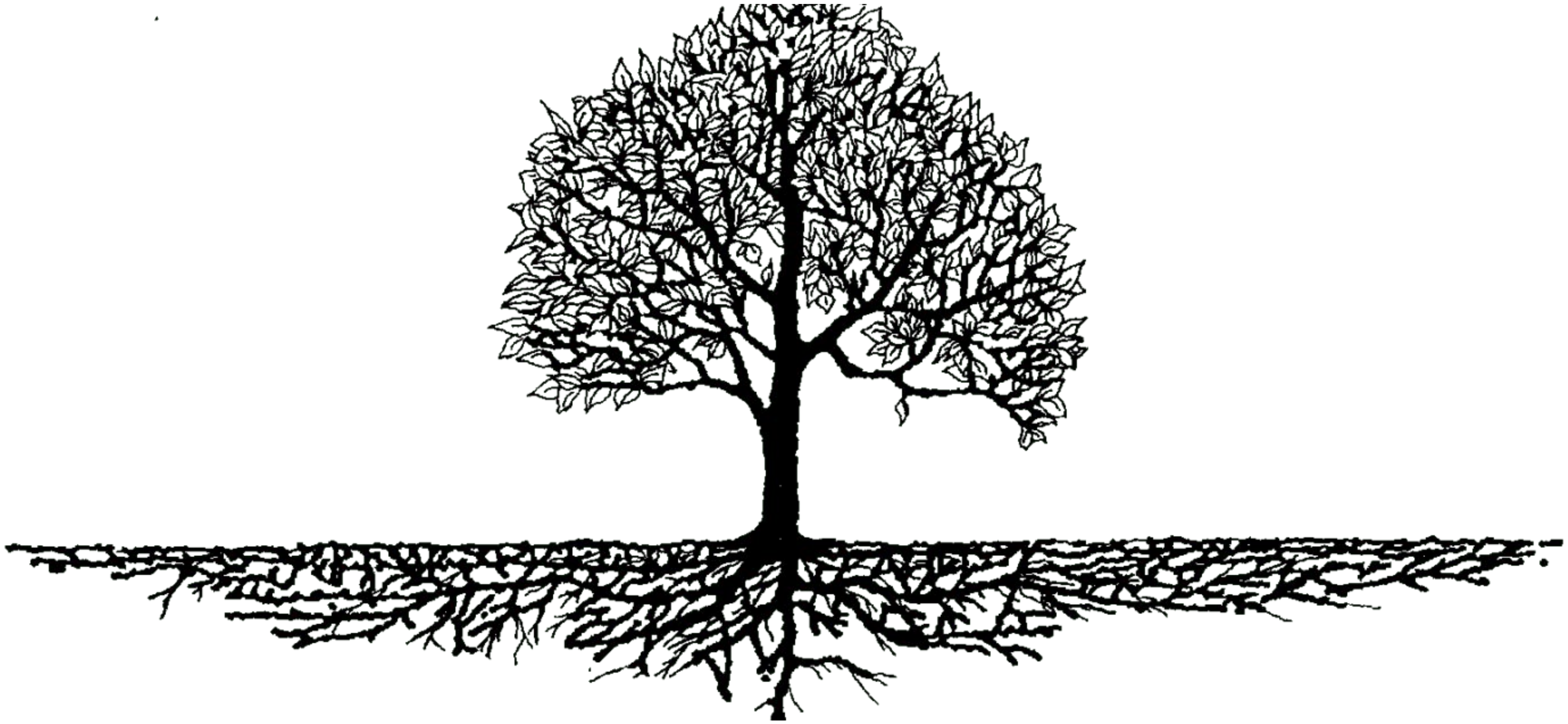
Все ли мы знаем о корнях -2 ?



В предыдущей серии …

Определения

- **Пусть n≥2 и n∈N. *Корнем n-й степени из числа a* называется такое число *t*, *n*-я степень которого равна *a*** .
- Таким образом, утверждение **«*t* — корень *n*-й степени из *a*»** означает, что $\mathbf{t^n=a}$**.**
- Корень 3-й степени называется также ***кубическим***.
- Выражение, стоящее под знаком корня, называется ***подкоренным выражением.***
- ***Извлечь корень n-й степени из числа a*** — это значит найти значение выражения $\sqrt[n]{a}$

если n — нечётное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл при любом a;
если n — чётное число, то выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Корнем n-ой степени $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$ из числа a называется число, n-ая степень которого равна a.

Арифметическим корнем четной степени n $(n = 2k,\ k \in \mathbb{N})$ из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-ая степень которого равна a.

Основные свойства арифметического корня:

$a \geq 0$: $\quad (\sqrt[n]{a})^n = a,\ \sqrt[n]{a^n} = a,\ \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m,\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

$a \in \mathbb{R}$: $\quad \sqrt[n]{a^n} = |a|$.

$a \geq 0,\ b \geq 0$: $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b},\ \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ \ (b \neq 0)$.

$a < 0,\ b < 0$: $\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b},\ \ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

$a \geq 0,\ b \geq 0$: $\quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$.

$a < 0,\ b \geq 0$: $\quad a\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{a^n b}$.

Проверка домашнего задания

558. Укажите наименьшее из следующих чисел:

1) $5\sqrt{3}$ 3) 8
2) $3\sqrt{5}$ 4) 7

559. Расположите в порядке возрастания числа:
$7,\ 5\sqrt{2},\ 4\sqrt{3}$.

1) $7;\ 5\sqrt{2};\ 4\sqrt{3}$
2) $5\sqrt{2};\ 4\sqrt{3};\ 7$
3) $5\sqrt{2};\ 7;\ 4\sqrt{3}$
4) $4\sqrt{3};\ 7;\ 5\sqrt{2}$

566. Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{96}$.

567. Найдите значение выражения $\dfrac{72}{(2\sqrt{6})^2}$.

568. Найдите значение выражения $\dfrac{90}{(9\sqrt{5})^2}$.

569. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{86}}{\sqrt{14}}$.

573. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$.

574. Найдите значение выражения $2\sqrt{53}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{106}$.

575. Найдите значение выражения $3\sqrt{33}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{66}$.

576. Найдите значение выражения $7\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{42}$.

583. Найдите значение выражения $\sqrt{2,88}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{72}}$.

584. Найдите значение выражения $(\sqrt{34}-5)^2$.

Имеет ли смысл выражение:

а) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[5]{(-3)^3}$; ж) $\sqrt[6]{(-5)^3}$;
б) $\sqrt[7]{-0,28}$; д) $\sqrt[8]{(-2)^3}$; з) $\sqrt[11]{(-3)^4}$;
в) $\sqrt[4]{-5}$; е) $\sqrt[10]{(-7)^2}$; и) $\sqrt[12]{(-8)^4}$.

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[5]{-32}$; г) $-4\sqrt[3]{27}$;
б) $\sqrt[7]{-1}$; д) $\sqrt[5]{32}+\sqrt[3]{-8}$;
в) $-2\sqrt[4]{81}$; е) $\sqrt[4]{625}-\sqrt[3]{-125}$.

Вычислите:

а) $(\sqrt[4]{7})^4$; в) $(2\sqrt[4]{3})^4$; д) $(-\sqrt[7]{-28})^7$;
б) $(\sqrt[7]{-3})^7$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3$; е) $(3\sqrt[3]{8})^3$.

Свойства степени с рациональным показателем

Для любого $a > 0$ и любых рациональных чисел p и q:

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad (1)$$

$$a^p : a^q = a^{p-q}, \qquad (2)$$

$$(a^p)^q = a^{pq}. \qquad (3)$$

Для любых $a > 0$ и $b > 0$ и любого рационального числа p:

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \qquad (5)$$

Вспоминаем степени

1. Задание 4 № 137275

Какое из следующих выражений равно 5^{k-3}?
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $\dfrac{5^k}{5^3}$
2) $\dfrac{5^k}{5^{-3}}$
3) $5^k - 5^3$
4) $(5^k)^{-3}$

2. Задание 4 № 137276

Какое из следующих выражений равно $25 \cdot 5^n$?
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) 5^{n+2}.
2) 5^{2n}.
3) 125^n.
4) 25^n.

3. Задание 4 № 137278

Представьте выражение $\dfrac{(c^{-6})^{-2}}{c^{-3}}$ в виде степени с основанием c.
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) c^9
2) c^{15}
3) c^{-5}
4) c^{-4}

7. Задание 4 № 318723

Какому из следующих выражений равна дробь $\dfrac{2^n}{8}$?
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) $2^n - 2^3$
2) $2^{\frac{n}{3}}$
3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$
4) 2^{n-3}

8. Задание 4 № 338098

Представьте выражение $(m^{-9})^{-8} \cdot m^{13}$ в виде степени с основанием m.
В ответе укажите номер правильного варианта.

1) m^{85}
2) m^{-4}
3) m^{59}
4) m^{-30}

11. Задание 4 № 348386

Какое из данных чисел $\sqrt{0,16}, \sqrt{1,6}, \sqrt{1600}$ является иррациональным?

1) $\sqrt{0,16}$
2) $\sqrt{1,6}$
3) $\sqrt{1600}$
4) все эти числа рациональны

12. Задание 4 № 348417

Какое из данных ниже чисел является значением выражения $(\sqrt{42}-2)^2$?

1) $46 - 4\sqrt{42}$ 2) $38 - 4\sqrt{42}$ 3) $46 - 2\sqrt{42}$ 4) 38

582. Найдите значение выражения $\sqrt{1,28} \cdot \frac{1}{\sqrt{8}}$.

583. Найдите значение выражения $\sqrt{2,88} \cdot \frac{1}{\sqrt{72}}$.

584. Найдите значение выражения $(\sqrt{34} - 5)^2$.

585. Найдите значение выражения $(\sqrt{97} - 5)^2$.

586. Найдите значение выражения $(\sqrt{61} - 4)^2$.

587. Найдите значение выражения $(\sqrt{30} - 4)^2$.

588. Найдите значение выражения $(\sqrt{95} - 6)^2$.

576. Найдите значение выражения $7\sqrt{21} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{42}$.

577. Найдите значение выражения $5\sqrt{23} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{46}$.

578. Найдите значение выражения $2\sqrt{30} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{60}$.

579. Найдите значение выражения $\sqrt{0,48} \cdot \frac{1}{\sqrt{12}}$.

580. Найдите значение выражения $\sqrt{0,5} \cdot \frac{1}{\sqrt{50}}$.

Подготовка к контрольной работе

Вариант 1 **К—2 (§ 3, 4)**

•1. Постройте график функции $y = x^2 - 6x + 5$. Найдите с помощью графика:

а) значение y при $x = 0{,}5$;

б) значения x, при которых $y = -1$;

в) нули функции; промежутки, в которых $y > 0$ и в которых $y < 0$;

г) промежуток, на котором функция возрастает.

•2. Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 8x + 7$.

3. Найдите область значений функции $y = x^2 - 6x - 13$, где $x \in [-2; 7]$.

4. Не выполняя построения, определите, пересекаются ли парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ и прямая $y = 5x - 16$. Если точки пересечения существуют, то найдите их координаты.

5. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + 12\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$.

Может быть корень – это степень?

Падает на число

$$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt{x^3}$$

Идет на корень

В п. 9 говорилось, что выражение $a^{\frac{1}{n}}$, где $a > 0$ и n — натуральное число, обозначает $\sqrt[n]{a}$. Теперь рассмотрим, какой смысл имеет выражение $a^{\frac{m}{n}}$, где a — положительное число, $\frac{m}{n}$ — дробное число.

Определение. Если a — положительное число, $\frac{m}{n}$ — дробное число (m — целое, n — натуральное), то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

По определению имеем

$$0{,}7^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{0{,}7^3},\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{1{,}3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{13}{10}} = \sqrt[10]{\left(\frac{1}{3}\right)^{13}},\quad 5^{-\frac{1}{6}} = 5^{\frac{-1}{6}} = \sqrt[6]{5^{-1}}.$$

Степень с основанием, равным нулю, определяется только для положительного дробного показателя:

если $\frac{m}{n}$ — дробное положительное число (m и n — натуральные), то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.

Простые задачи

Представьте степень с дробным показателем в виде корня:

а) $3^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{3}{4}}$, $0{,}2^{0{,}5}$, $7^{-0{,}25}$;

б) $x^{\frac{3}{4}}$, $a^{1{,}2}$, $b^{-0{,}8}$, $c^{2\frac{2}{3}}$;

в) $5a^{\frac{1}{3}}$, $ax^{\frac{3}{5}}$, $-b^{-1{,}5}$, $(2b)^{\frac{1}{4}}$;

г) $(x-y)^{\frac{2}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$, $3(a+b)^{\frac{3}{4}}$, $4a^{-\frac{2}{3}} + ax^{\frac{2}{3}}$.

Представьте арифметический корень в виде степени с дробным показателем:

а) $\sqrt{1{,}3}$; в) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$; д) $\sqrt[7]{a^4}$; ж) $\sqrt[3]{a^2 - b^2}$;

б) $\sqrt[3]{7^{-1}}$; г) $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}}$; е) $\frac{1}{\sqrt[8]{x^3}}$; з) $\sqrt[5]{(x-y)^2}$.

Представьте в виде степени с рациональным показателем:

а) $c^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{3}}$; г) $d^5 d^{\frac{1}{2}}$; ж) $z^{\frac{1}{5}} : z^{-\frac{1}{2}}$; к) $(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{9}}$;

б) $b^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}$; д) $x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$; з) $m^{\frac{1}{3}} : m^2$; л) $(c^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$;

в) $a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{6}}$; е) $y^{\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$; и) $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$; м) $(p^3)^{-\frac{2}{9}}$.

Упростите выражение:

а) $(a^{0{,}4})^{\frac{1}{2}} \cdot a^{0{,}8}$; в) $a(a^{-1{,}2})^{\frac{3}{4}}$;

б) $(x^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}} \cdot x^{1{,}6}$; г) $(a^{0{,}8})^{-\frac{3}{4}} \cdot (a^{-\frac{2}{5}})^{-1{,}5}$.