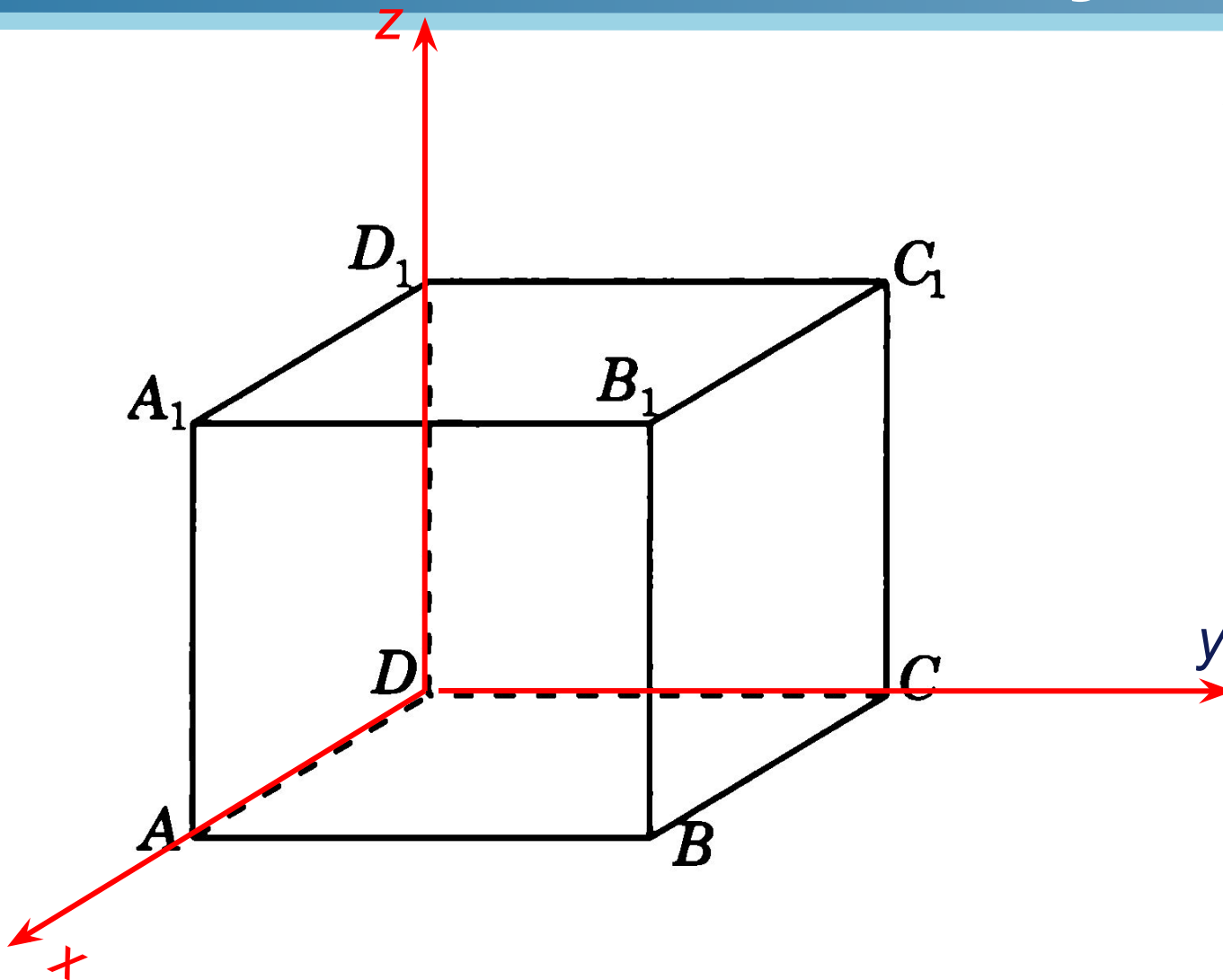
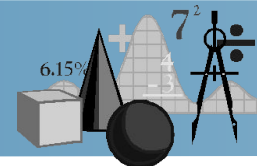


Решение задач С2 методом координат

*Дорофеева Лилия Ильинична
учитель математики
МБОУ СОШ №6, г.Нижнекамск
Республики Татарстан*

ЕДИНИЧНЫЙ КУБ



$A(1; 0; 0)$

$A_1(1; 0; 1)$

$B(1; 1; 0)$

$B_1(1; 1; 1)$

$C(0; 1; 0)$

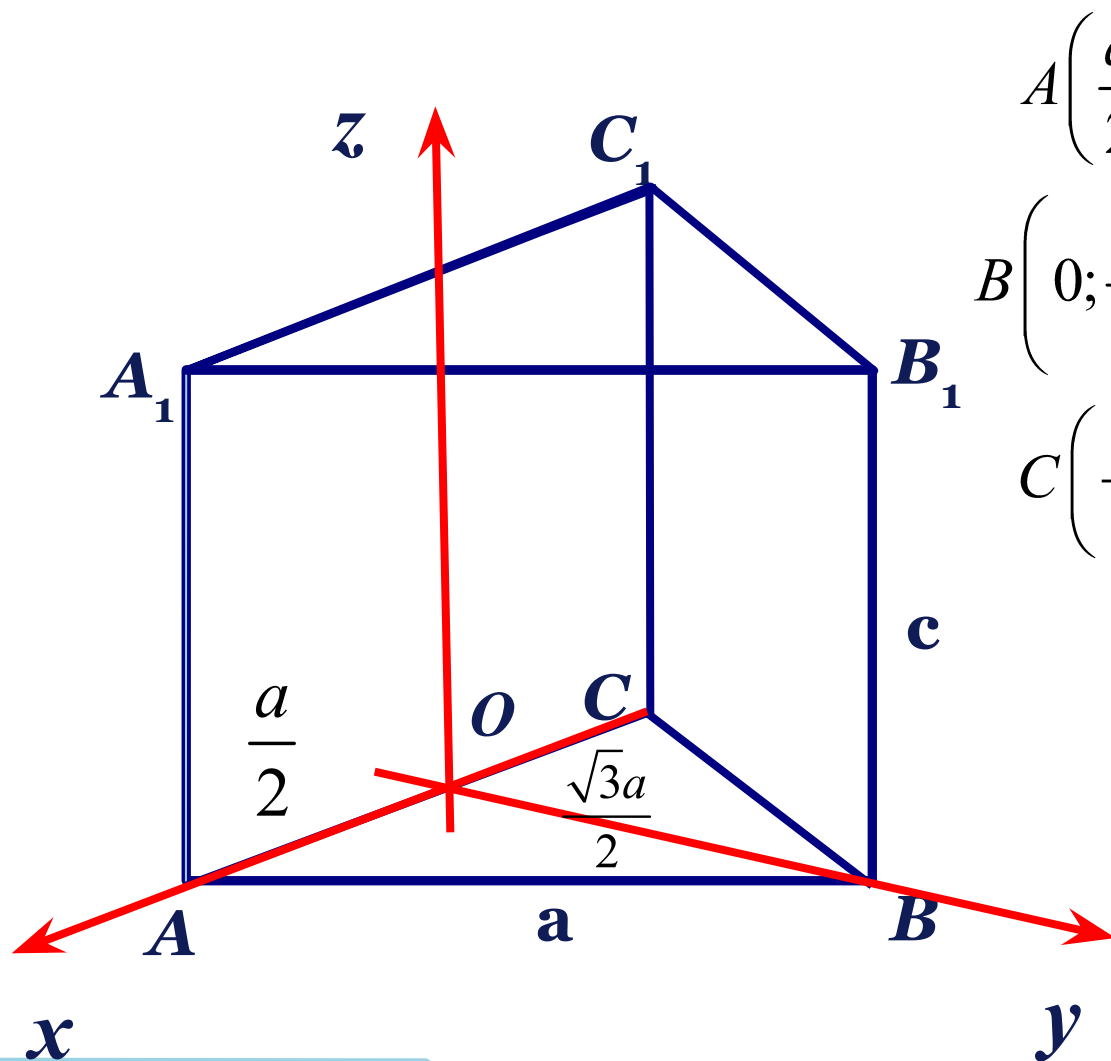
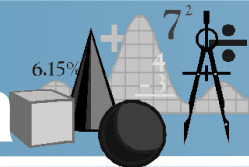
$C_1(0; 1; 1)$

$D(0; 0; 0)$

$D_1(0; 0; 1)$



Правильная треугольная призма



$$A\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$A_1\left(\frac{a}{2}; 0; c\right)$$

$$B\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

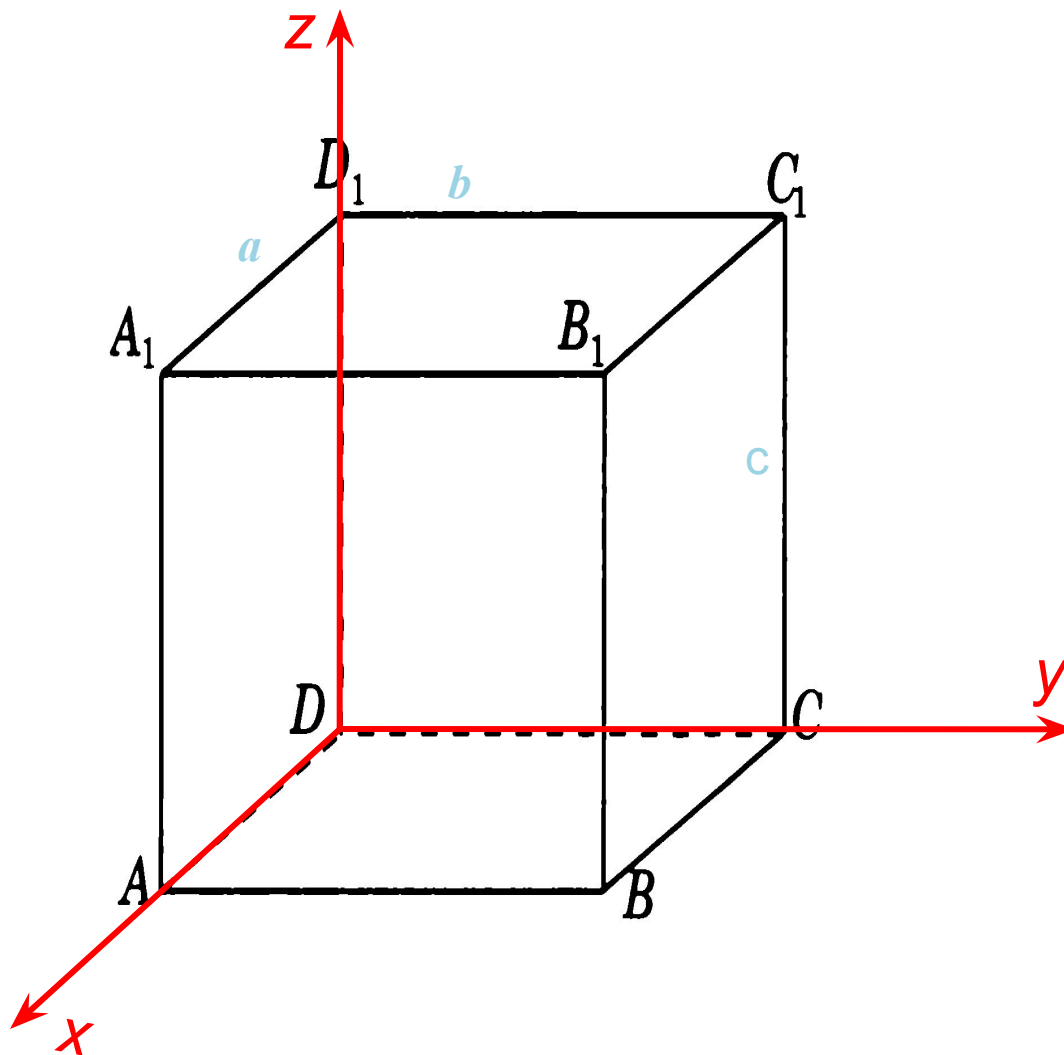
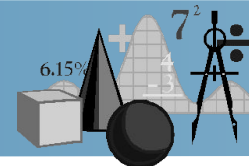
$$B_1\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$C_1\left(-\frac{a}{2}; 0; c\right)$$



Прямоугольный параллелепипед



$A(a; 0; 0)$

$A_1(a; 0; c)$

$B(a; b; 0)$

$B_1(a; b; c)$

$C(0; b; 0)$

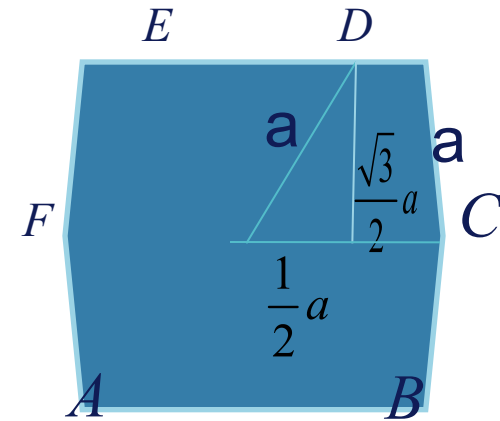
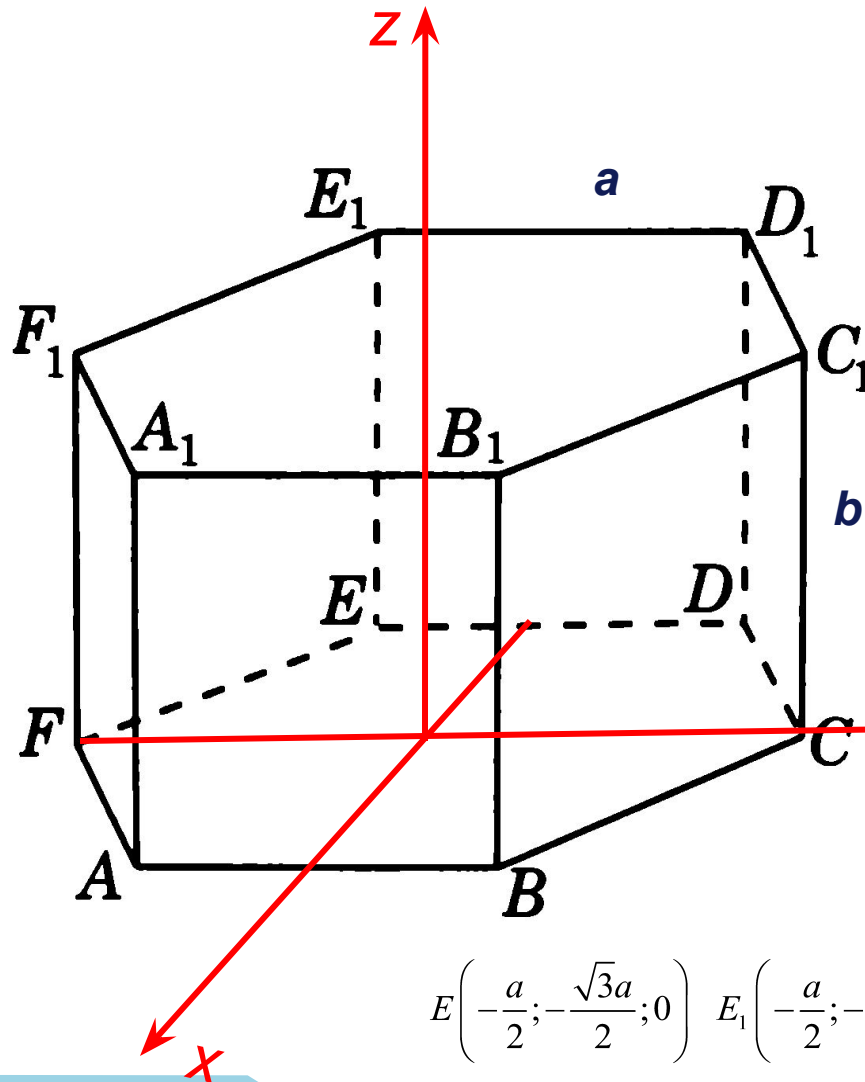
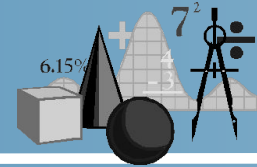
$C_1(0; b; c)$

$D(0; 0; 0)$

$D_1(0; 0; c)$



Прямоугольная шестиугольная призма



$$E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad E_1\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$C(a; 0; 0) \quad C_1(a; 0; c)$$

$$A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad A_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

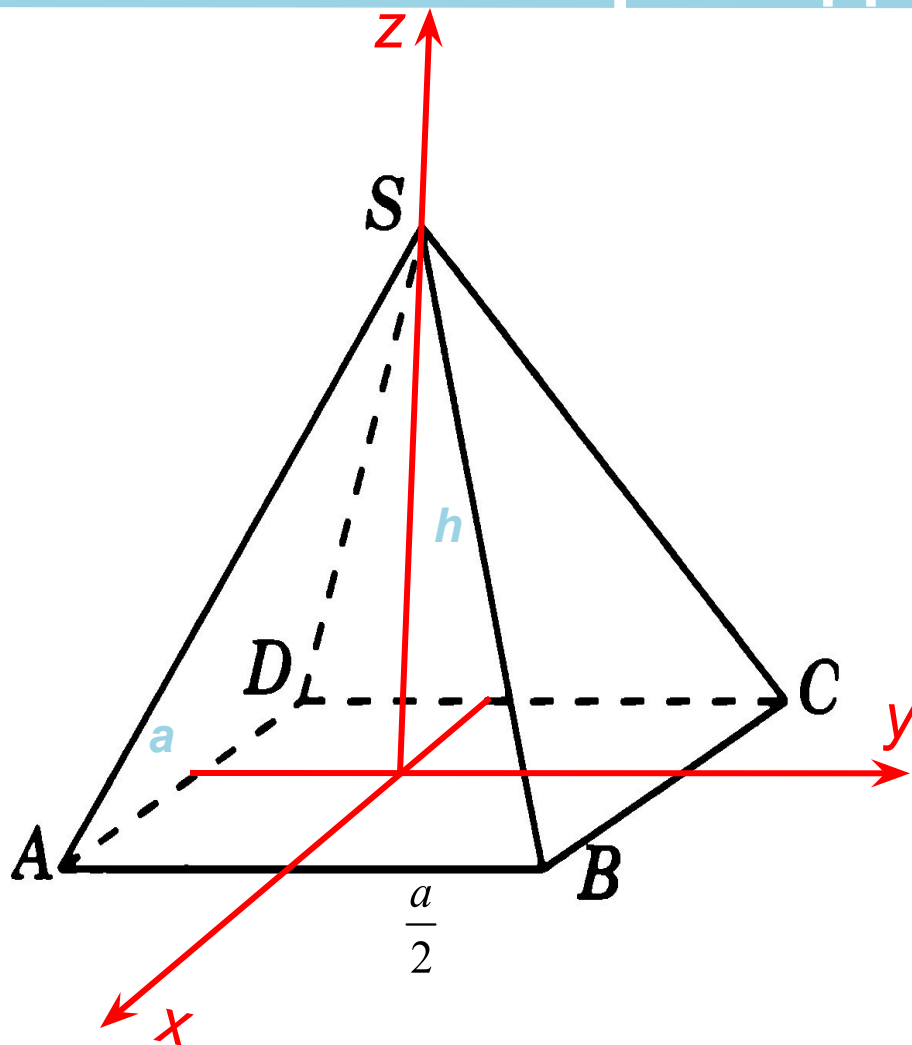
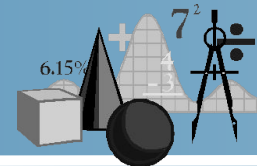
$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad B_1\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right) \quad D_1\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; c\right)$$

$$F(-a; 0; 0) \quad F_1(-a; 0; c)$$



Правильная четырёхугольная пирамида



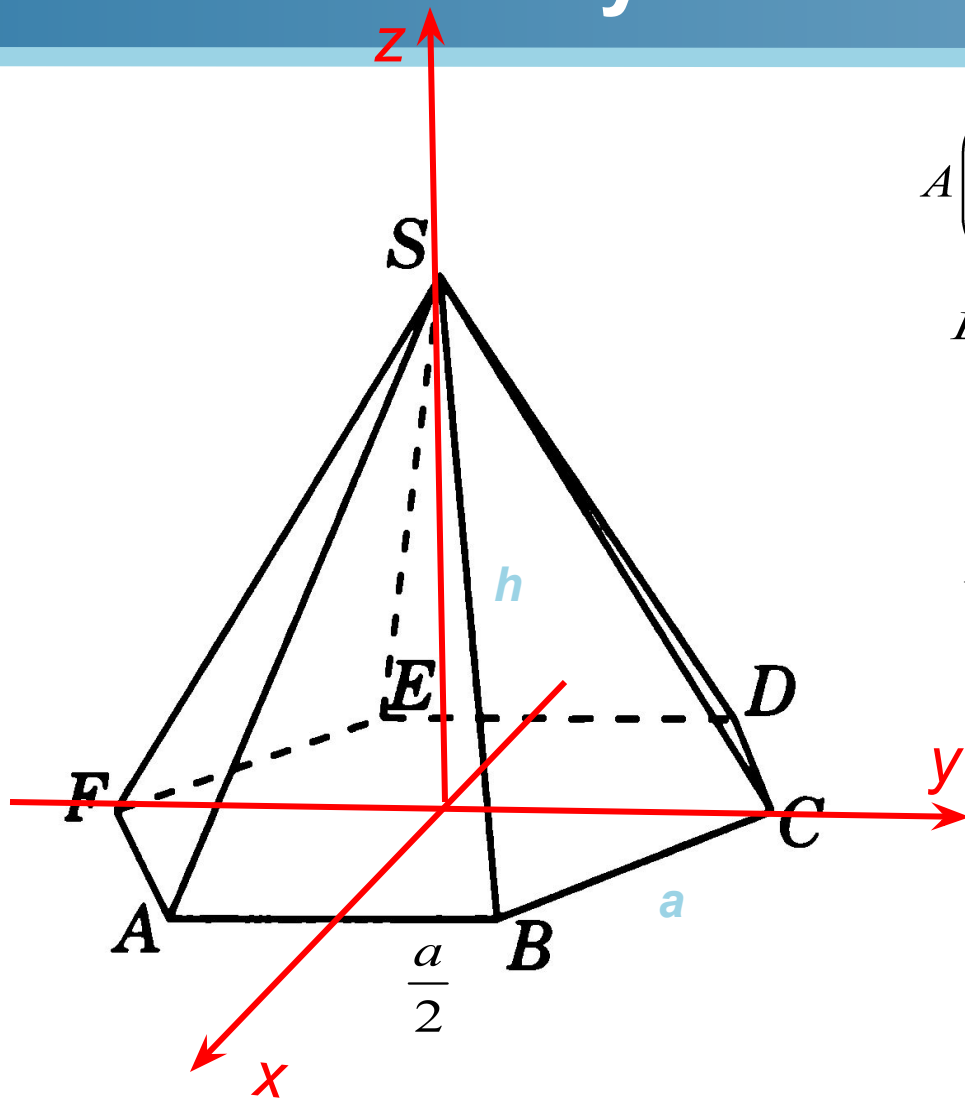
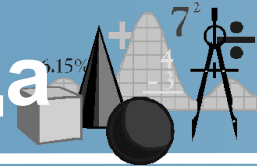
$$A\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right) \quad B\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

$$C\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right) \quad S(0; 0; h)$$

$$D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{a}{2}; 0\right)$$



Правильная шестиугольная пирамида



$$A\left(-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$B\left(\frac{a}{2}; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$C(a; 0; 0)$$

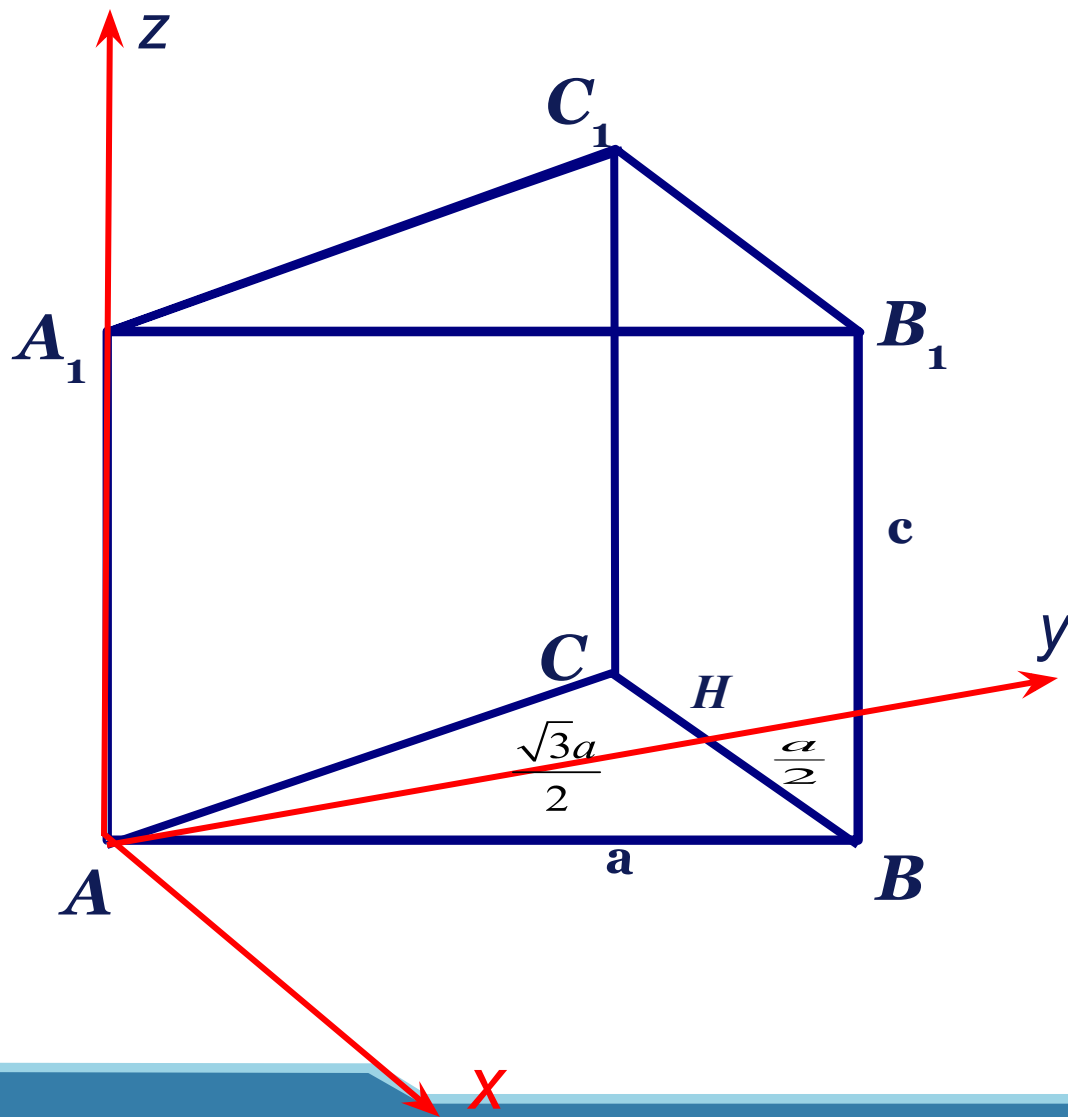
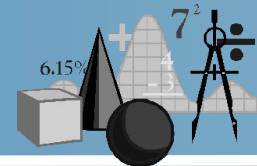
$$D\left(\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$E\left(-\frac{a}{2}; -\frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$S(0; 0; h)$$



Правильная треугольная призма



$$A(0;0;0)$$

$$A_1(0;0;1)$$

$$B(1;0;0),$$

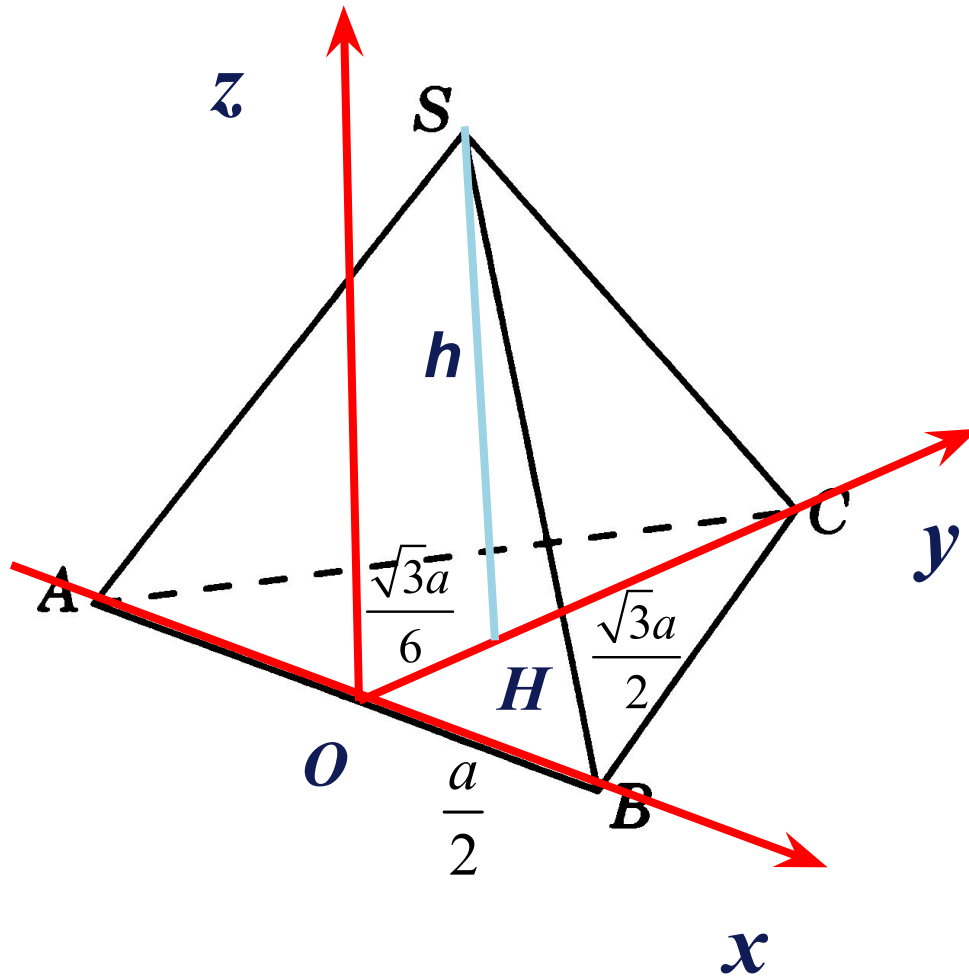
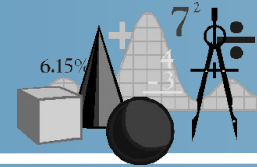
$$B_1(1;0;1)$$

$$C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$



Правильная треугольная пирамида



$$B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

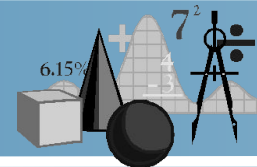
$$C\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{2}; 0\right)$$

$$A\left(-\frac{a}{2}; 0; 0\right)$$

$$S\left(0; \frac{\sqrt{3}a}{6}; h\right)$$



Угол между прямой и плоскостью

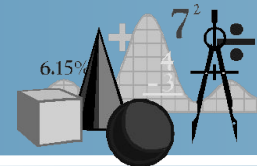


Прямая a образует с плоскостью α угол φ ($\varphi \leq 90^\circ$). Плоскость задана уравнением: $ax+by+cz+d=0$ и $n\{a; b; c\}$ вектор нормали, Синус угла определяется по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|x_a \cdot a + y_a \cdot b + z_a \cdot c|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Угол между прямыми



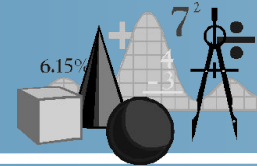
Вектор $\vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$ лежит на прямой а, Вектор $\vec{b}\{x_b; y_b; z_b\}$ лежит на прямой в.

Косинус угла между прямыми а и в:

$$\cos \varphi = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$



Угол между плоскостями

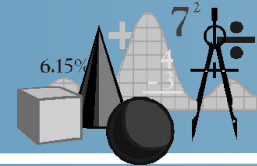


1.3. Угол между двумя плоскостями. Плоскость α задана уравнением: $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$ и ее вектор нормали $n_\alpha \{a_1; b_1; c_1\}$ плоскость β задана уравнением $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ и ее вектор нормали $n_\beta \{a_2; b_2; c_2\}$. Косинус угла φ между плоскостями:

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$



Расстояние от точки до плоскости

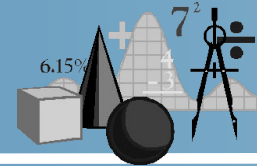


Расстояние h от точки $M(x_M; y_M; z_M)$ до плоскости α заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$ определяется по формуле:

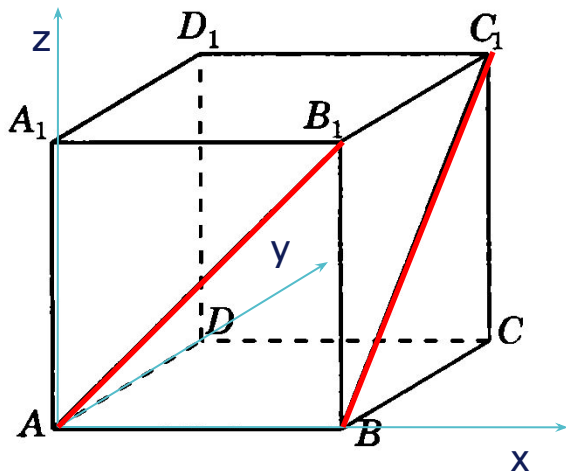
$$h = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c \cdot z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Примеры решения задач



1. В единичном кубе найти угол между прямыми AB_1 и BC_1



Введем систему координат и найдем координаты точек A, B, B_1, C_1

$$A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), B_1(1; 0; 1), C_1(1; 1; 1)$$

Находим координаты направляющих векторов прямых AB_1 и BC_1 по формуле 1.

$$\overrightarrow{AB_1} \{1; 0; 1\}, \overrightarrow{BC_1} \{0; 1; 0\}$$

Косинус угла φ между прямыми AB_1 и BC_1 определяется по формуле 1.1:

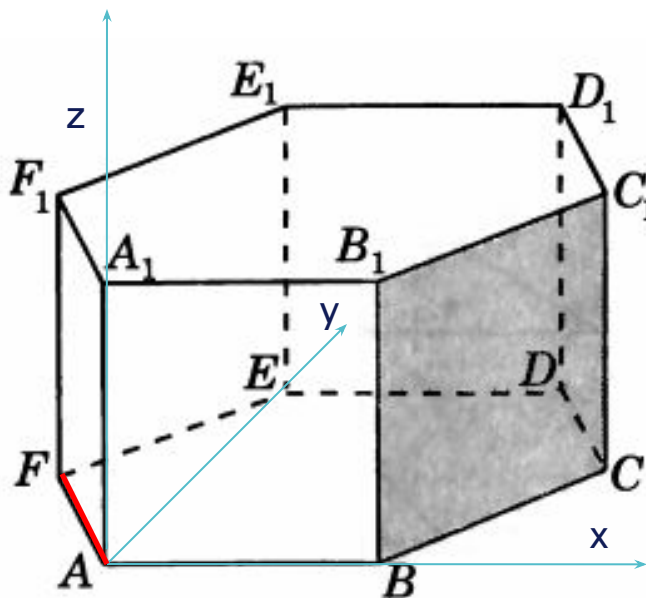
$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ$$

Ответ : 60°



2. В правильной шестиугольной призме
1, найти угол между прямой AF и плоскостью

А.; все ребра которой равны
BCC₁



Введем систему координат и находим координаты
нужных точек.

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AF} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right\}$

Плоскость BCC₁ совпадает с плоскостью грани
BB₁C₁C; зададим ее с помощью точек

$$B(1;0;0), B_1(1;0;1), C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

Пусть $ax+by+cz+d=0$ – уравнение плоскости BCC₁

$$B(1;0;0) \in (BCC_1) \Rightarrow a+d=0 \quad d=-a$$

$$B_1(1;0;1) \in (BCC_1) \Rightarrow a+c+d=0 \quad c=0$$

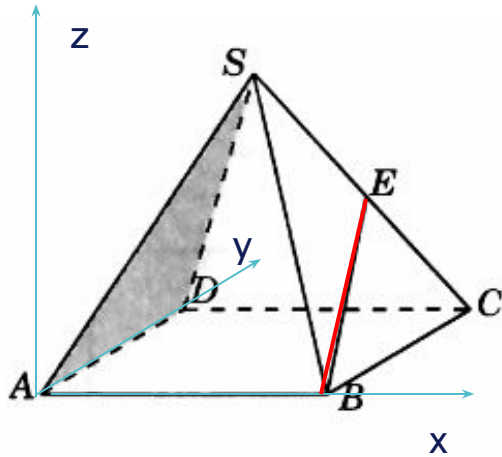
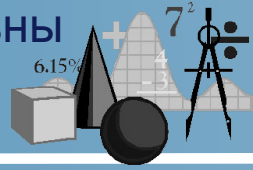
$$C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \in (BCC_1) \Rightarrow a \cdot \frac{3}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

Уравнение плоскости BCC₁ примет вид $ax - \frac{a}{\sqrt{3}}y - a = 0$ или $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

Вектор нормали : $\vec{n} \{ \sqrt{3}; -1; 0 \}$

Синус искомого угла: $\sin \varphi = \frac{\left| \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot 0 \right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 0} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ Ответ : } \varphi = 60^\circ$

3. В правильной четырехугольной пирамиде, все ребра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E — середина ребра SC



Координаты точки E определим по формуле 3:

$$E\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ и } \overline{BE}\left\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right\}$$

Пусть уравнение плоскости ADS $ax+by+cz+d=0$

Из того, что $A(0;0;0), D(0;1;0), S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (ADS)$

следует, что $d=0, b+d=0$ и $a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + d = 0$

Отсюда получим, что $a = -\sqrt{2}c, b = 0, d = 0$ и уравнение плоскости ADS примет вид:

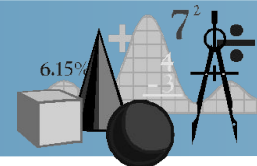
$$-\sqrt{2}cx + cz = 0, \text{ или } \sqrt{2}x - z = 0. \text{ Вектор нормали } \vec{n}\{\sqrt{2}; 0; -1\}$$

Синус угла между прямой BE плоскостью ADS определим по формуле 1.2

$$\sin \varphi = \frac{\left| \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

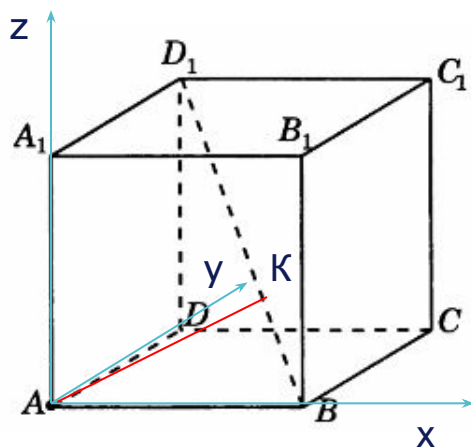
Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$

4.В единичном кубе $A... D_1$ найти расстояние от точки A до прямой BD_1



Находим координаты точек $A(0;0;0) B(1;0;0) D_1(0;1;1)$, вектора $\overline{BD_1} \{-1;1;1\}$

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра AK .
Если отрезок BD разделен точкой $K(x;y;z)$ в отношении λ , то координаты точки K определяются по формуле 1.5:



$$x = \frac{1+0}{1+\lambda}; y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda} \quad K\left(\frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right) \quad \overline{AK} \left\{ \frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda} \right\}$$

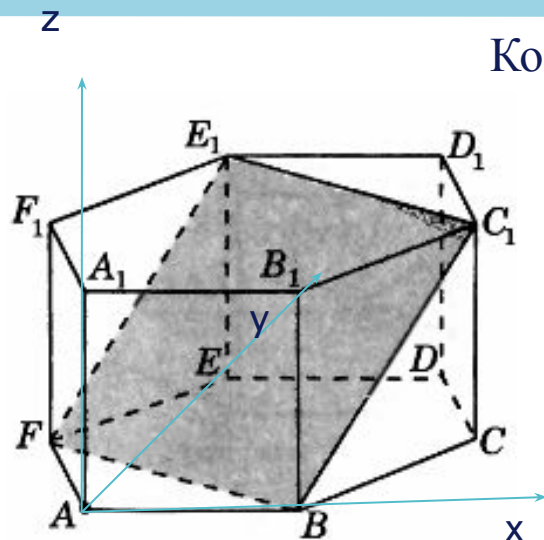
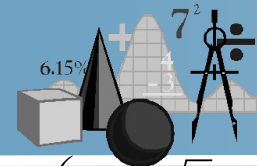
$$\text{т.к. } \overline{AK} \perp \overline{BD_1} \Rightarrow \overline{AK} \cdot \overline{BD_1} = 0$$

$$-\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \overline{AK} \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$|\overline{AK}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3}$$



5. В правильной шестиугольной призме $A...F_1$ все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости BFE_1



Координаты точек $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$ и $E_1(0;\sqrt{3};1)$, $F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$

Подставив координаты точек B, F и E_1 в общее уравнение плоскости получим систему уравнений:

$$B \in (BFE_1) \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0$$

$$F\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right) \in (BFE_1) \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0$$

$$E_1(0;\sqrt{3};1) \in (BFE_1) \Rightarrow b \cdot \sqrt{3} + c \cdot 1 + d = 0$$

Откуда $d = -a, c = -2a, b = a\sqrt{3}$

Уравнение плоскости примет вид: $ax + \sqrt{3}ay - 2az - a = 0$, или $x + \sqrt{3}y - 2z - 1 = 0$

Вектор нормали: $\vec{n}\{1; \sqrt{3}; -2\}$

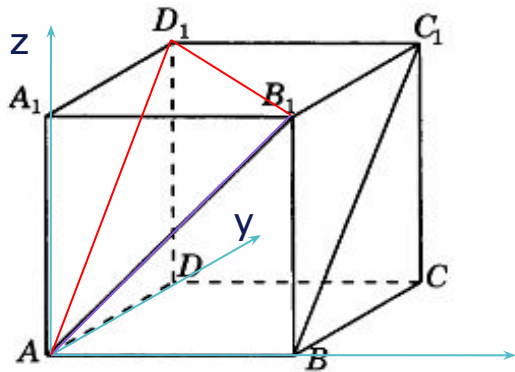
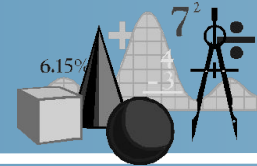
Вычислим расстояние h от точки A до плоскости BFE_1 по формуле 1.4:

$$h = \frac{1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 0 + (-2) \cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$



6.В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние между прямыми AB_1 и BC_1



При параллельном переносе на вектор \overline{BA} прямая BC_1 отображается на прямую AD_1 . Таким образом, плоскость AB_1D_1 содержит прямую AB_1 и параллельна прямой BC_1 . Расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 находим как расстояние от точки B до плоскости AB_1D_1

Пусть $ax+by+cz+d=0$ – уравнение плоскости AB_1D_1 .

Так как $A(0;0;0) \in (AB_1D_1) \Rightarrow d = 0$

$B_1(1;0;1) \in (AB_1D_1) \Rightarrow a = -c$

$D_1(0;1;1) \in (A_1B_1D_1) \Rightarrow b = -c$

Уравнение плоскости запишется как $-cx-cy+cz=0$, или $x+y+z=0$.

Вектор нормали $\vec{n}\{1;1;-1\}$

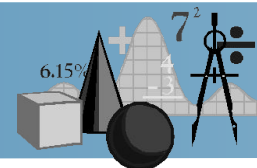
Расстояние h от точки $B(1;0;0)$ до плоскости AB_1D_1 находим по формуле

$$h = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$



Литература:



1. Каталог задач: www.problems.ru
2. Образовательный портал «Физ/мат класс»: www.fmclass.ru
3. Открытый банк задач: www.mathege.ru
4. Федеральный институт педагогических измерений: www.fipi.ru

