

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ-4

## 5. Линейные ДУ I порядка.

- Общий вид линейного ДУ I порядка:

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0$$

$A(x)$ ,  $B(x)$  и  $C(x)$ - заданные функции,  
причем  $A(x) \neq 0$

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad | : A(x) \neq 0$$

$$y' + \underbrace{\frac{B(x)}{A(x)}}_{p(x)} y + \underbrace{\frac{C(x)}{A(x)}}_{-q(x)} = 0$$

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Существует несколько (по существу равносильных) приёмов решения линейного ДУ.

Рассмотрим метод Иоганна Бернулли (Bernoulli)- швейцарский математик 1667-1748.



Метод И.Бернулли основан на простом замечании, что любую величину  $h$  (переменную или постоянную) можно представить в форме произведения двух сомножителей:  $h=uv$  [ $u=u(x)$ ,  $v=v(x)$ ], причем один из них можно выбрать по своему желанию, но отличным от нуля.

Например:

$$\tan x = uv$$

МОЖЕМ ВЗЯТЬ

$$u = e^x \text{ или } u = \ln x \text{ или } u = \arcsin x \text{ или } u = \sqrt{1-x^2}$$

соответственно этому придется взять

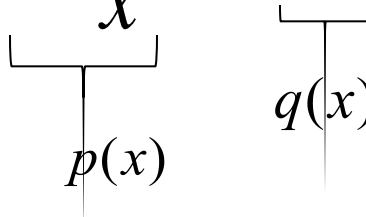
$$v = e^{-x} \tan x$$

$$v = \frac{\tan x}{\ln x}$$

$$v = \frac{\tan x}{\arcsin x}$$

$$v = \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Пример 1. Найти общее решение ДУ:

$$y' - \frac{3}{x}y = x$$


The diagram shows the differential equation  $y' - \frac{3}{x}y = x$ . A horizontal bracket is drawn under the fraction  $\frac{3}{x}$ , with a vertical line extending downwards to the label  $p(x)$ . Another horizontal bracket is drawn under the  $x$  on the right side of the equation, with a vertical line extending downwards to the label  $q(x)$ .

Это линейное ДУ вида  $y' + p(x)y = q(x)$

Представим (неизвестное нам!) общее решение ДУ в виде:

$$y = u \cdot v$$

Найдём производную:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Подставим её в уравнение:

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = x$$

$$v\left(u' - \frac{3}{x}u\right) + uv' = x \quad (*)$$

Используем своё право выбора  $u$ , взяв его таким, чтобы выражение в скобках было равно нулю.



$$u' - \frac{3}{x}u = 0$$

$$u' = \frac{3}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{3}{x}dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{3}{x}dx$$

$$\ln|u| = 3 \ln|x| + C$$

Поскольку в качестве  $u$  нам надо взять какое-нибудь одно из решений ДУ, то положим  $C=0$ .

$$\ln|u| = 3 \ln|x|$$

$$\ln|u| = \ln|x|^3$$

$$\underline{u = x^3}$$

Подставляя  $u = x^3$  уравнение (\*) и учитывая, что

$$u' = \frac{3}{x}, \text{ получим:}$$

$$u v' = x$$

$$x^3 v' = x$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$dv = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int dv = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$v = -\frac{1}{x} + C$$

---

Общее решение ДУ:

$$y = u \cdot v = x^3 \left( -\frac{1}{x} + C \right)$$

или

$$y = u \cdot v = -x^2 + Cx^3$$

**Ответ.** Общее решение ДУ:  $y = -x^2 + Cx^3$

Изложим приём в общем виде:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Представим (неизвестное нам!) общее решение  
ДУ в виде:

$$y = u \cdot v$$

Найдём производную:

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

Подставим её в уравнение:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$

$$v(u' + p(x)u) + uv' = q(x) \quad (**)$$

Используем своё право выбора  $u$ , взяв его таким, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$u' + p(x)u = 0$$

$$u' = -p(x)u$$

$$\frac{du}{dx} = -p(x)u$$

$$\frac{du}{u} = -p(x) dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int p(x) dx$$

$$\ln|u| = \ln e^{-\int p(x)dx} + C$$

Поскольку в качестве  $u$  нам надо взять какое-нибудь одно из решений ДУ, то положим  $C=0$ .

$$\ln|u| = \ln e^{-\int p(x)dx}$$

$$u = \underbrace{e^{-\int p(x)dx}}_{A(x)}$$

$$\underline{u = A(x)}$$



Подставляя  $u = A(x)$  уравнение (\*\*\*) и учитывая,

что  $u' + p(x)u = 0$  получим:  $u v' = q(x)$

$$A(x) v' = q(x)$$

$$\int dv = \int \frac{q(x)}{A(x)} dx$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{q(x)}{A(x)}$$

$$v = \int \frac{q(x)}{A(x)} dx$$

$$dv = \frac{q(x)}{A(x)} dx$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{B(x) + C}$$

$$v = B(x) + C$$

---

Общее решение ДУ:

$$y = u \cdot v = A(x) \cdot [B(x) + C]$$

**Ответ.** Общее решение ДУ:  $y = A(x) \cdot [B(x) + C]$

Пример 2. Найти общее решение ДУ:

$$y' + y \underbrace{\tan x}_{p(x)} = \underbrace{\cos^2 x}_{q(x)}$$

Решение:

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + uv \tan x = \cos^2 x$$

$$v(u' + u \tan x) + uv' = \cos^2 x$$

$$1) \quad u' + u \tan x = 0$$

$$u' = -u \tan x$$

$$\frac{du}{dx} = -u \tan x$$

$$\frac{du}{u} = -\tan x \, dx$$

$$\int \frac{du}{u} = -\int \tan x \, dx$$

$$\ln|u| = \ln|\cos x| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|\cos x|$$

$$\underline{u = \cos x}$$

$$2) \quad u v' = \cos^2 x$$

$$v' \cos x = \cos^2 x$$

$$\int dv = \int \cos x dx$$

$$\frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$v = \sin x + C$$

---

$$dv = \cos x dx$$

3) Общее решение ДУ:  $y = u \cdot v = (\sin x + C) \cos x$

**Ответ.** Общее решение ДУ:  $y = (\sin x + C) \cos x$

Пример 3. Найти общее решение ДУ:

$$\frac{y'}{x} - 2y = (1 - x^2)e^{x^2}$$

Решение:

Нужно привести к виду  $y' + p(x)y = q(x)$

$$\frac{y'}{x} - 2y = (1 - x^2)e^{x^2} \quad | \cdot x$$

$$\underbrace{y'}_{p(x)} - \underbrace{2x y}_{q(x)} = \underbrace{(1 - x^2)e^{x^2} x}_{q(x)}$$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - 2xuv = (1 - x^2)e^{x^2}x$$

$$v(u' - 2xu) + uv' = (1 - x^2)e^{x^2}x$$

$$1) \quad u' - 2xu = 0$$

$$u' = 2xu$$

$$\frac{du}{dx} = 2xu$$

$$\frac{du}{u} = 2x dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int 2x dx$$

$$\ln|u| = x^2 + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln e^{x^2}$$

$$\underline{u = e^{x^2}}$$



$$2) \quad u v' = (1 - x^2) e^{x^2} x$$

$$v' e^{x^2} = (1 - x^2) e^{x^2} x$$

$$\frac{dv}{dx} = x(1 - x^2)$$

$$dv = x(1 - x^2) dx$$

$$\int dv = \int x(1 - x^2) dx$$

$$\int dv = \int (x - x^3) dx$$

$$v = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

---

$$3) \quad \text{Общее решение ДУ: } y = u \cdot v = e^{x^2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right)$$

**Ответ.** Общее решение ДУ:  $y = e^{x^2} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C \right)$

Пример 4. Решить задачу Коши:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^4, \text{ если } y(1) = \frac{4}{3}$$

Решение:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^4$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p(x)} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{q(x)}$

$$y = u \cdot v$$

$$y' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{2}{x}uv = x^4$$

$$v\left(u' - \frac{2}{x}u\right) + uv' = x^4$$

$$1) \quad u' - \frac{2}{x}u = 0$$

$$u' = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2}{x}dx$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\ln|u| = 2\ln|x| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|x|^2$$

$$\underline{u = x^2}$$

$$2) \quad u v' = x^4$$

$$v' x^2 = x^4$$

$$\frac{dv}{dx} = x^2$$

$$dv = x^2 dx$$

$$\int dv = \int x^2 dx$$

$$v = \frac{x^3}{3} + C$$

---

$$3) \quad \text{Общее решение ДУ:} \quad y = u \cdot v = x^2 \left( \frac{x^3}{3} + C \right)$$

Найдем частное решение ДУ:

Подставим начальные условия  $y(1) = \frac{4}{3}$  в общее решение ДУ и вычислим  $C$ :

$$y = x^2 \left( \frac{x^3}{3} + C \right) \quad \text{- общее решение}$$

$$\frac{4}{3} = 1^2 \left( \frac{1^3}{3} + C \right)$$

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C$$

$$C = 1$$

$$y = x^2 \left( \frac{x^3}{3} + 1 \right)$$

или

$$y = x^2 + \frac{x^5}{3}$$

---

частное решение

Пример 5. Найти общее решение ДУ:

$$y' = \frac{y}{x + y^2}$$

Решение:

Нужно привести к виду

$$x' + p(y)x = q(y)$$

Иногда нужно решать линейные ДУ относительно  $x$ :  $y$  принимаем за независимую переменную, а  $x$ - за искомую функцию.

$$y' = \frac{y}{x + y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y^2}{y}$$

$$x' = \frac{x}{y} + y$$

$$x' - \frac{1}{y}x = y$$



$$x' - \frac{1}{y} x = y$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{p(y)}$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{q(y)}$

$$x = u \cdot v$$

$$x' = (uv)' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{y} uv = y$$

$$v(u' - \frac{1}{y}u) + uv' = y$$

$$1) \quad u' - \frac{1}{y}u = 0$$

$$u' = \frac{1}{y}u$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}u$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln|u| = \ln|y| + C$$

$$[C = 0]$$

$$\ln|u| = \ln|y|$$

$$\underline{u = y}$$

$$2) \quad u v' = y$$

$$v' y = y$$

$$\frac{dv}{dy} = 1$$

$$dv = dy$$

$$\int dv = \int dy$$

$$\underline{v = y + C}$$

$$3) \quad \text{Общее решение ДУ:} \quad x = u \cdot v = y(y + C)$$

$$\text{Ответ.} \quad \text{Общее решение ДУ:} \quad x = y(y + C)$$