

11.4. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Непосредственное интегрирование

Вычисление интегралов с помощью основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов называется непосредственным или элементарным интегрированием.

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int (2 \sin x + 6 - 3x^2) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \int (2 \sin x + 6 - 3x^2) dx = \\ &= \int 2 \sin x dx + \int 6 dx - \int 3x^2 dx = \\ &= 2 \int \sin x dx + 6 \int dx - 3 \int x^2 dx = \\ &= \underline{-2 \cos x + 6x - x^3 + C} \end{aligned}$$

2

$$\int \frac{3x^4 - x^3 + x + 2}{x^2} dx$$

Решение:

$$\int \frac{3x^4 - x^3 + x + 2}{x^2} dx =$$

$$= \int \left(3x^2 - x + \frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= 3 \int x^2 dx - \int x dx + \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx =$$

$$= x^3 - \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{2}{x} + C$$

3

$$\int \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx$$

Решение:

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{2}{x^2 + 1} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\ & = 2 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \\ & = 2 \operatorname{arctg} x + \int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \\ & = 2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C \end{aligned}$$

2. Метод замены переменной или метод подстановки

Метод замены переменной описывается
формулой:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Где $x=\varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке.

Покажем справедливость этой формулы.

Найдем производную по t от левой и правой части выражения (1):

$$\left(\int f(x)dx\right)'_t = \left(\int f(x)dx\right)'_x \cdot x'_t = \underline{f(x) \cdot \varphi'(t)}$$

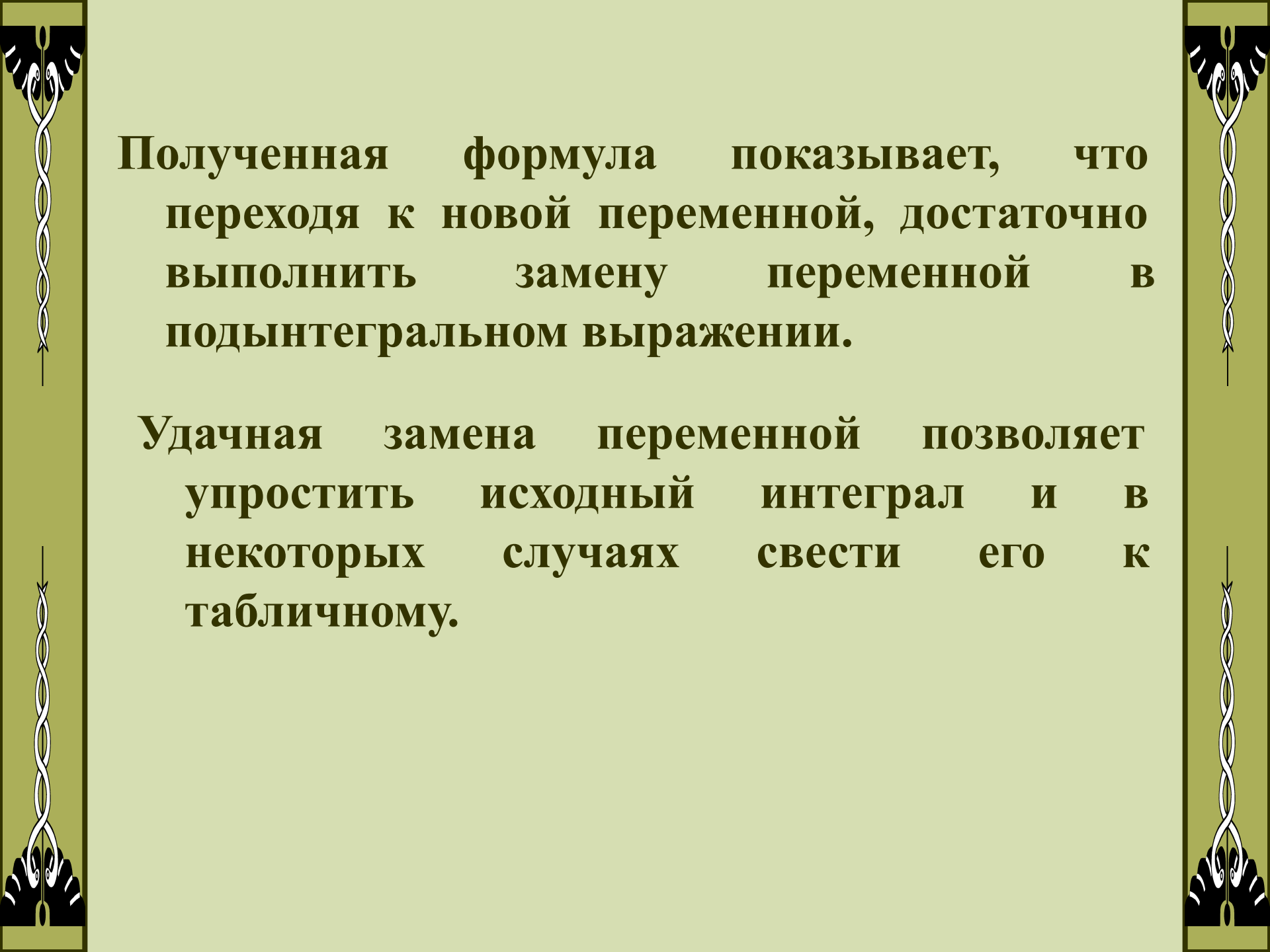
$$\begin{aligned} &\left(\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt\right)'_t = \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \underline{f(x) \cdot \varphi'(t)} \end{aligned}$$

Получили одинаковый результат, следовательно по следствию из теоремы Лагранжа левая и правая части выражения (1) отличаются на некоторую постоянную.

Т.к. сами неопределенные интегралы определены с точностью до произвольного постоянного слагаемого, то эту постоянную можно опустить.

Т.об,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$



Полученная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену переменной в подынтегральном выражении.

Удачная замена переменной позволяет упростить исходный интеграл и в некоторых случаях свести его к табличному.

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int x(x-1)^{12} dx$$

Решение:

$$\int x(x-1)^{12} dx = \left| \begin{array}{l} x-1 = t \\ x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t+1) \cdot t^{12} dt = \int t^{12} dt + \int t^{13} dt =$$

$$= \frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{14}}{14} + C = \frac{(x-1)^{13}}{13} + \frac{(x-1)^{14}}{14} + C$$



2

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$
$$= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Теорема.

*Пусть $F(x)$ – некоторая
первообразная для функции $f(x)$.*

Тогда

$$\int f(kx + b)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx + b) + C$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx$$

Решение:

$$\int \sqrt[3]{3-x} dx = \left| \begin{array}{l} k = -1 \\ b = 3 \end{array} \right| = -\frac{3}{4} (3-x)^{\frac{4}{3}} + C$$

2

$$\int \frac{1}{4x + 3} dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{4x + 3} dx = \left| \begin{array}{l} k = 4 \\ b = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{4} \ln|4x + 3| + C$$

3. Интегрирование по частям

Теорема.

*Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$
определены и дифференцируемы на
промежутке X и функция*

$$u'(x) \cdot v(x)$$

*имеет первообразную на этом
промежутке.*

Тогда функция

$$v'(x) \cdot u(x)$$

*тоже имеет первообразную на
этом промежутке и справедлива
формула*

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Доказательство:

Найдем производную произведения данных функций:

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Отсюда выражаем второе слагаемое в правой части выражения:

$$u(x) \cdot v'(x) = (u(x) \cdot v(x))' - u'(x) \cdot v(x)$$

Слагаемые в правой части имеют первообразную на промежутке X по условию теоремы, следовательно, левая часть тоже имеет первообразную на этом промежутке и интегрируя равенство, имеем:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = \int (u(x) \cdot v(x))' dx - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$u(x) \cdot v(x)$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$



Поскольку

$$u'(x)dx = du$$

$$v'(x)dx = dv$$

То последнее равенство часто записывают в виде:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

*формула интегрирования
по частям*

Примеры.

Вычислить интегралы:

1

$$\int x \cdot e^x dx$$

Решение:

$$\int x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = e^x dx \\ du = dx & v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot e^x - \int e^x dx = \underline{x \cdot e^x - e^x + C}$$

2

$$\int \ln x dx$$

Решение:

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot \ln x - \int \frac{x}{x} dx = \underline{x \cdot \ln x - x + C}$$

3

$$\int x^2 \cdot \cos x dx$$

Решение:

$$\int x^2 \cdot \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos x dx \\ du = 2x dx & v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \cos x - \int 2x \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= \underline{x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C}$$

Можно показать, что формула интегрирования по частям применима для следующих типов интегралов:

$$\int x^n \cdot e^{ax} dx$$

$$\int x^n \cdot \sin mx dx$$

$$\int x^n \cdot \cos mx dx$$

$$\int x^k \cdot \ln^n x dx$$

$$\int x^k \cdot \arcsin x dx$$

$$\int x^k \cdot \arccos x dx$$

$$\int x^k \cdot \operatorname{arctg} x dx$$

$$\int x^k \cdot \operatorname{arcctg} x dx$$

Где a, m, k – действительные числа, n – целое положительное число.