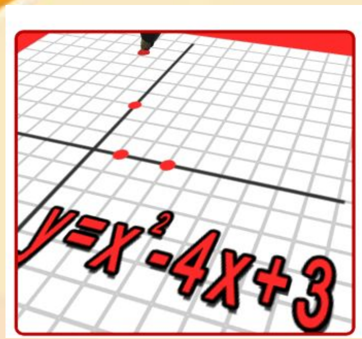
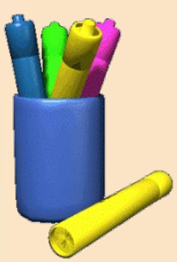
09/21/2023



Целое уравнение с параметром

Методическая разработка к учебнику Ю.Макарычева
«Алгебра-9» углубленное изучение

Драгунова Е.Ю. учитель математики МОУ СОШ № 10 г.о.Жуковский



09/21/2023

Что такое уравнение с параметром?

- ***Решить уравнение:***

$6x-1 = x+6$

$6x-x = 6+1$

$5x = 7$

$x = 7:5$

$x = 1,4$

$5x-1 = x+5$

$4x - 1 = x + 4$

$3x – 1 = x + 3$

$ax - 1 = x + a$

Это – уравнение с параметром

Определения

- Уравнение с переменной ***x*** в котором один или несколько коэффициентов обозначены буквой, называется ***уравнением с параметром.***
- ***Параметр*** – это фиксированное ***число***, значение которого в каждом конкретном случае известно.

$$3x = 7,\ \ 5x = 7,\ \ \frac{1}{3}x = 7,\ \ 0x = 7$$

***ax* = 7**

x- переменная

a- параметр

Определения

- ***Решить уравнение с параметром*** - это значит ***установить соответствие***, позволяющее для любого значения параметра решить уравнение, т. е. найти множество его корней.

Задания
в зависимости от параметра

Найти количество корней

Решить уравнение при каждом а

Вернемся к уравнению

ax - 1 = x + a* – *линейное уравнение

ax – x = a + 1

x(a – 1) = a + 1

Не будем торопиться с делением на (a -1), т.к. при a = 1 выражение обращается в нуль.

Рассмотрим возможные случаи:

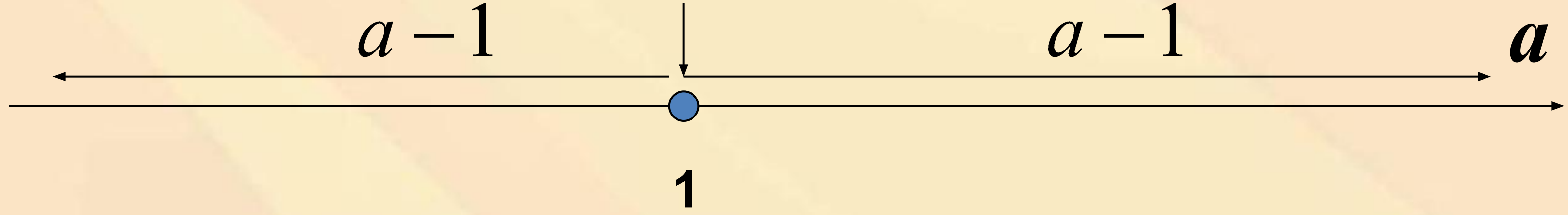
1) Если a = 1, то уравнение имеет вид 0 x = 2 и значит в этом случае данное уравнение не имеет корней.

2) Если a ≠ 1, то на (a – 1) ≠ 0 можно делить

$$x = \frac{a+1}{a-1} - \quad \textit{единственный корень}$$

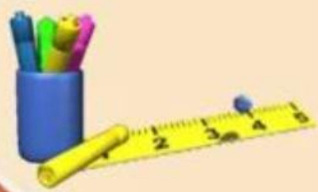
- На числовой прямой покажем, что мы не пропустили ни одного значения параметра ***a***, не указав при этом значения ***x***, которое соответствует данному значению ***a***

$$x = \frac{a+1}{a-1} \qquad \emptyset \qquad x = \frac{a+1}{a-1}$$



Ответ: при a = 1 корней нет;

при a ≠ 1 - $x = \frac{a+1}{a-1}$



Пример 2
решить уравнение
(a-2)(a+5)x = (a+1)(a – 2)

- **Рассмотрим возможные случаи:**
- 1) *Если* ***a = 2****, то уравнение имеет вид* ***0x =0*** *и его решением является* ***любое действительное число****;*
- 2) *Если* ***a = -5****, то уравнение имеет вид* ***0x = 28*** *и* ***не имеет корней;***
- *3)Если* ***a ≠2*** *и* ***a ≠ -5****, то уравнение имеет* ***единственный корень***

$$x = \frac{(a+1)(a-2)}{(a-2)(a-5)} = \frac{a+1}{a-5}$$

$$Ответ: приa = 2 \;\; x \in R, \;\; при \;\; a = -5 \;\; корней \;\; нет$$

$$при \;\; a \in (-\infty;-5) \cup (-5;2) \cup (2;+\infty) \quad x = \frac{a+1}{a+5}$$

Квадратные уравнения с параметром

Решить уравнение: $(a+4)x^2+2x(a+6)+2a+9=0$

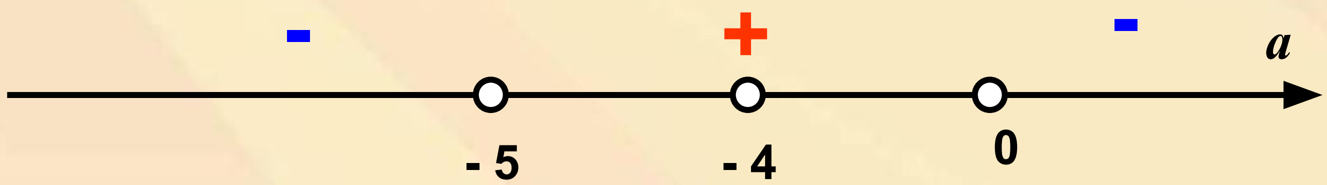
При любом ли значении а данное уравнение является квадратным?

1. Если $(a+4)=0$, то уравнение не будет квадратным

Если $a = -4$, то уравнение имеет вид: $4x+1=0$ и $x = -1/4$

2. Если $a \neq -4$, то уравнение квадратное, значит находим дискриминант

$$D = (a+6)^2 - (a+4)(2a+9) = -a(a+5)$$



$$При\ \ a \in (-\infty;-5) \cup (0;+\infty) \quad D < 0 \Rightarrow \text{корней нет}$$

$$При\ \ a = 0\ \ или\ \ a = -5\ \ D = 0 \Rightarrow \text{корень один}$$

$$При\ \ a \in (-5;-4) \cup (-4;0)\ \ D > 0 \Rightarrow \text{корня два}$$

$$D=-a(a+5)$$

09/21/2023

$$При\ \ a\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)\quad D<0\Rightarrow \text{корней нет}$$

$$При\ \ a\in(-5;-4)\cup(-4;0)\quad D>0\Rightarrow \text{корней два}$$

$$x=\frac{-(a+6)\pm\sqrt{-a(a+5)}}{a+4}$$

$$При\ \ a=0\quad или\quad a=-5\quad D=0\Rightarrow \text{корень один (ддвано совпавших)}$$

$$x_1=x_2=-1{,}5\qquad\qquad x_1=x_2=1$$

$$Ответ:\ при\ \ a=-4\ \ x=-\frac{1}{4};$$

$$при\ \ a\in(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)\ \ корней\ \ нет$$

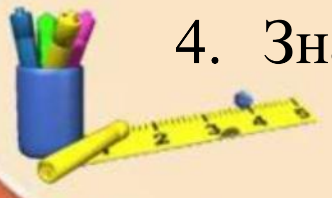
$$при\ \ a\in[-5;-4)\cup(-4;0]\quad \mathrm{x}=\frac{\mathrm{-\,(a+6)\pm\sqrt{-\,a(a+5)}}}{a+4}$$

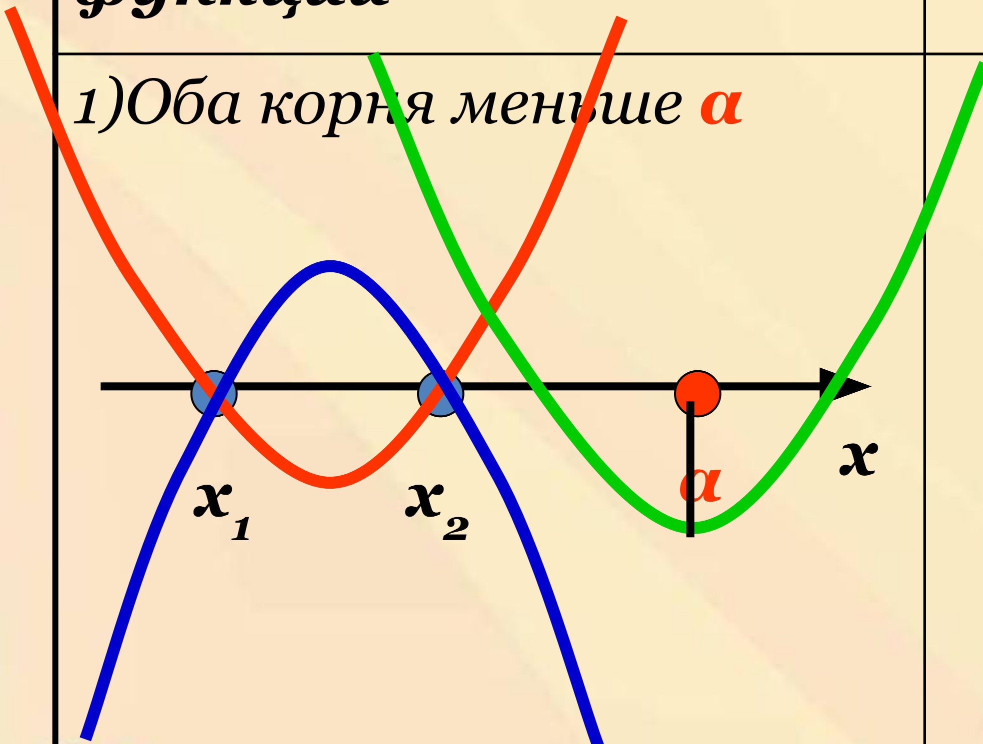
Расположение нулей квадратичной функции на координатной прямой

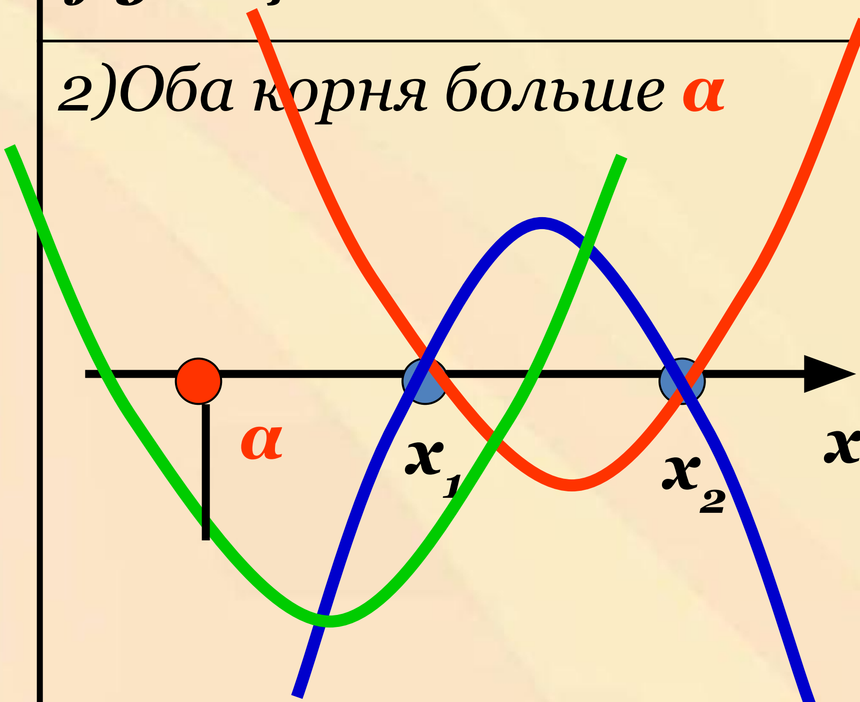
- *Пусть дана функция* $y = ax^2+bx + c,\ a\neq 0$
- x_1 *и* x_2 *нули этой функции (корни уравнения* $ax^2+bx + c=0$*) и* $x_2 \geq x_1$
- *Числа* α *и* β

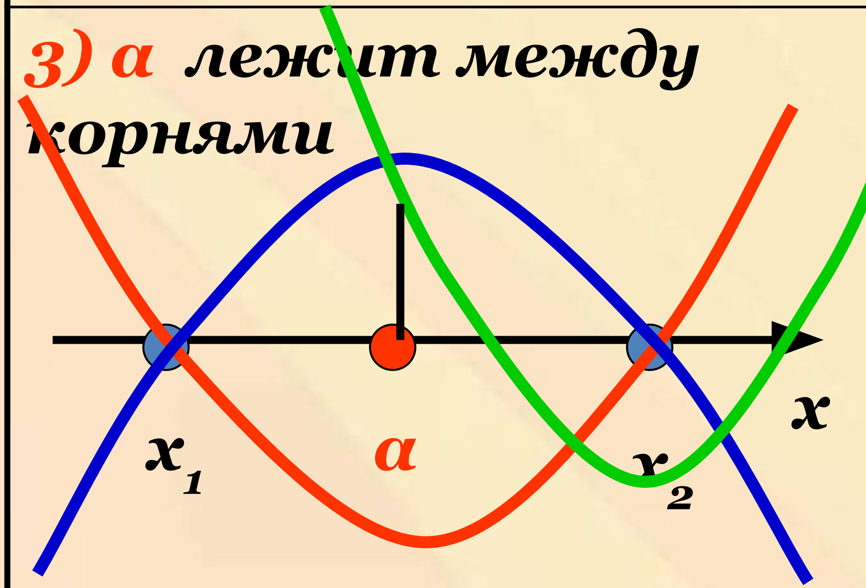
Условия, которые придется учитывать:

1. Знак дискриминанта (корни должны быть)
2. Формула для нахождения координат вершины параболы
3. Направление ветвей параболы
4. Знак числа f(α) и f(β)



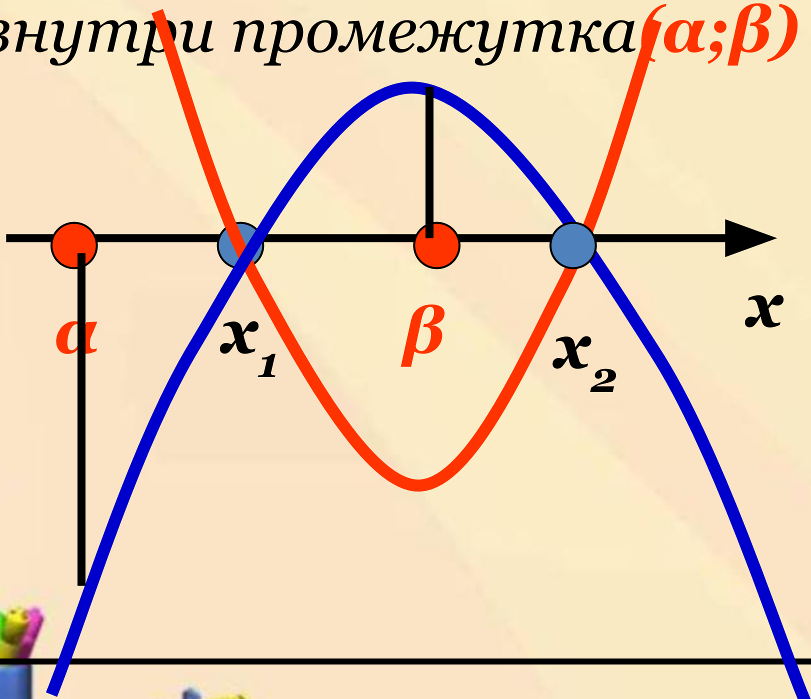
Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
1)Оба корня меньше **α** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в < \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$

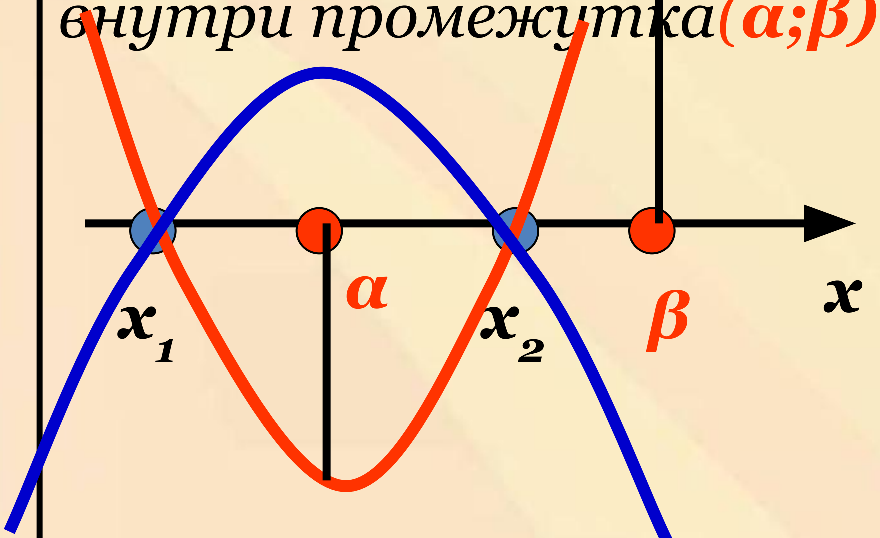
Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
2)Оба корня больше **α** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в > \alpha \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \end{cases}$

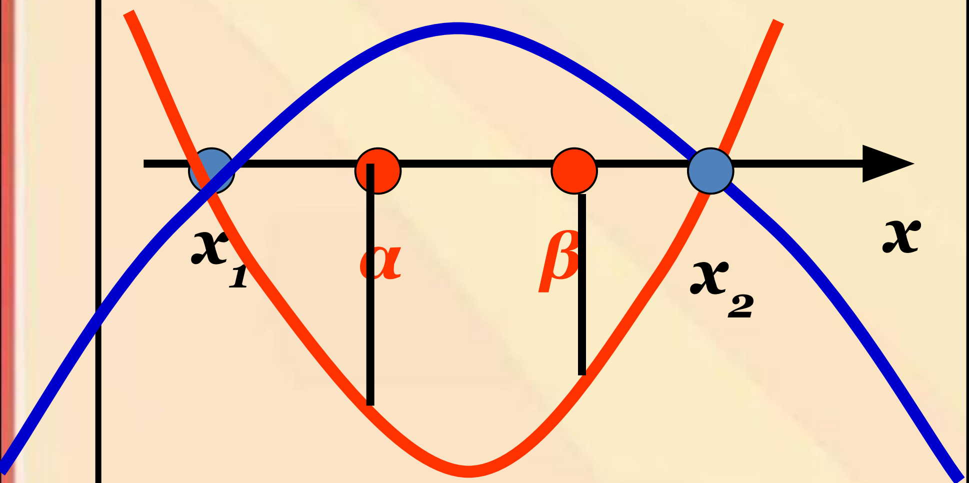
Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
3) α лежит между корнями 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \end{cases}$

09/21/2023

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
4)Оба корня лежат внутри промежутка **(α;β)** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ \alpha < x_в < \beta \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
5)Меньший корень лежит внутри промежутка **(α;β)** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) > 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
6)Больший корень лежит внутри промежутка(α;β) 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) > 0 \end{cases}$

Расположение нулей квадратичной функции	**Необходимые и достаточные условия**
7)Оба корня лежат вне промежутка**(α;β)** 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ a \cdot f(\alpha) < 0 \\ a \cdot f(\beta) < 0 \end{cases}$

1. **Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы является вся прямая.**

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} > -3. \end{cases}$$

2. **При каких значениях параметра p функция определена при всех x∈R ?**

$$y = \sqrt{(4-p)x^2 - 5x + \frac{5}{8}(1-p)}$$

3. **При каких значениях параметра а система неравенств**
   а) имеет единственное решение;
   б) не имеет решений;
   в) имеет бесконечно много решений?

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 \ge 0, \\ x^2 - (a+4)x + 4a \le 0. \end{cases}$$

09/21/2023

1. Найти все значения параметра *a*, при которых решением системы является вся прямая.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} > -3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} < 2, \\ \dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1} > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+ax-2-2x^2+2x-2}{x^2-x+1} < 0, \\ \dfrac{x^2+ax-2+3x^2-3x+3}{x^2-x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-(a+2)x+4}{x^2-x+1} > 0, \\ \dfrac{4x^2+(a-3)x+1}{x^2-x+1} > 0. \end{cases}$$

Так как квадратный трехчлен $x^2-x+1=(x^2-2\cdot 0,5\cdot x+0,25)+0,75=$ $(x-0,5)^2+0,75>0$ при любом значении x, то получим систему неравенств:

Оцените знаменатель дробей.

$$\begin{cases} x^2-(a+2)x+4>0, \\ 4x^2+(a-3)x+1>0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы:

09/21/2023

2.

$$4x^2 + (a-3)x + 1 > 0.$$

Решением неравенства является вся числовая прямая, если $D < 0 \Leftrightarrow \; (a-3)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 < 0$, т. е. квадратичная функция $y = 4x^2 + (a-3)x + 1$ **не пересекает ось абсцисс.**

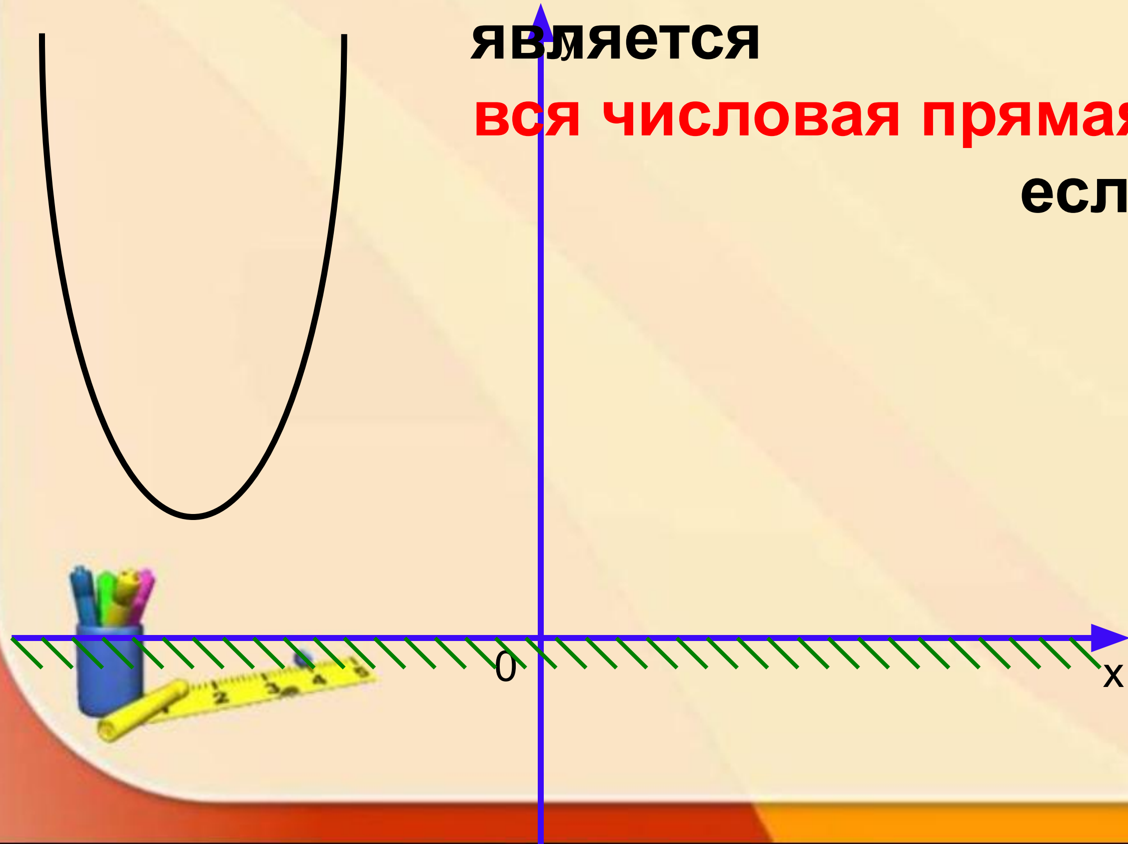
Решением неравенства

является

вся числовая прямая,

если…

$$(a-3)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 < 0$$

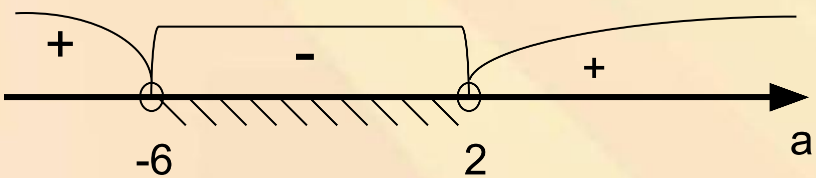


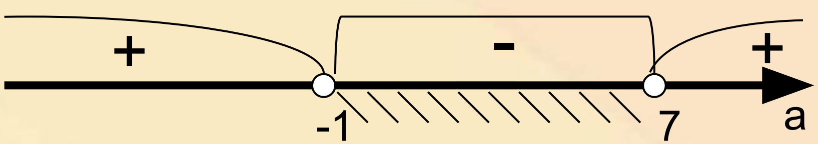
Решим систему неравенств:

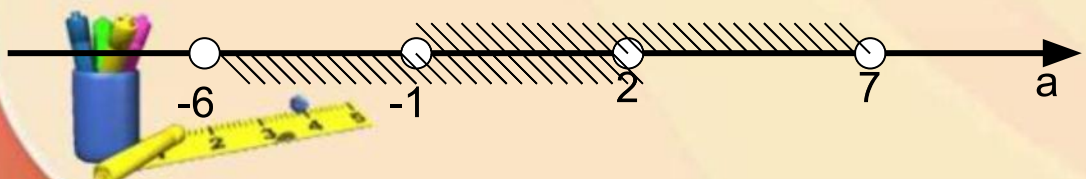
09/21/2023

$$\begin{cases}(a+2)^2-16<0,\\(a-3)^2-16<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+4a-12<0,\\a^2-6a-7<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}(a+6)(a-2)<0,\\(a+1)(a-7)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6<a<2,\\-1<a<7.\end{cases}$$







Ответ: (-1;2).

2. При каких значениях
параметра p функция
определена
при всех x∈R ?

09/21/2023

$$y=\sqrt{(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)}$$

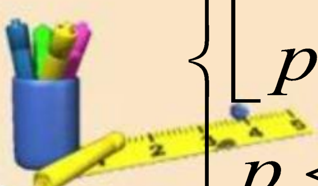
Решение.

Область определения функции - множество действительных чисел, удовлетворяющих условию… $(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)\geq 0$

Какие условия должны выполняться, чтобы **решением** этого неравенства $(4-p)x^2-5x+\frac{5}{8}(1-p)\geq 0$ являлась **вся числовая прямая?**

$$\begin{cases} D\leq 0, \\ 4-p>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25-4\cdot\frac{5}{8}(1-p)(4-p)\leq 0, \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2-5p-6\geq 0, \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} p\leq -1, \\ p\geq 6, \end{array}\right. \\ p<4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad p\leq -1.$$



Ответ:(-∞ ; -1].