/2023

$$y = \sqrt{(4-p)x^2 - 5x + \frac{5}{8}(1-p)}$$

Решение.

Область определения функции - множество
действительных
чисел, удовлетворяющих условию...

$$(4-p)x^2 - 5x + \frac{5}{8}(1-p) \geq 0$$

Какие условия должны выполняться, чтобы **решением** этого
неравенства $(4-p)x^2 - 5x + \frac{5}{8}(1-p) \geq 0$ являлась **вся числовая
прямая**?

$$\begin{cases} D \leq 0, \\ 4-p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 - 4 \cdot \frac{5}{8}(1-p)(4-p) \leq 0, \\ p < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 5p - 6 \geq 0, \\ p < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p \leq -1, \\ p \geq 6, \\ p < 4 \end{cases} \Leftrightarrow p \leq -1.$$

Ответ: $(-\infty ; -1]$.

