Числовая последовательность. Способы задания последовательности. Предел числовой последовательности

Цели урока:

1. рассмотреть определение числовой последовательности, виды последовательностей. Примеры записей последовательностей.
2. рассмотреть понятие предела числовой последовательности
3. развить навык вычисления пределов числовых последовательностей

Определение числовой последовательности

- ***Функцию y=f(x), где x натуральное число называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают : y=f(n).***

Типы числовых последовательностей.

- 1) Возрастающая последовательность **– каждый ее член больше предыдущего** $x_{n+1} > x_n,\ n \in N.$
- 2) Неубывающая последовательность **– каждый следующий член не меньший от предыдущего** $x_{n+1} \ge x_n,\ n \in N.$
- 3) Убывающая последовательность **– каждый новый член меньше предыдущего** $x_{n+1} < x_n,\ n \in N.$
- 4) Невозрастающая последовательность **– каждый старший член не больше предыдущего** $n \in N$ $x_{n+1} \le x_n,\ n \in N.$
- 5) Ограниченная последовательность **имеет место тогда, когда найдутся такие действительные числа m и M , что для всех натуральных чисел выполняется неравенство** $\{x_n\}$ $m \le x_n \le M.$
- **6) Последовательность называется** неограниченной**, если она постоянно или растет или убывает.**
- **7) Последовательность, имеющая предел называется** сходящейся. **Противоположная к ней последовательность - соответственно расходящимися.**

Свойства числовых последовательностей

Монотонные последовательности

Возрастающая, если каждый ее член больше предыдущего

Убывающая, если каждый ее член меньше предыдущего

Примеры бесконечных числовых последовательностей

- 1, 2, 3, 4, 5, … - последовательность натуральных чисел.
- 2, 4, 6, 8, 10,… - последовательность чётных чисел.
- 1, 3, 5, 7, 9,… - последовательность нечётных чисел.
- 1, 4, 9, 16, 25,… - последовательность квадратов натуральных чисел.
- 2, 3, 5, 7, 11… - последовательность простых чисел.

Способы задания последовательностей

Обозначают члены последовательности так

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \dots\ a_n$$

Аналитический. С помощью формулы n-ого члена – позволяет вычислить член последовательности с любым заданным номером

$$x_n=3\cdot n+2$$

$$x_5=3\cdot 5+2=17;$$

$$X_{45}=3\cdot 45+2=137$$

Рекуррентный (<u>от слова recursio - возвращаться</u>)

$$x_1=1;\ x_{n+1}=(n+1)x_n$$

$$n=1;\ 2;\ 3;\ \dots$$

можно записать с многоточием

1; 2; 6; 24; 120; 720; …

Словесный способ.

Историческая справка

Проще всего выписывать члены этой последовательности, если перевести равенство на русский язык: каждый член последовательности, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих членов.

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, … .

Последовательность чисел Фибоначчи –

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

в которой каждое последующее число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих: 2 = 1 + 1; 3 = 2 + 1;…

можно задать рекуррентно (формулой):

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,\ n \in N,\ x_1 = x_2 = 1$$

Последовательность чисел Фибоначчи

Филлотаксис (листорасположение) — правило, по которому располагаются, например, семечки в соцветии подсолнуха. Семечки упорядочены в два ряда спиралей, один из которых идет по часовой стрелке, другой против неё.

Арифметическая прогрессия

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют *арифметической прогрессией*, а число d – разностью арифметической прогрессии.

Пример: 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

возрастающая арифметическая прогрессия,

у которой $d = 2$.

Геометрическая прогрессия

Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением на одно и то же число q, называют *геометрической прогрессией*, а число

q – знаменателем геометрической прогрессии.

Пример: 54 , 18, 6, 2, … -убывающая геометрическая прогрессия,
у которой q = 1/3.

Развитие учения о прогрессиях

Прогрессия (от латинского progressio) - «движение вперёд»

Наблюдая луну от новолуния до полнолуния, вавилоняне пришли к такому выводу: в первые пять дней после новолуния рост освещения лунного диска совершается по закону геометрической прогрессии со знаменателем 2.

Найдите закономерности и покажите их с помощью стрелки:

1; 4; 7; 10; 13; …

В порядке возрастания положительные нечетные числа

10; 19; 37; 73; 145; …

В порядке убывания правильные дроби с числителем, равным 1

6; 8; 16; 18; 36; …

В порядке возрастания положительные числа, кратные 5

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

½; 1/3; ¼; 1/5; 1/6;

Увеличение на 3

Чередовать увеличение на 2 и увеличение в 2 раза

1; 3; 5; 7; 9; …

5; 10; 15; 20; 25; …

Увеличение в 2 раза и уменьшение на 1

Задача: найти формулу общего члена последовательности:

6; 20; 56; 144; 352;…

Решение. Запишем каждый член последовательности в следующем виде:

$$n=1:\ x_1 = 6 = 2\cdot 3 = 2^1 \cdot 3 = 2^1 \cdot (2 \cdot 1 + 1)$$

$$n=2:\ x_2 = 20 = 4\cdot 5 = 2^2 \cdot 5 = 2^2 \cdot (2 \cdot 2 + 1)$$

$$n=3:\ x_3 = 56 = 8\cdot 7 = 2^3 \cdot 7 = 2^3 \cdot (2 \cdot 3 + 1)$$

Формула общего члена:

$$x_n = 2^n \cdot (2 \cdot n + 1)$$

Последовательности заданы формулами:

$a_n=(-1)^n n^2$

$a_n=-n-2$

$a_n=n^4$

$a_n=3^n-1$

$a_n=2^n-5$

$a_n=n+4$

Выполните следующие задания:

1. **Впишите пропущенные члены последовательности:**

1; 16; 81; 256; 625; …

5; 6; ___; 8; 9; …

-3; -1; 3; 11; ___;
27

-1; 4; ___; ___; -25; …
-9 16

___; -4; ___; ___; -7; …
-3 -5 -6

2; 8; ___; ___; ___; …
26 80 242

2. **Укажите, какими числами являются члены этих последовательностей**

Положительные и отрицательные

Положительные

Отрицательные

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

Итак, ответьте на вопросы:

- Дайте определение числовой последовательности.
- Какие способы задания числовой последовательности вы знаете?
- Дайте определение ограниченной сверху и снизу числовой последовательности.
- Какую последовательность называют возрастающей и убывающей?
- Что такое окрестность точки, радиус окрестности?

Укажите окрестность точки а радиуса r в виде интервала, если:

а) a = 0

r = 0,1

(-0,1, 0,1)

в) a = 2

r = 1

(1, 3)

b) a = -3

r = 0,5

(-3,5, -2,5)

г) a = 0,2

r = 0,3

(-0,1, 0,5)

Окрестностью какой точки и какого радиуса является интервал (выбери правильный вариант среди представленных)

а) (1, 3)

б) (-0,2, 0,2)

в) (2,1, 2,3)

г) (-7, -5)

a = 0
r = 0,2

a = 2
r = 1

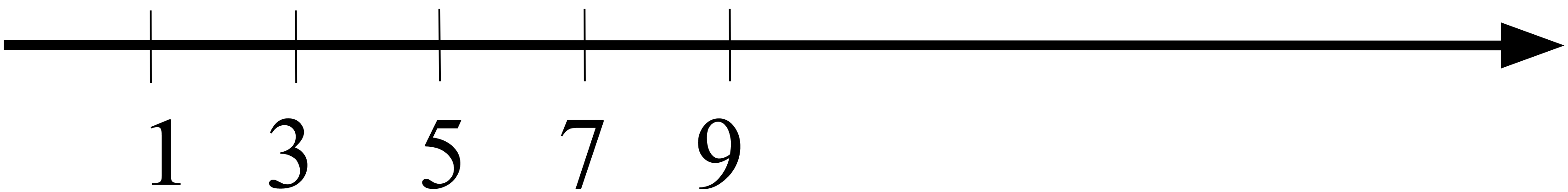
a = -6
r = 1

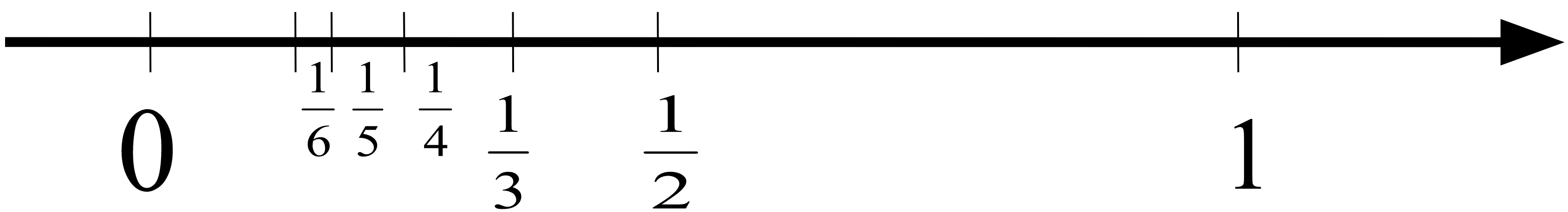
a = 2,2
r = 0,1

Рассмотрим две последовательности:

$$(y_n): 1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1, \ldots;$$

$$(x_n): 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$





Определение.

Число b называют пределом последовательности (y_n), если в любой заранее выбранной окрестности точки b содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

Пишут и читают:

$$y_n \to b \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

Чему равен предел данной последовательности?

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Вывод: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

$$\lim_{n \to \infty} c = c$$

Вывод: $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0, \text{если} \; |q| < 1$

Пример

$$\lim_{x \to 2}(x - 1)$$

Найдем данный предел.
Переменная стремится к числу 2 подставим вместо х число 2.
Получим 2-1=1
Следовательно ответ

$$\lim_{x \to 2}(x - 1) = 1$$

Во всех остальных случаях следует поступать аналогично:
в выражение под знаком предела вместо переменной X подставлять значение к которому стремится переменная и рассчитывать результат.

Свойства

1) Предел суммы равен сумме пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

2) Предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \bullet \lim_{n\to\infty} y_n$$

3) Предел частного равен частному от пределов

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\lim_{n\to\infty}(kx_n) = k\lim_{n\to\infty} x_n$$