Элементы алгебры логики.

2.Упрощение логических выражений

Васина О.В.

Законы логики

Закон тождества

Закон непротиворечия

Закон исключения третьего

Закон двойного отрицания

Законы де Моргана

Правило коммутативности

Правило ассоциативности

Правило дистрибутивности

Законы исключения констант

Закон поглощения

Закон исключения (склеивания)

Другие законы

Примеры

Задания

Васина О.В.

Закон тождества

Всякое высказывание тождественно самому себе:

$$A = A$$

Закон непротиворечия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание *А* — истинно, то его отрицание *не А* должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно:

$$A \mathbin{\&} \neg A = 0$$

Васина О.В.

Закон исключения третьего

Результат логического сложения высказывания и отрицания его всегда принимает значение истина:

$$A \vee \neg A = 1$$

Васина О.В.

Закон двойного отрицания

Двойное отрицание некоторое высказывание, равно исходному высказыванию:

$$\neg\neg A = A$$

Васина О.В.

Законы де Моргана

Отрицание дизъюнкции высказываний равнозначно
конъюнкции отрицаний этих высказываний:

$$\neg(A \vee B) = \neg A \ \& \ \neg B$$

Отрицание конъюнкции высказываний равнозначно
дизъюнкции отрицаний этих высказываний:

$$\neg(A \ \& \ B) = \neg A \vee \neg B$$

Правило коммутативности

В алгебре высказываний можно менять местами логические переменные при операциях логического умножения и логического сложения:

A & B = B & A ***A v B = A v B***

Васина О.В.

Правило ассоциативности

Можно пренебрегать скобками в логическом выражении, если в нем используются только операция логического умножения или только операция логического сложения:

Логическое умножение Логическое сложение

(A & B) & C = A & (B & C) **(A v B) v C = A v (B v C)**

Васина О.В.

Правило дистрибутивности

В алгебре логики за скобки можно выносить как общий множитель, так и общее слагаемое:

Дистрибутивность умножения относительно сложения

(A & B) v (A & C) = A & (B v C)

Дистрибутивность сложения относительно умножения

(A v B) & (A v C) = A v (B & C)

Васина О.В.

Законы исключения констант

$$A \vee 1 = 1, \quad A \vee 0 = A;$$
$$A \wedge 1 = A, \quad A \wedge 0 = 0.$$

Васина О.В.

Закон поглощения

$A \lor (A \land B) = A;$

$A \land (A \lor B) = A.$

Васина О.В.

Закон исключения (склеивания)

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = B;$

$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B$

Васина О.В.

Другие законы

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B;$

$\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge B$

$A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B);$

$A \Leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee B).$

Примеры

Упростить логическое выражение:
(A & B) ∨ (A & ¬B).

1.Воспользуемся правилом дистрибутивности и вынесем за скобки A:
(A & B) ∨ (A & ¬B) = A & (B ∨ ¬B).

2.По закону исключенного третьего **B ∨ ¬B = 1**, следовательно:
A & (B ∨ ¬B) = A & 1 = A.

Примеры

Упростить логическое выражение:
(A ∨ B) & (A ∨ C).

1.Раскроем скобки: **(A ∨ B) & (A ∨ C) = A & A ∨ A & C ∨ B & A ∨ B & C**;
3. Так как **A & A =A**, следовательно:
A & A ∨ A & C ∨ B & A ∨ B & C = A ∨ A & C ∨ B & A ∨ B & C;
4. В высказываниях **A** и **A & C** вынесем за скобки **A** и используя свойство **A ∨ 1= 1**, получим:
A ∨ A & C ∨ B & A ∨ B & C = A & (1 ∨ C) ∨ B & A ∨ B & C = A ∨ B & A ∨ B & C;
5. Аналогично предыдущему пункту вынесем за скобки высказывание **A**:
A ∨ B & A ∨ B & C = A & (1 ∨ B) ∨ B & C = A ∨ B & C.

Задание1

Упростить выражение $\neg(A \vee B) \wedge \neg C$

Преобразуем в соответствии с законом де Моргана:

$\neg(A \vee B) \wedge \neg C = \neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

Задание2

Упростить выражение $\neg(A \lor B) \land \neg C$

Преобразуем в соответствии с законом де Моргана:

$$\neg(A \lor B) \land \neg C = \neg A \land \neg B \land \neg C$$

Задание 3

Упростить логическое выражение:

$\neg(A \lor \neg B) \lor \neg(A \lor B) \lor A \& B$

1. Раскроем инверсию сложных выражений, используя законы де Моргана:

$\neg(A \lor \neg B) \lor \neg(A \lor B) \lor A \& B = \neg A \& B \lor \neg A \& \neg B \lor A \& B$

2. Вынесем за скобки в первых двух слагаемых и используем закон исключения третьего **$B \lor \neg B = 1$**:

$\neg A \& B \lor \neg A \& \neg B \lor A \& B = \neg A \& (B \lor \neg B) \lor A \& B = \neg A \lor A \& B$

3. Применяем распределительный закон для операции «И» и еще раз закон исключения третьего **$A + \neg A = 1$**:

$\neg A \lor A \& B = (\neg A \lor A) \& (\neg A \lor B) = \neg A \lor B$

Источники литературы

Законы логики http://markx.narod.ru/bool/zaklog.htm
Упрощение логических выражений https://sites.google.com/site/marratashalogica/zakony-logiki/uprosenie-logiceskih-vyrazenij
Основы логики и логические основы компьютера http://mir-logiki.ru/log_zakoni

Спасибо за внимание