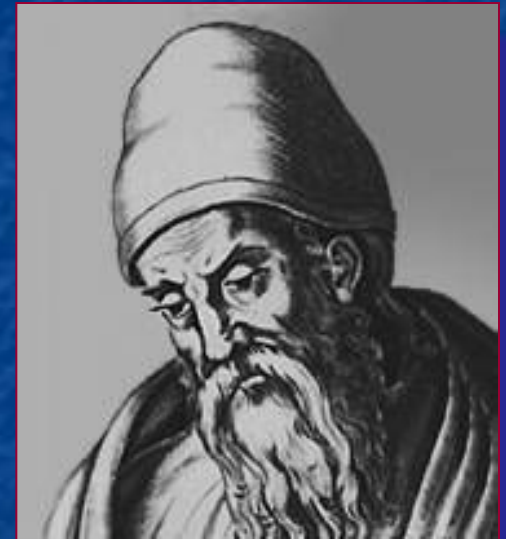


Алгоритм Евклида

ЕВКЛИД - древнегреческий математик. Работал в Александрии в 3 в. до н. э. Евклид оказал огромное влияние на развитие математики. Главный труд - «Начала» (состоит из 13 книг) - содержит основы античной математики, элементарной геометрии, теории чисел, общей теории отношений и методы определения площадей и объемов. Евклиду принадлежат также работы по астрономии, оптике, теории музыки.



Постановка задачи:

Требуется составить программу определения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел

НОД двух натуральных чисел - это самое большое натуральное число, на которое они делятся нацело

Например: $\text{НОД}(12, 18) = 6$

Алгоритм нахождения НОД

12		2	18		2
6		2	9		3
3		3	3		3
1			1		

$$\text{НОД (12, 18)} = 2 \cdot 3 = 6$$

Алгоритм нахождения НОД

1. Разложить числа на простые множители.
2. Найти общие множители.
3. Найти их произведение.

Алгоритм Евклида

Идея алгоритма основана на двух свойствах:

1. Если $M > N$, то
 $\text{НОД}(M, N) = \text{НОД}(M-N, N)$

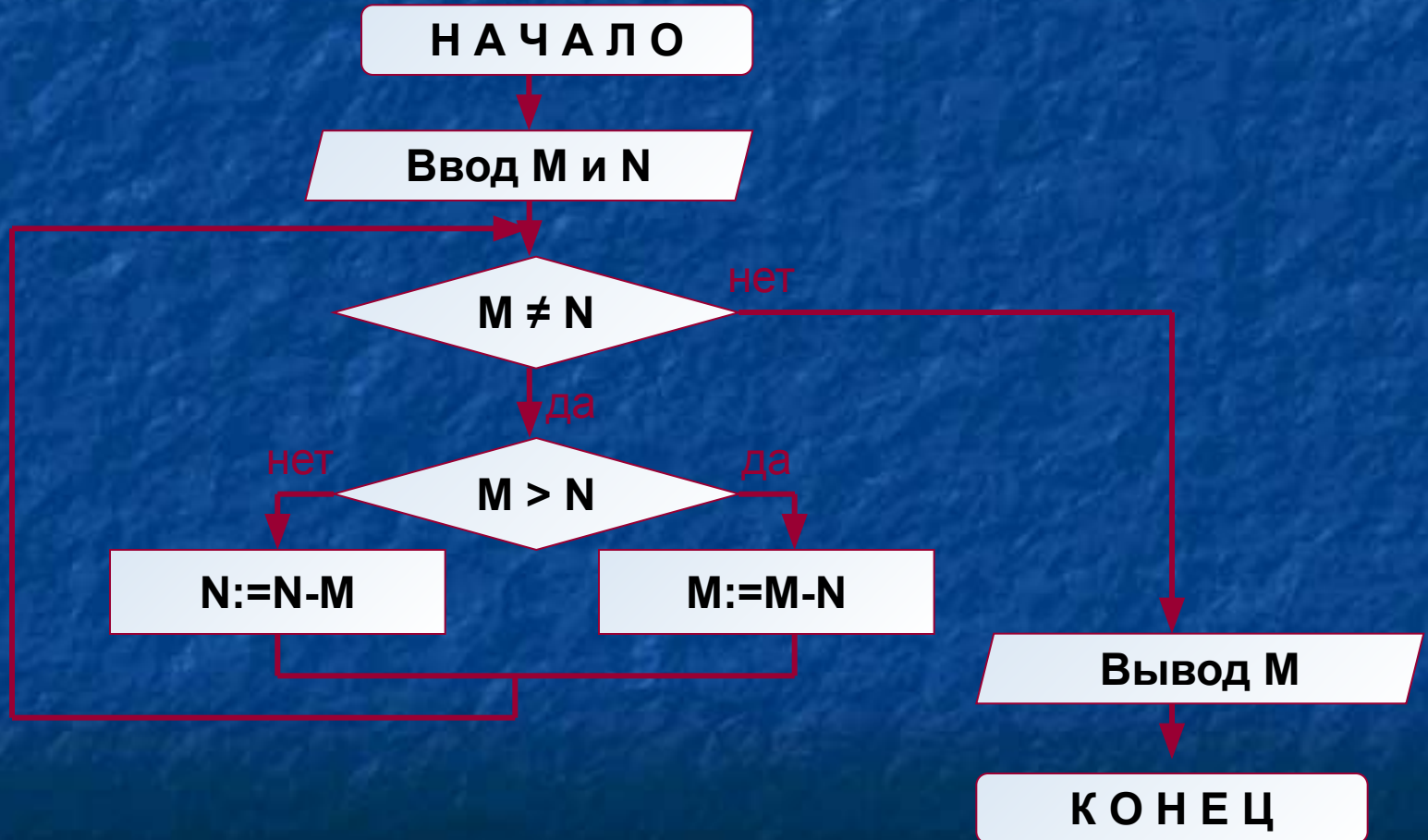
2. $\text{НОД}(M, M) = M$

$$\begin{aligned} \text{НОД}(12, 18) &= \text{НОД}(12, 18-12) = \text{НОД}(12, 6) = \\ &= \text{НОД}(12-6, 6) = \text{НОД}(6, 6) = 6 \end{aligned}$$

Алгоритм Евклида

1. Если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа, в противном случае продолжить выполнение алгоритма.
2. Заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел.
3. Вернуться к выполнению п. 1.

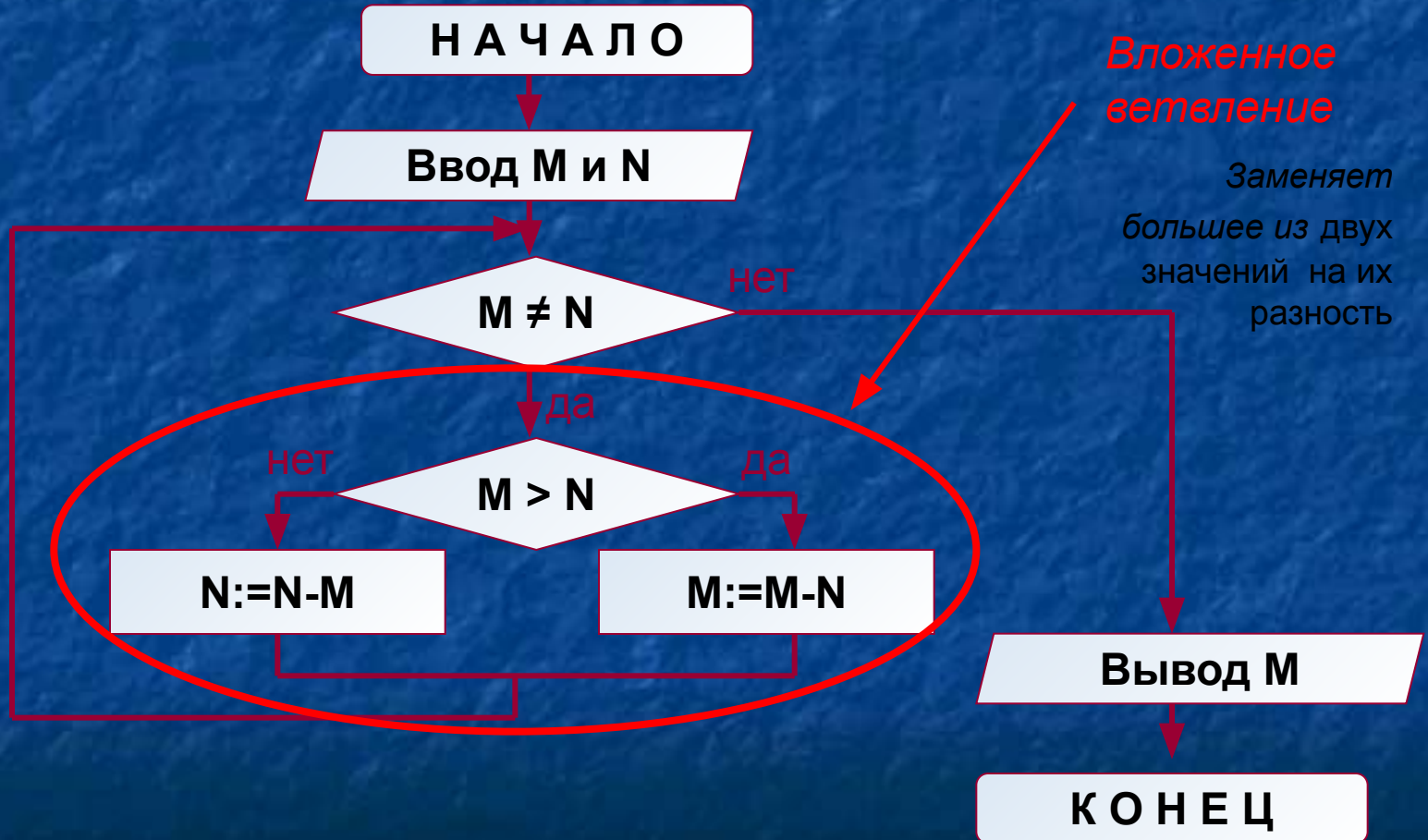
Блок-схема алгоритма Евклида



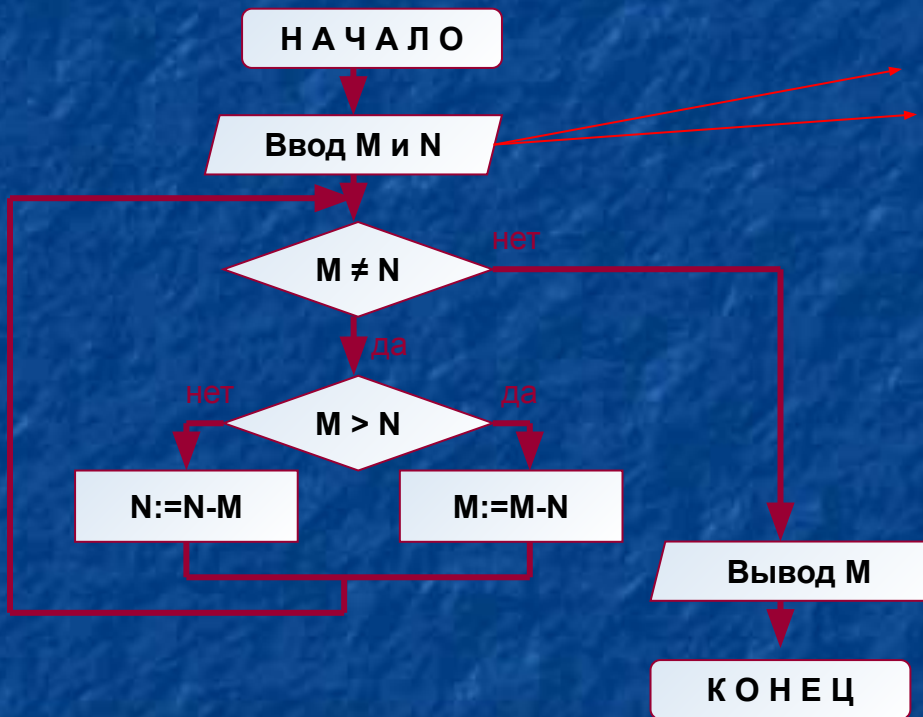
Структура алгоритма Евклида



Структура алгоритма Евклида

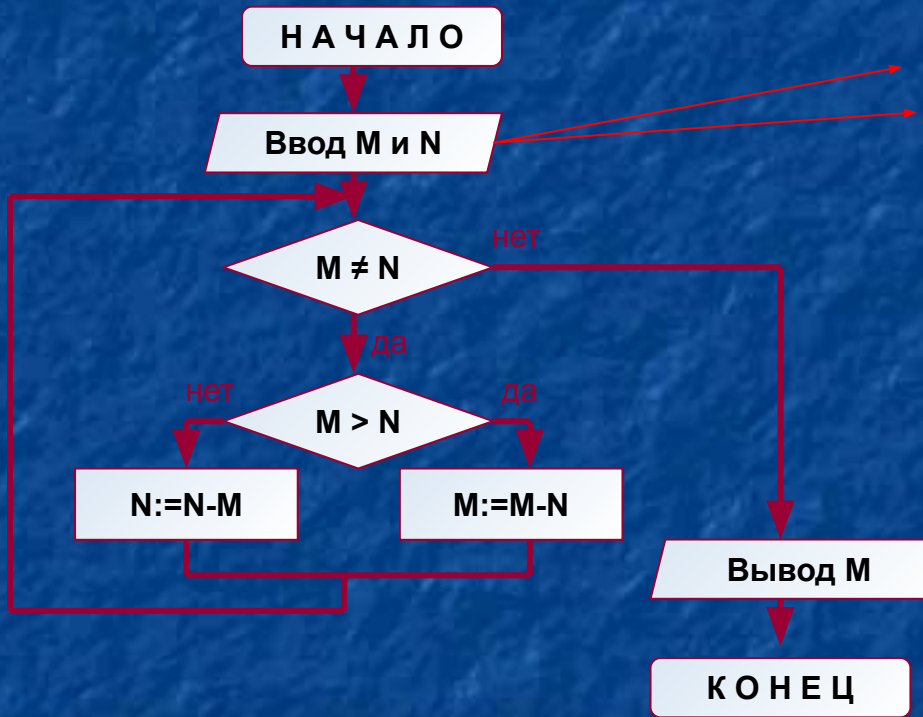


Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



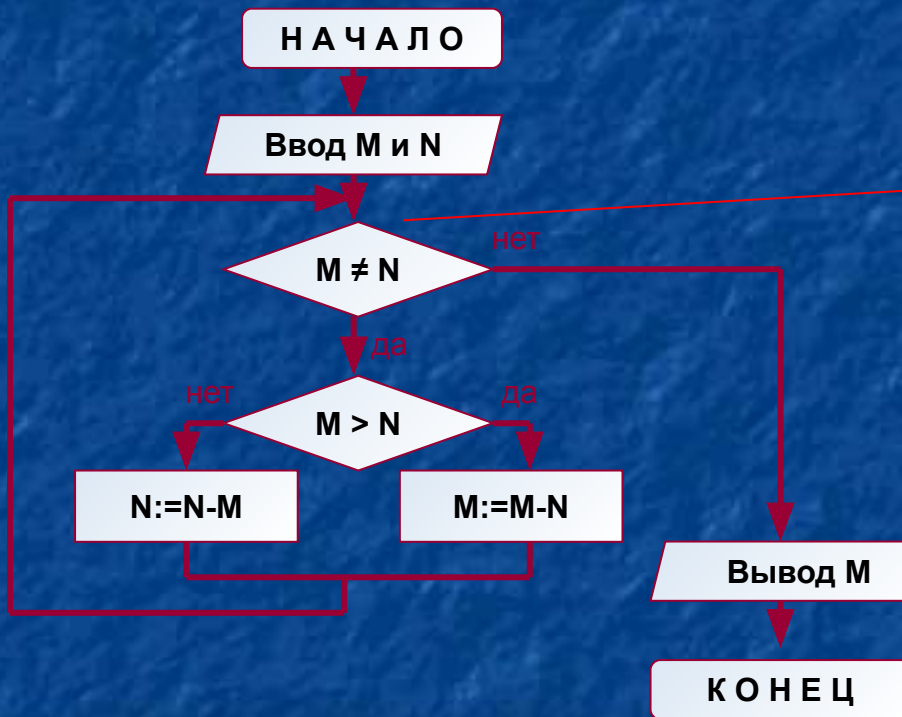
шаг	операция	M	N	условие
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



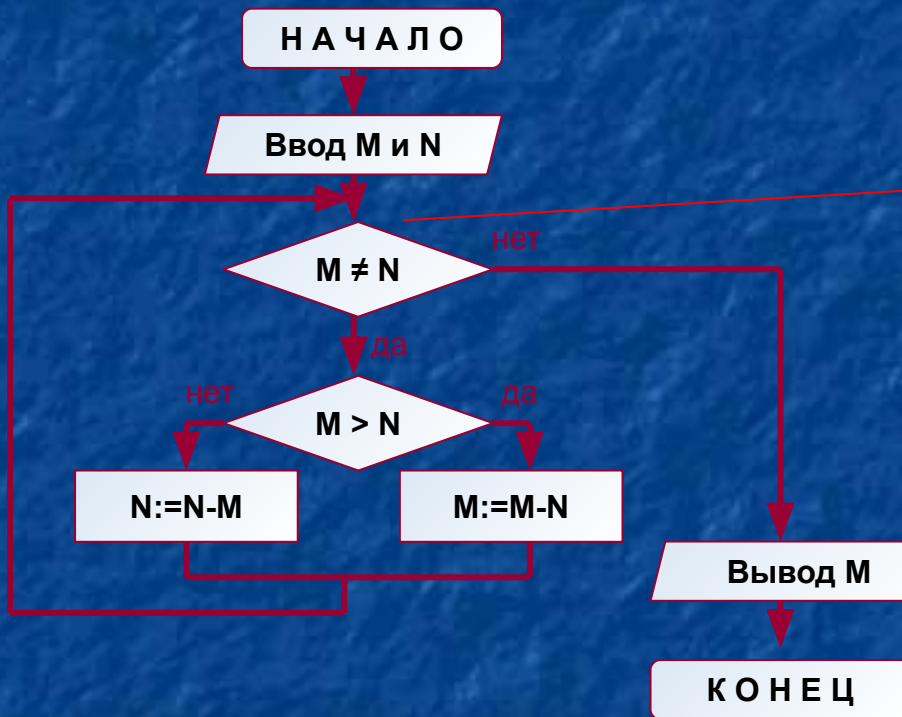
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



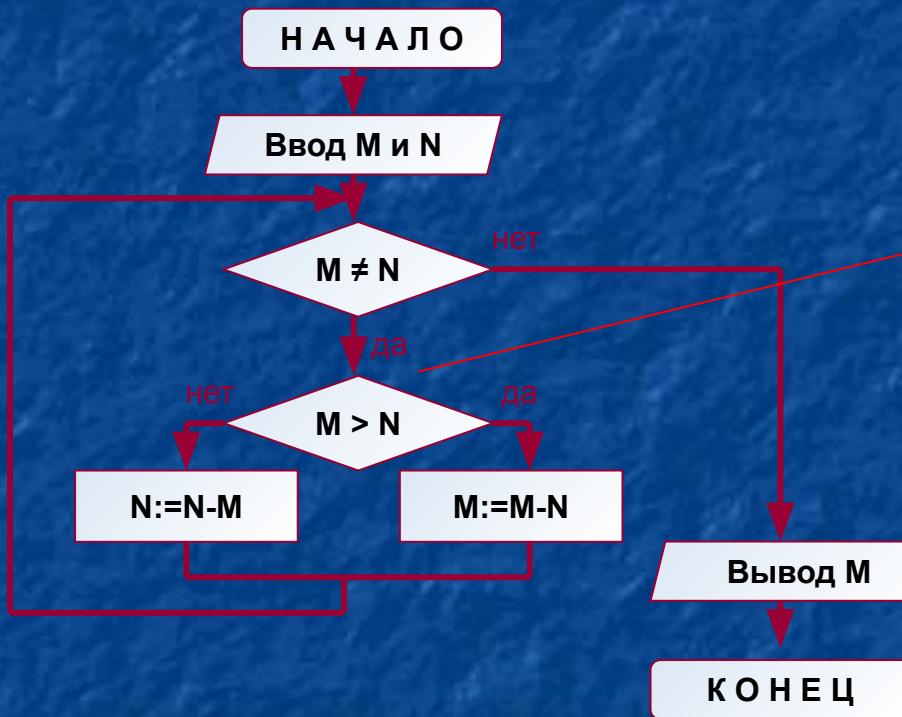
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



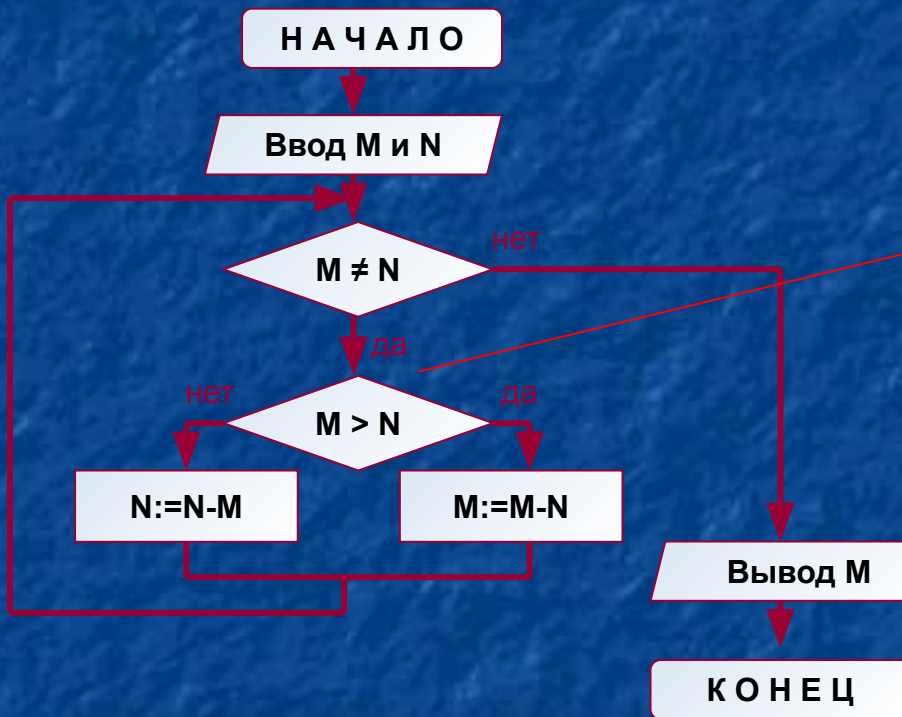
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



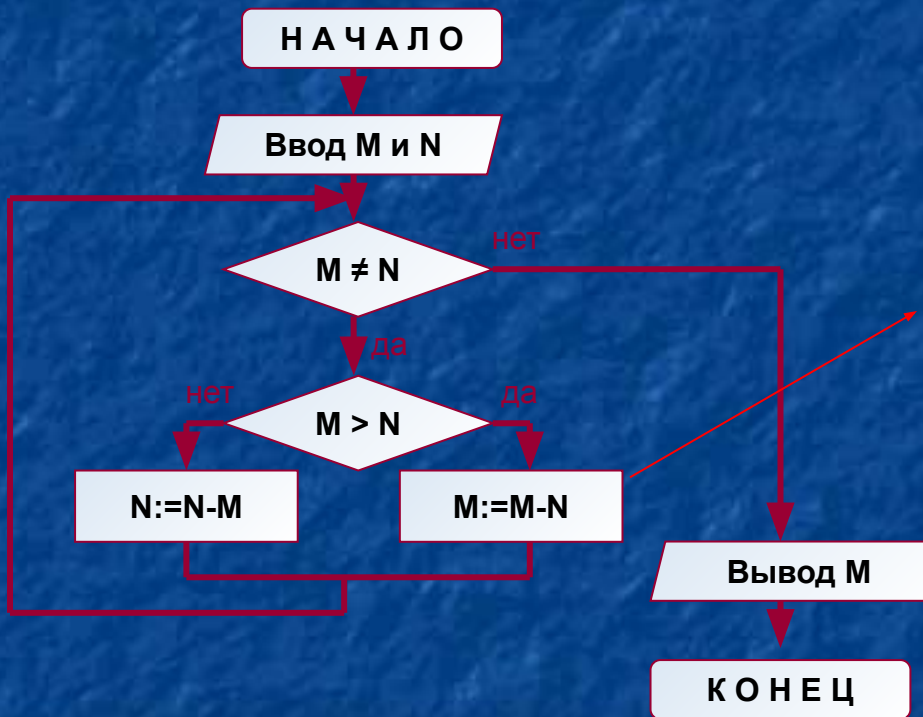
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



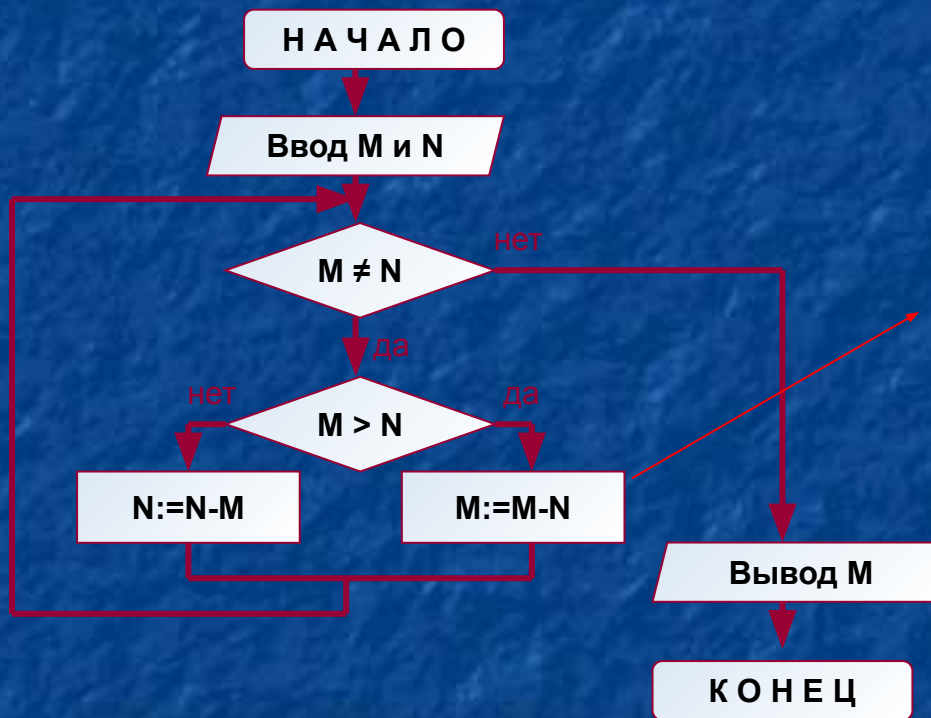
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



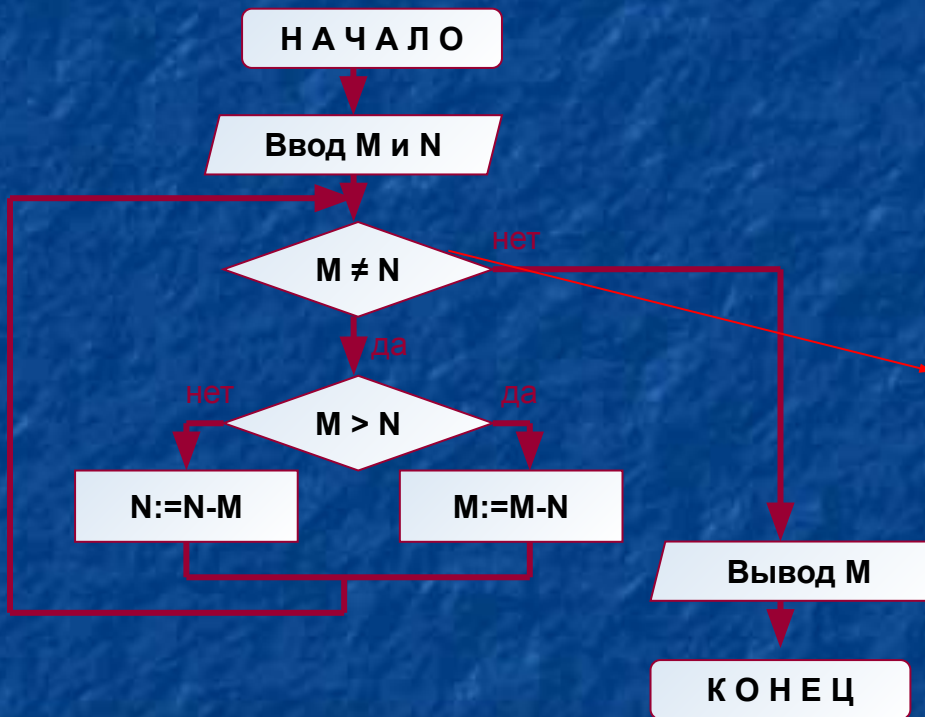
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



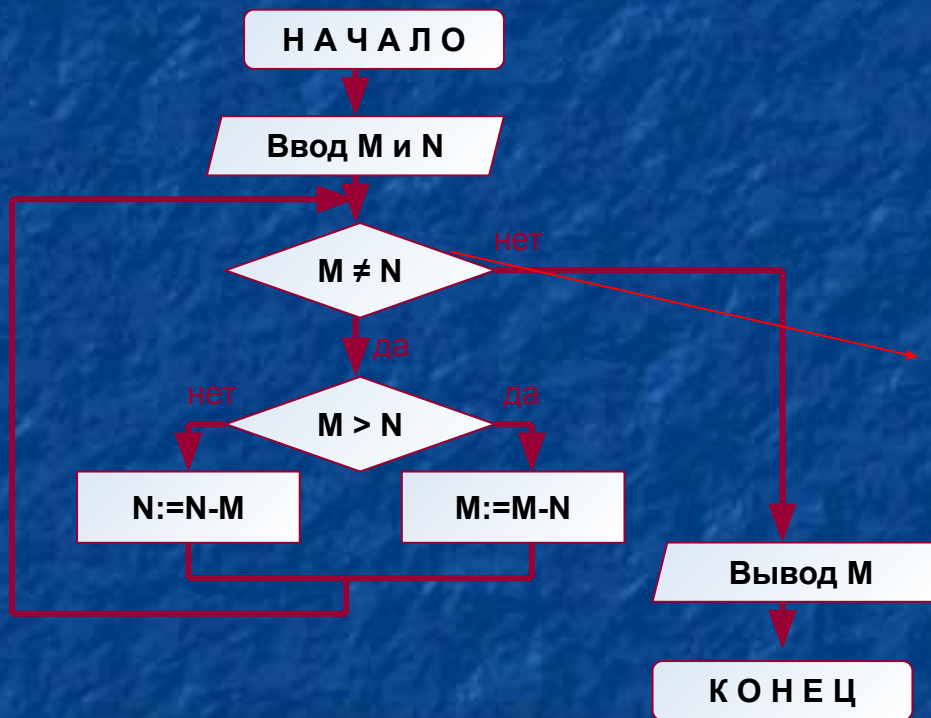
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



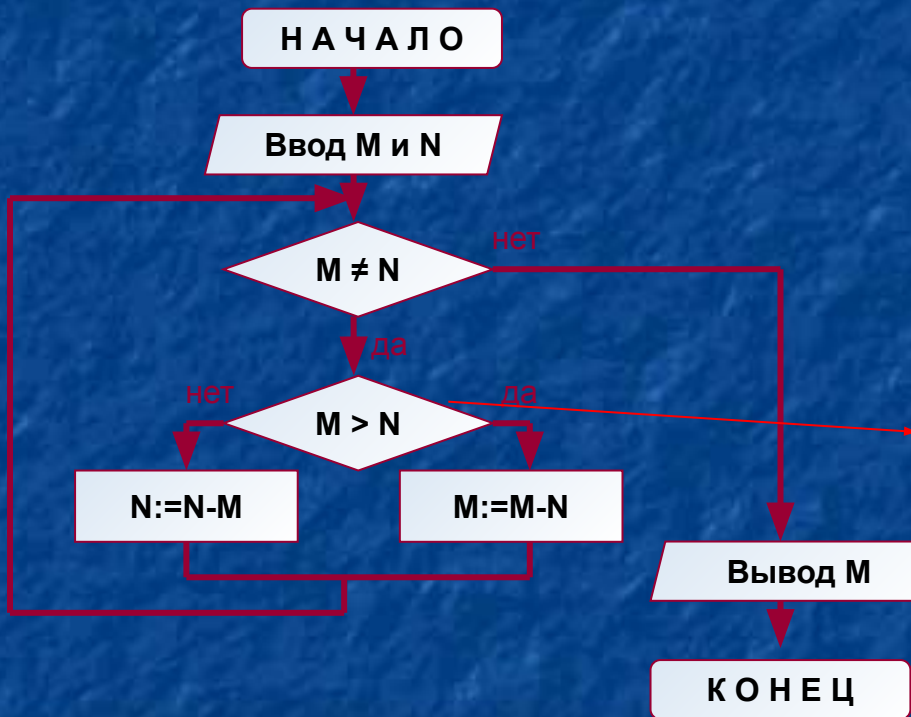
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



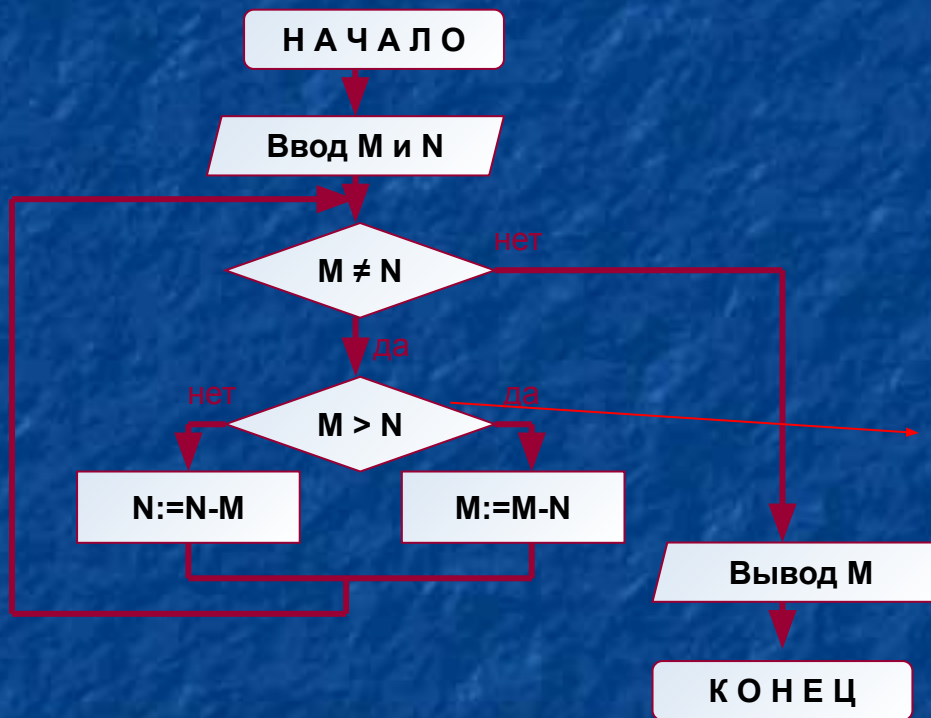
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



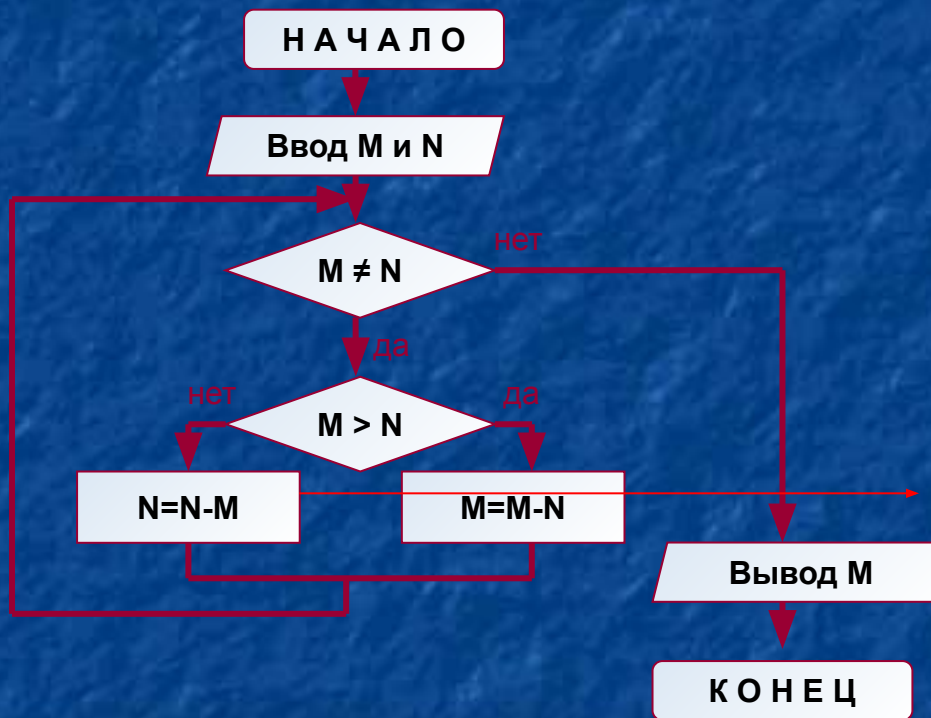
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



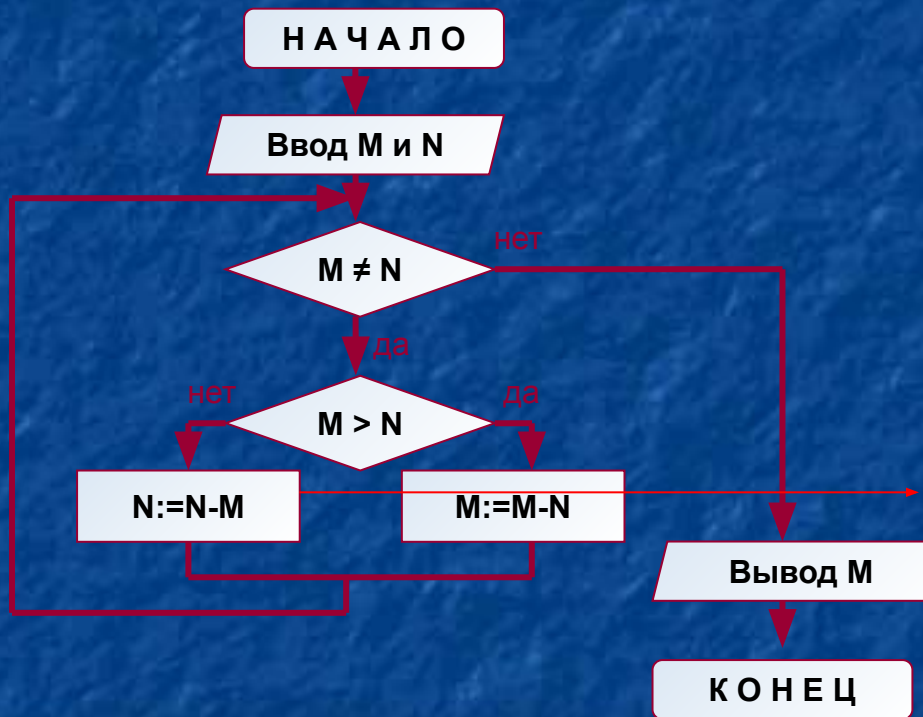
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



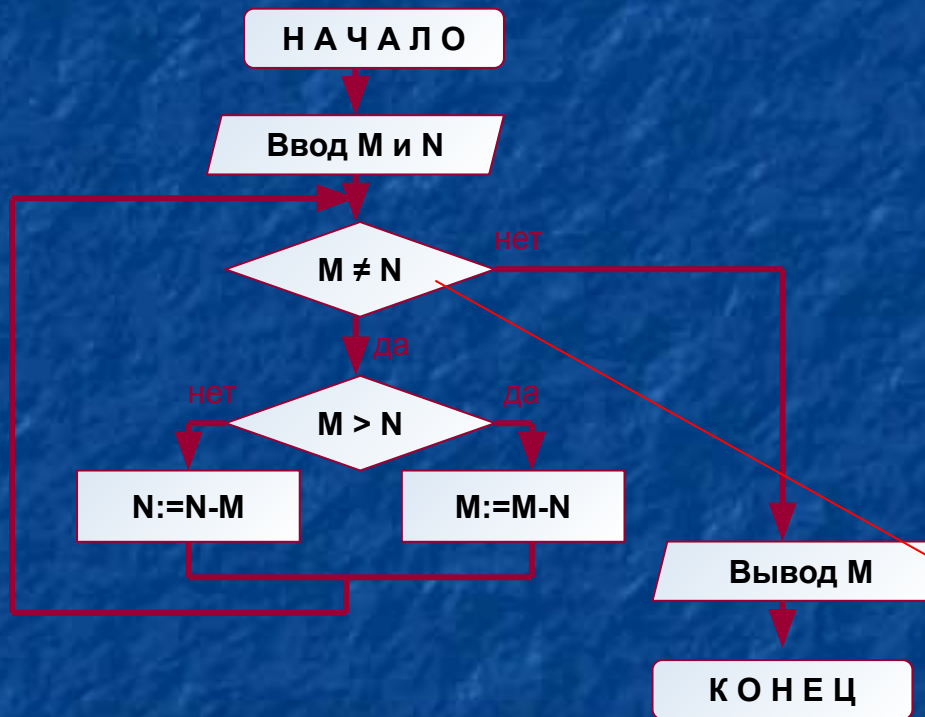
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



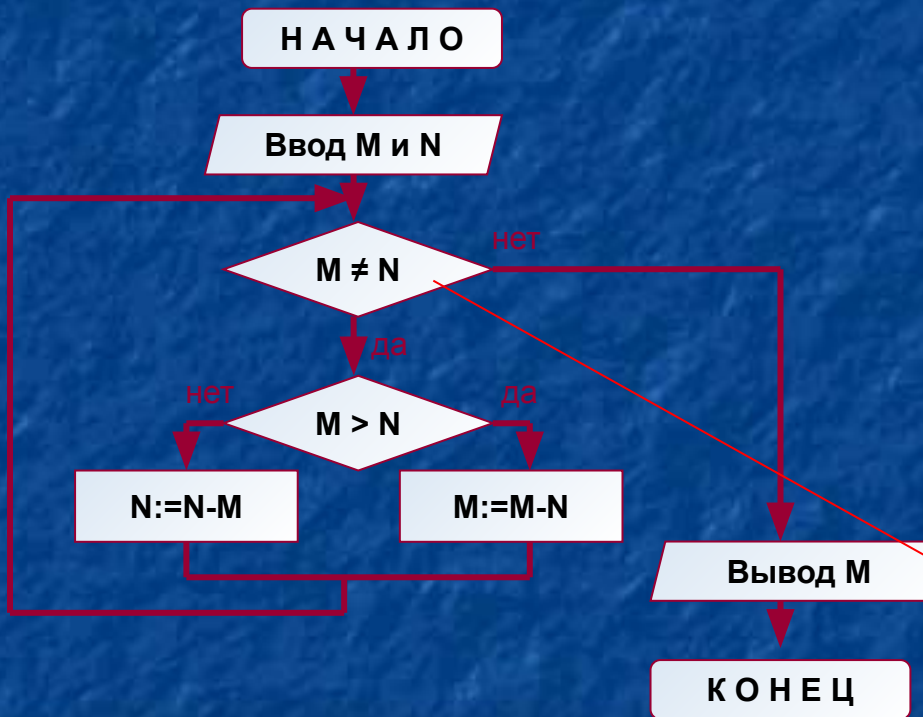
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



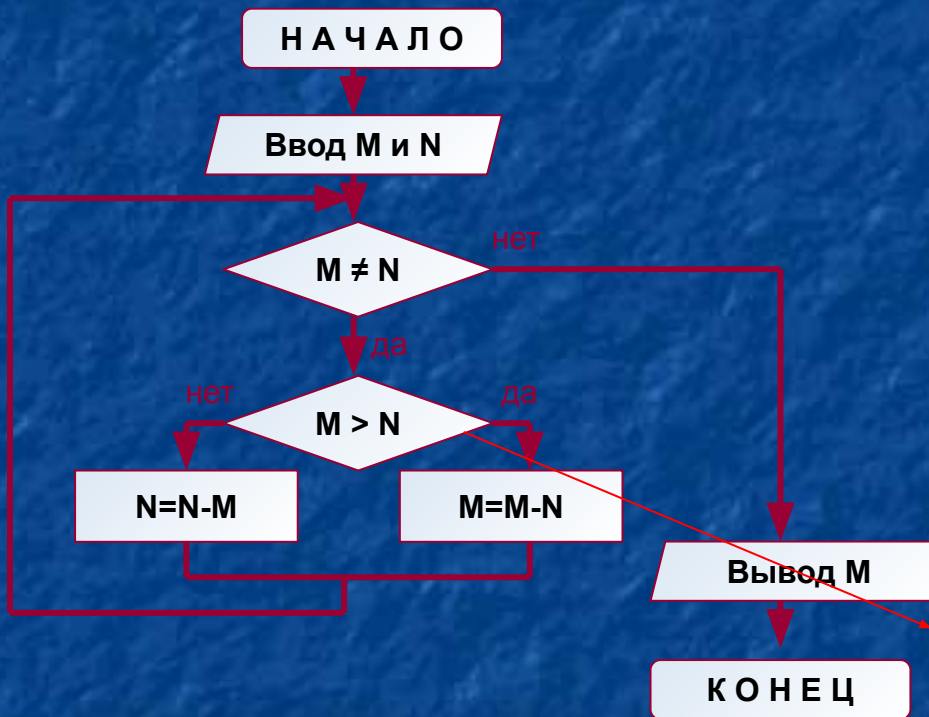
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9				
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



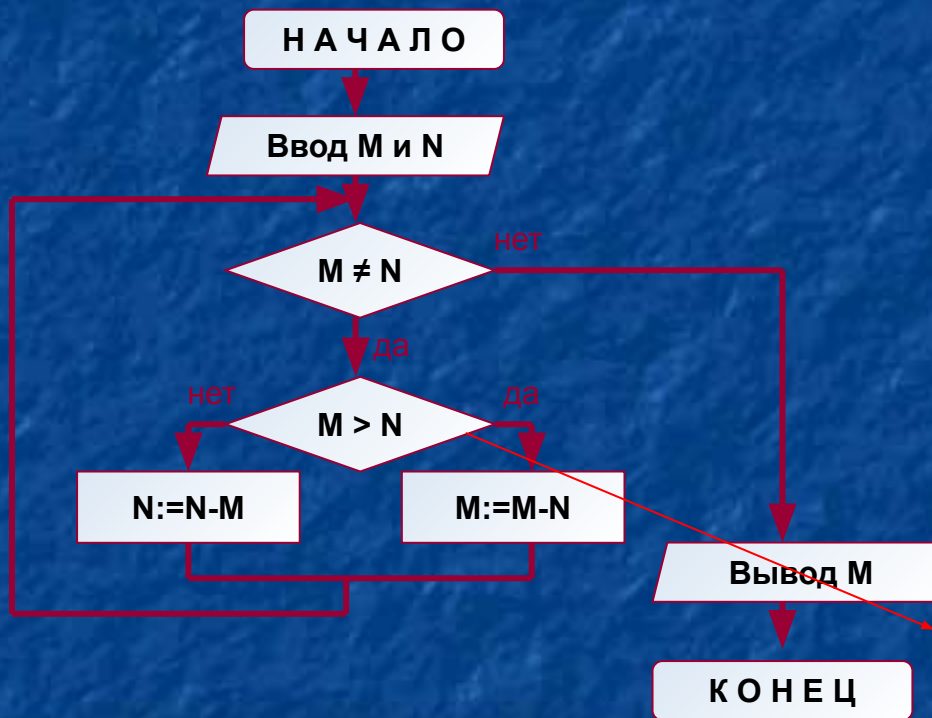
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



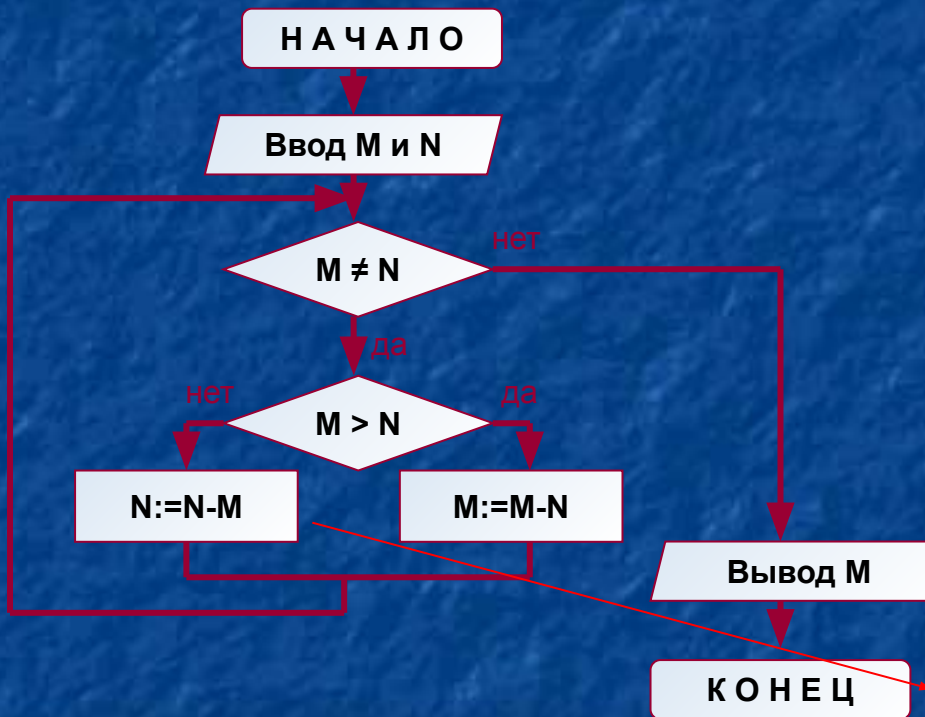
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10				
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



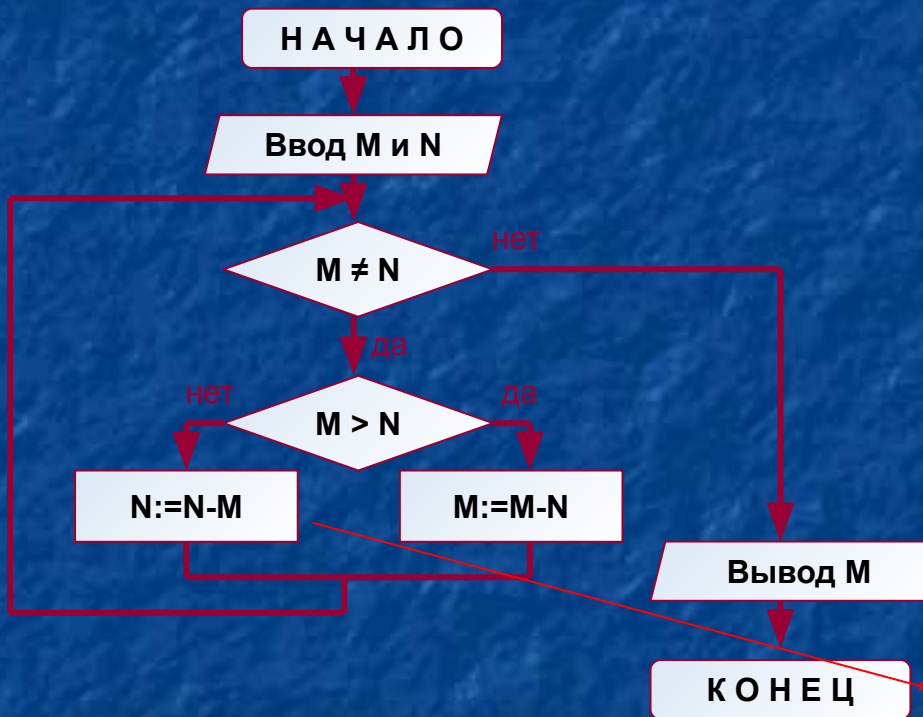
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



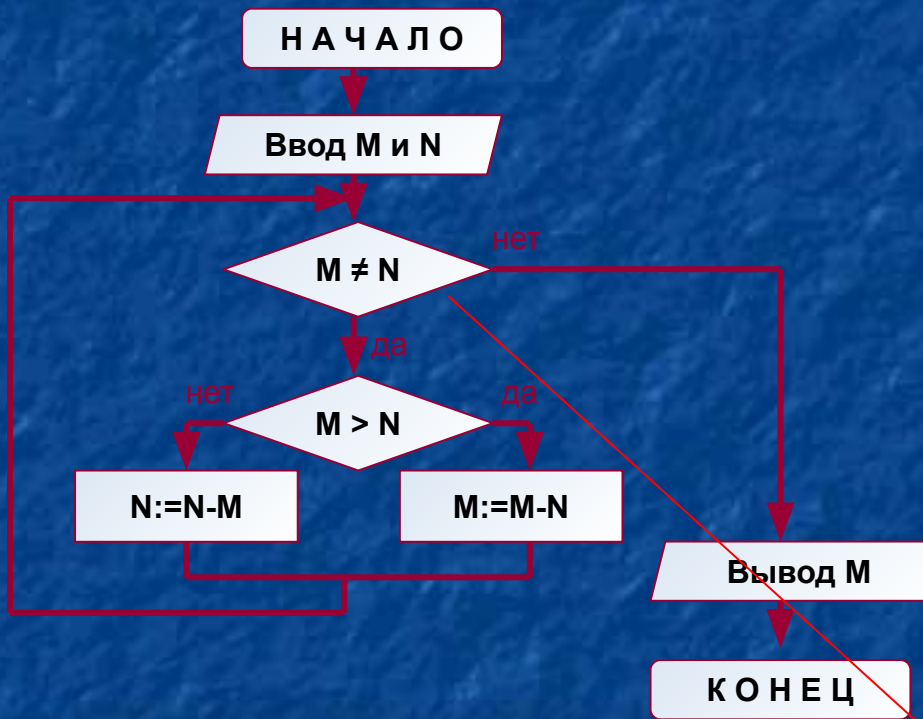
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11				
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



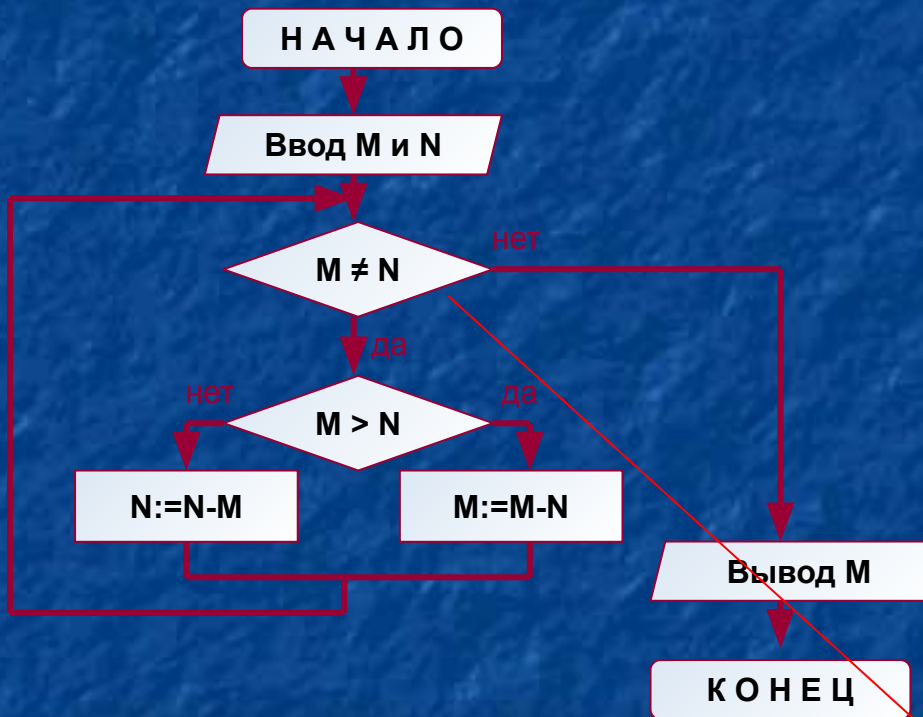
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N = N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



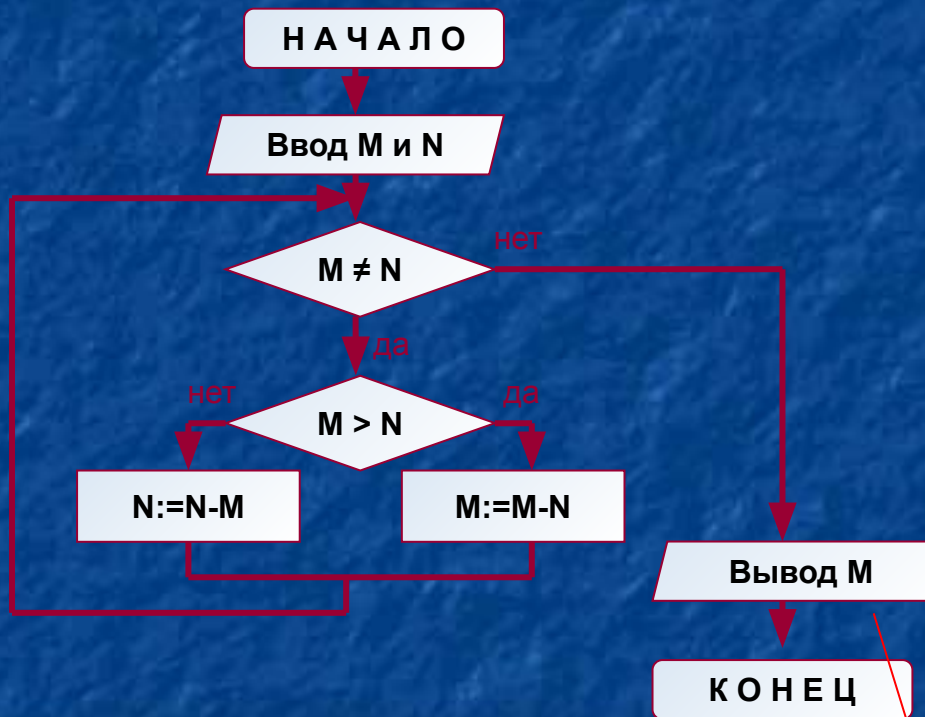
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12				
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



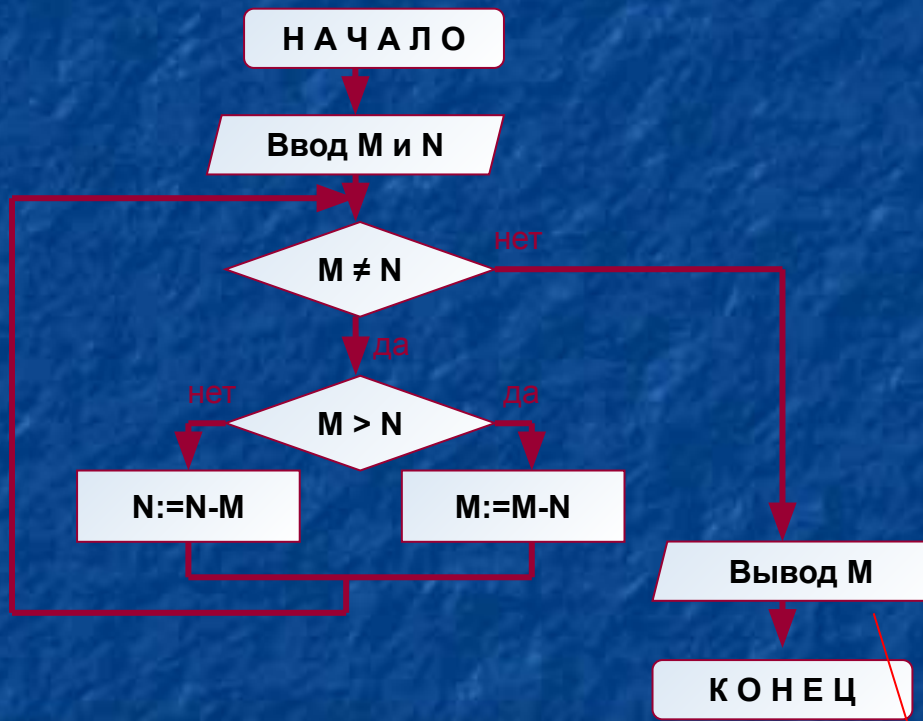
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12	$M \neq N$			$8 \neq 8$ нет
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



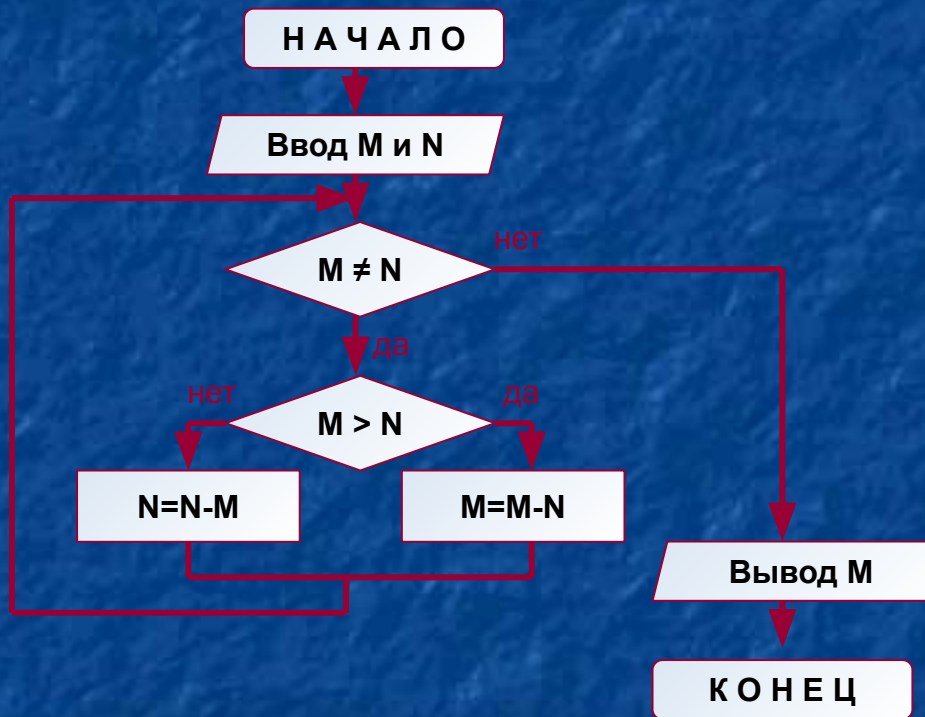
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12	$M \neq N$			$8 \neq 8$ нет
13				
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$



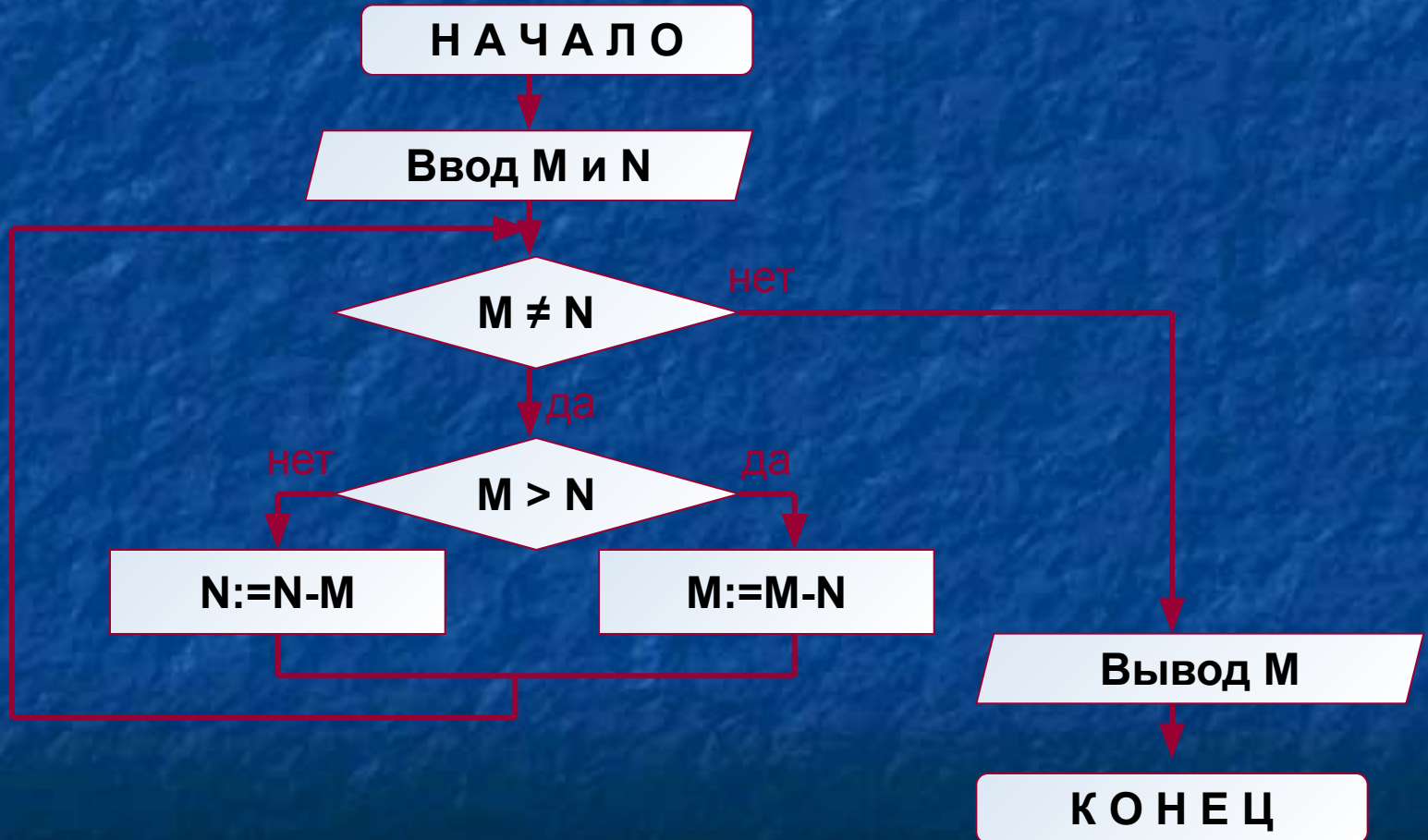
шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12	$M \neq N$			$8 \neq 8$ нет
13	Вывод M	8		
14				

Трассировочная таблица алгоритма Евклида $M=32, N=24$

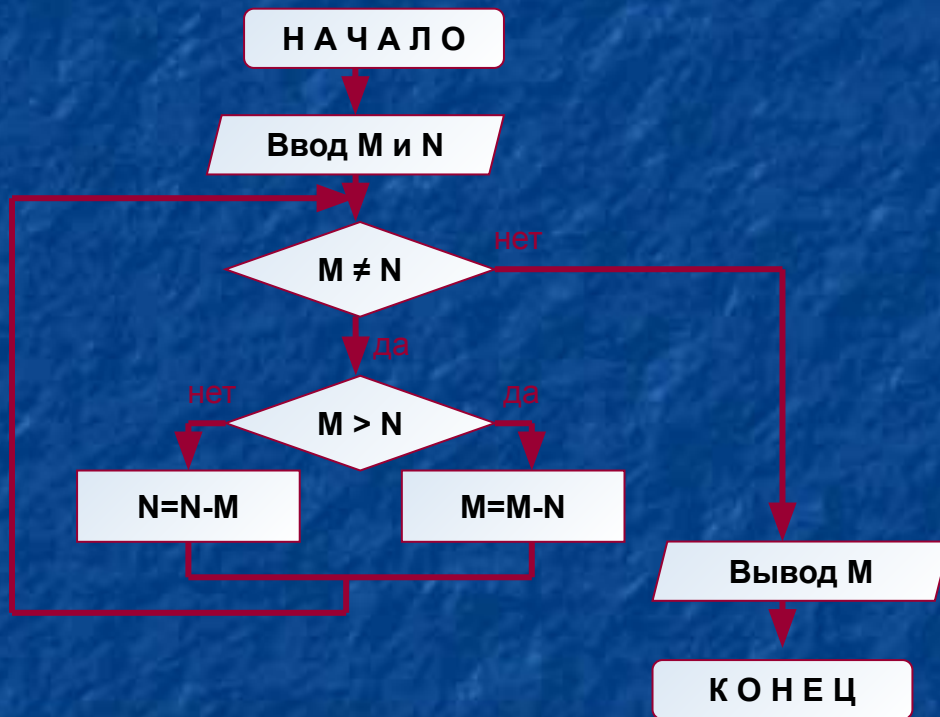


шаг	операция	M	N	условие
1	Ввод M	32		
2	Ввод N	32	24	
3	$M \neq N$			$32 \neq 24$, да
4	$M > N$			$32 > 24$, да
5	$M := M - N$	8	24	
6	$M \neq N$			$8 \neq 24$, да
7	$M > N$			$8 > 24$, нет
8	$N := N - M$	8	16	
9	$M \neq N$			$8 \neq 16$, да
10	$M > N$			$8 > 16$, нет
11	$N := N - M$	8	8	
12	$M \neq N$			$8 \neq 8$ нет
13	Вывод M	8		
14	конец			

Блок-схема алгоритма Евклида



Программа на Паскале



```
Program Evklid;  
var m, n: integer;  
begin
```

```
  writeln ('Введите m и n ');  
  readln (m, n);  
  while m<>n do  
  begin
```

```
    if m>n  
    then m:=m-n  
    else n:=n-m
```

```
  end;  
  write ('НОД=', m)
```

```
end.
```

Отладка и тестирование

Выполнить на компьютере программу.
Протестировать ее на значениях:

1) $M=32$, $N=24$;

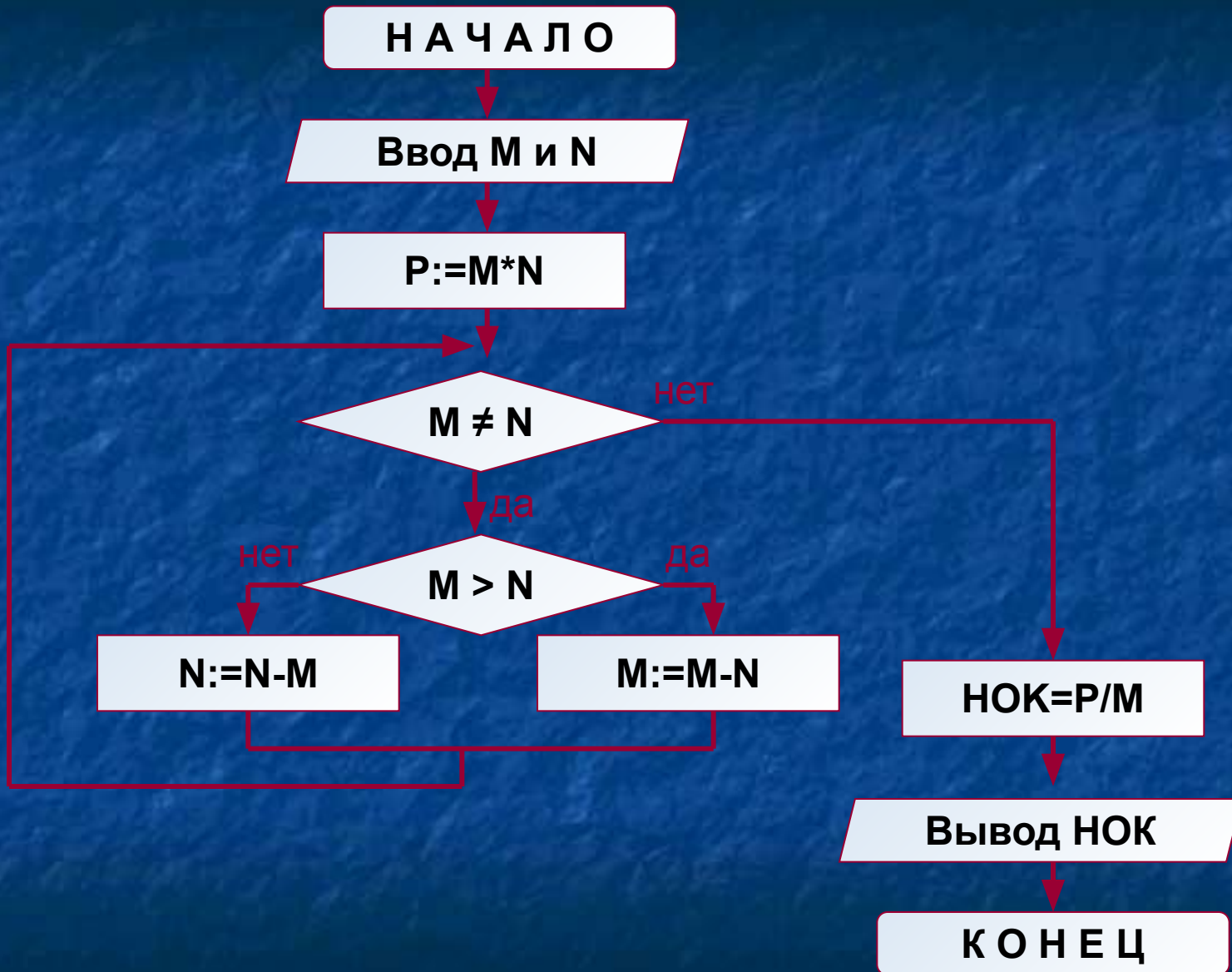
2) $M=696$, $N=234$



Постановка задачи:

Составить программу нахождения наименьшего общего кратного (НОК) двух чисел, используя формулу:

$$M \times N = \text{НОД}(M, N) \times \text{НОК}(M, N)$$



Домашнее задание

Составить программу нахождения наибольшего общего делителя трех чисел, используя формулу:

$$\text{НОД}(A, B, C) = \text{НОД}(\text{НОД}(A, B), C)$$