Графический способ решения задач с параметром

Занятие элективного курса «Задачи с параметром» в 9 классе

Автор – Прошина Л. Н., учитель ЧУ ООШ «ВЕНДА»

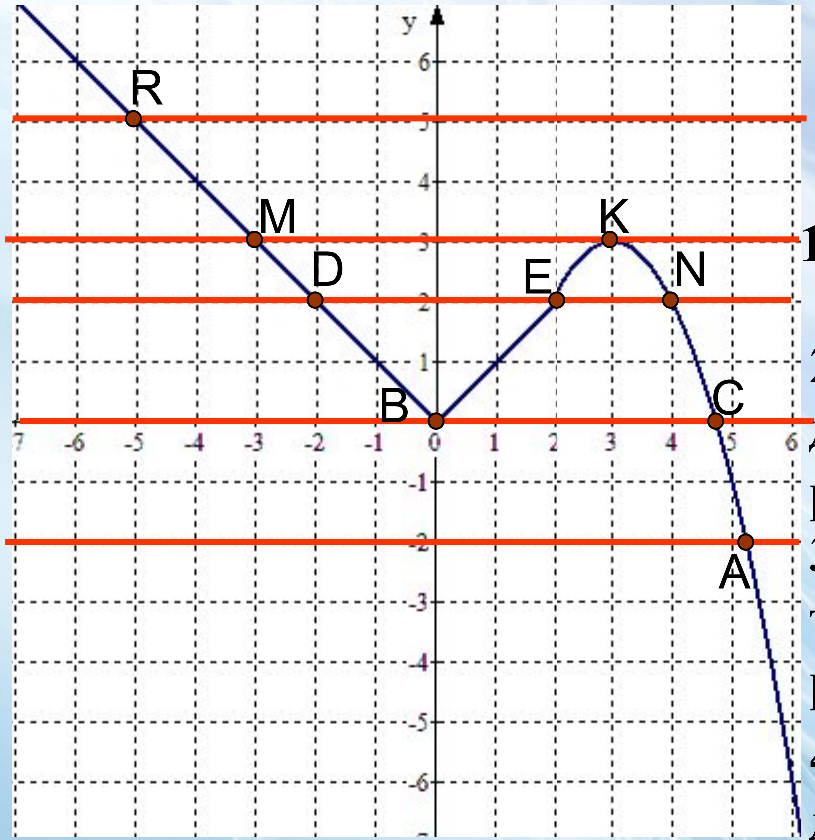
Уравнения с параметром вызывают серьезные трудности логического характера. Каждое такое уравнение – это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства невозможно, но, тем не менее, каждое из них должно быть решено. Легче всего это сделать с помощью графического представления зависимости переменной от параметра .

На плоскости функция задает семейство кривых зависящих от параметра . Нас будет интересовать с помощью какого преобразования плоскости можно переходить к другим кривым семейства

Дана функция $y = f(x)$, где $f(x)=\begin{cases}|x|, x<2,\\ -(x-3)^2+3, x\ge 2.\end{cases}$

Найдите число решений уравнения $f(x) = a$, где a - любое число.

Решение: Построим график функции $y = f(x)$:



Уравнение имеет столько решений, сколько раз прямая $y = a$ пересекает график функции:

1) если $a<0$, то графики пересекаются в одной точке (A), т.е. одно решение;

2) если $a=0$, то графики пересекаются в двух точках (B,C) – что дает два решения;

3) если $0< a<3$, то графики пересекаются в трёх точках (D,E,N) – что дает три решения;

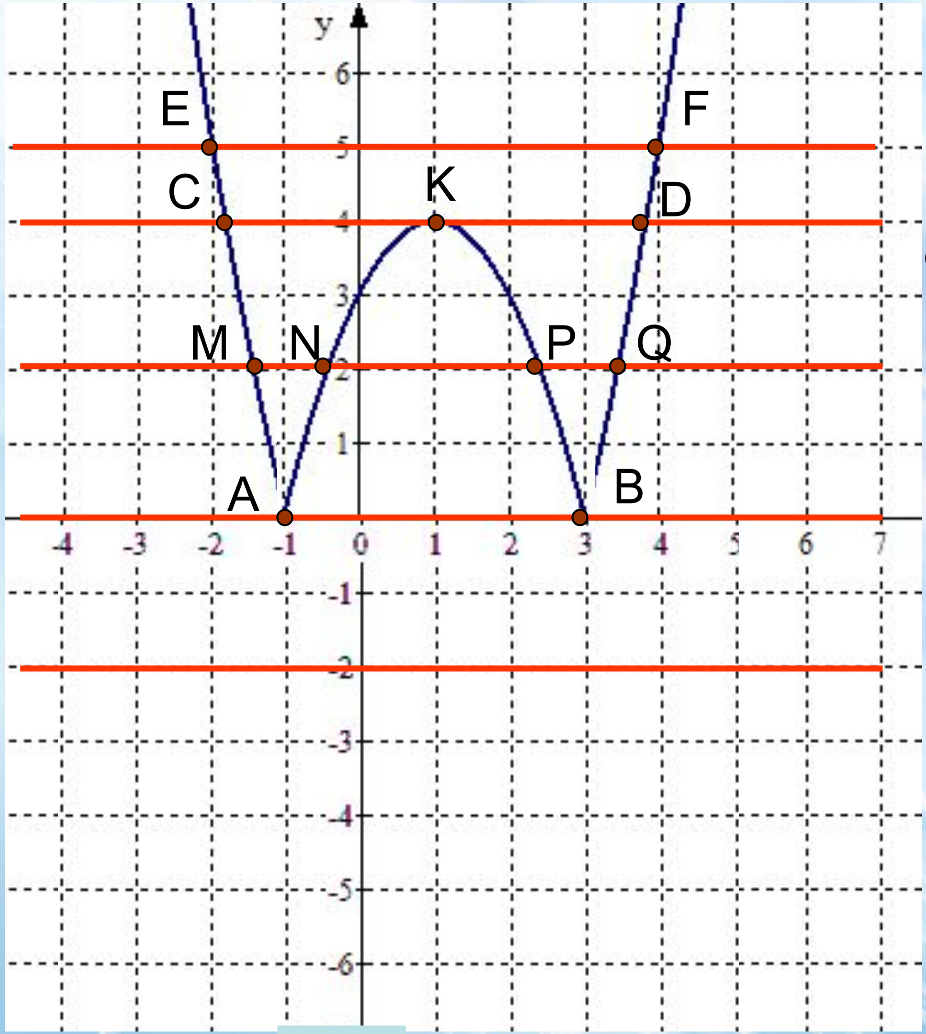
4) если $a=3$, то графики пересекаются в двух точках (M,K) – что дает два решения;

5) если $a>3$, то графики пересекаются в одной точке (R), т.е. одно решение.

Ответ

Найдите число решений уравнения в зависимости от параметра а. $\left|x^2-2x-3\right|=a$

Решение: Построим график функции $y=\left|x^2-2x-3\right|=\left|(x-1)^2-4\right|$



Уравнение имеет столько решений, сколько раз прямая $y=a$ пересекает график функции:

1) если $a<0$, то графики не имеют общих точек, т.е. нет решения;

2) если $a=0$, то графики имеют две общие точки (A и B), т.е. два решения;

3) если $0<a<4$, то графики пересекаются в четырех точках (это могут быть точки M, N, P, Q) – что дает четыре решения;

4) если $a=4$, то графики имеют три общие точки (C, K, D), т.е. три решения;

5) если $a>4$, то графики имеют две общие точки (E и F), т.е. два решения.

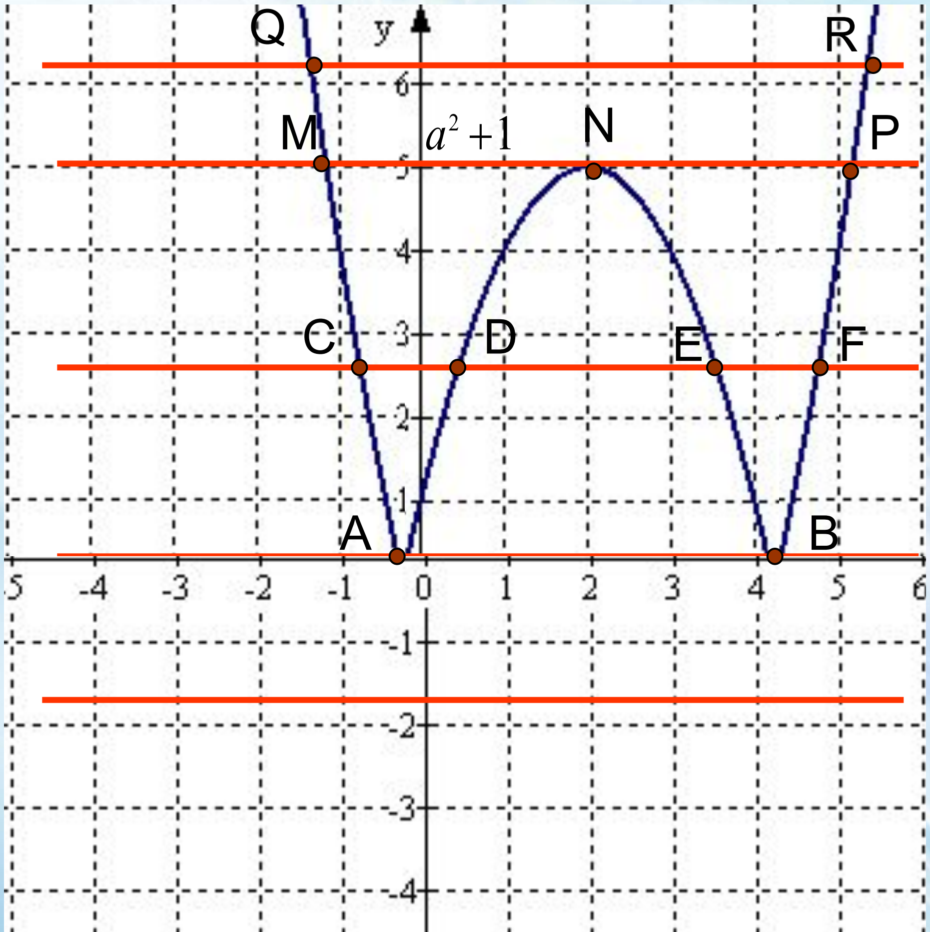
Ответ

Найдите число решений уравнения в зависимости от параметра а.

$$|x^2 - 2ax - 1| = a + 3$$

Решение: Построим график функции $y = |x^2 - 2ax - 1| = |(x-a)^2 - (a^2+1)|$

с учётом, что $D = 4a^2 + 4 > 0$



Уравнение имеет столько решений, сколько раз прямая $y = a + 3$ пересекает график функции:

1)Если a+3<0 , т.е. a<-3 , то графики и не пересекаются, а значит нет решений.

2) Если a+3=0 , т.е a=-3. , то графики пересекаются в двух точках (A и B) и, стало быть исходное уравнение имеет два решения.

3) Если $0 < a + 3 < a^2 + 1$, или

$\begin{cases} a + 3 < a^2 + 1 \\ a + 3 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 - a - 2 > 0 \\ a > -3 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} -3 < a < -1 \\ a > 2 \end{array}\right.$

то графики имеют четыре общие точки (C, D, E, F), а исходное уравнение – четыре решения.

4) Если $a + 3 = a^2 + 1$ т.е. a=-1 и a=2 , то графики имеют три общие точки (M, N, P). Значит, уравнение имеет три решения.

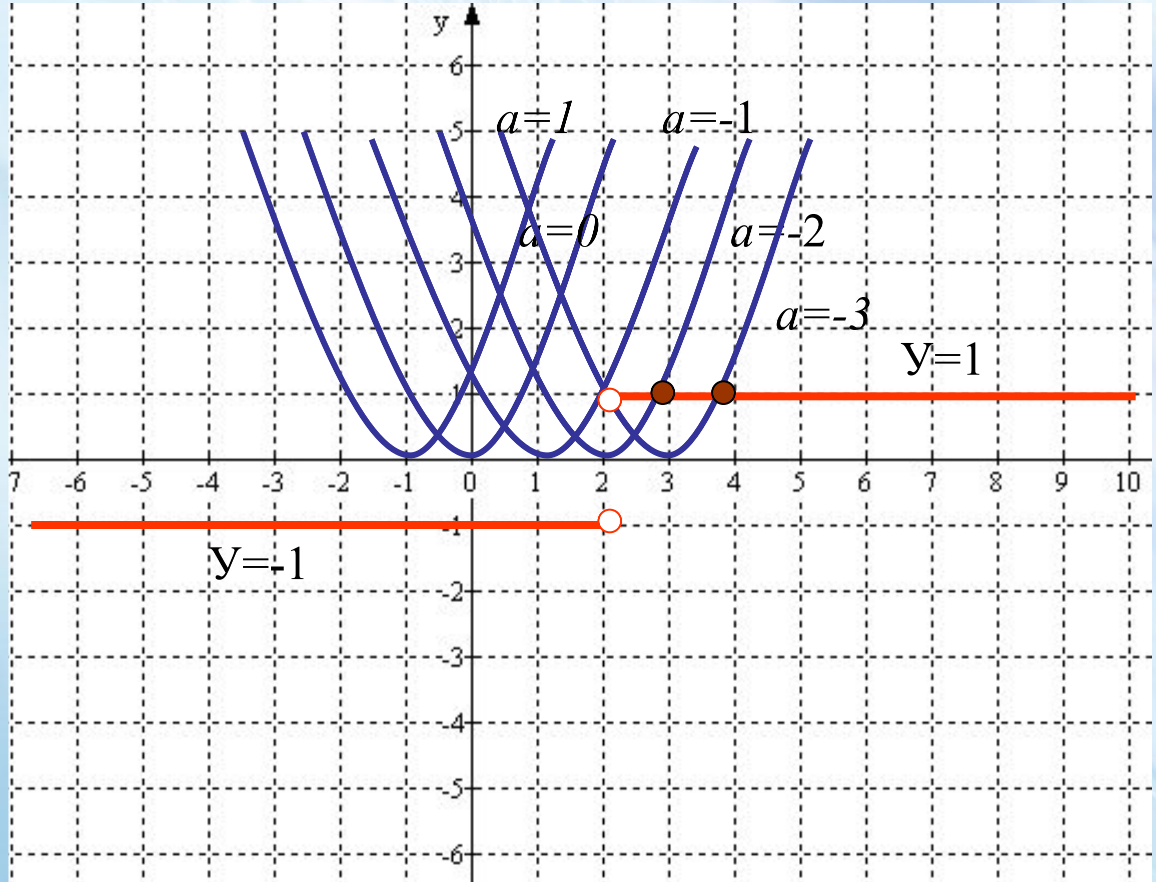
5) Если же $a^2 + 1 < a + 3$ или -1<a<2, то графики пересекаются в двух точках (Q и R), т.е. уравнение имеет два решения.

Ответ

Найдите все значения параметра а, при которых графики функций $y = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ *и* $y = (x+a)^2$ *имеют одну общую точку.*

Решение: Построим графики функций $y = \dfrac{|x-2|}{x-2} = \begin{cases} 1, x > 2 \\ -1, x < 2 \end{cases}$, ОДЗ: $x \neq 2$

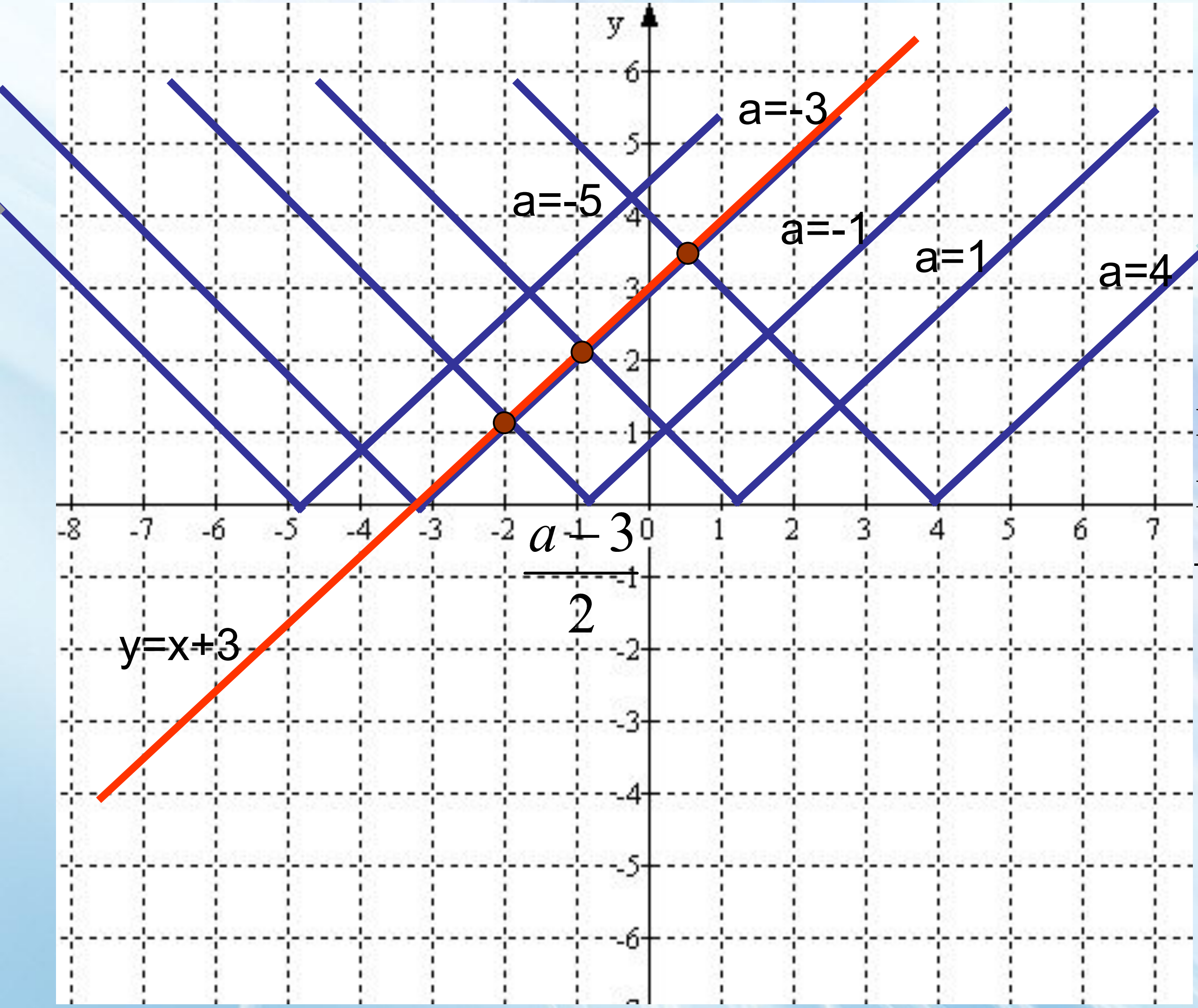
и $y = (x+a)^2$ - семейство парабол, смещенных параллельным переносом по оси Ох



Ответ $-3 \le a < -1$

Для каждого значения параметра а решите неравенство $|x - a| \le x + 3$

Решение: Построим графики функций y = |x - a| и y=x+3



если a < -3, то график функции y = |x - a| лежит выше y = x+3 , значит решений нет;

если $a \ge -3$, то находим точку пересечения:

$-x + a = x + 3; \; x = \dfrac{a-3}{2}$

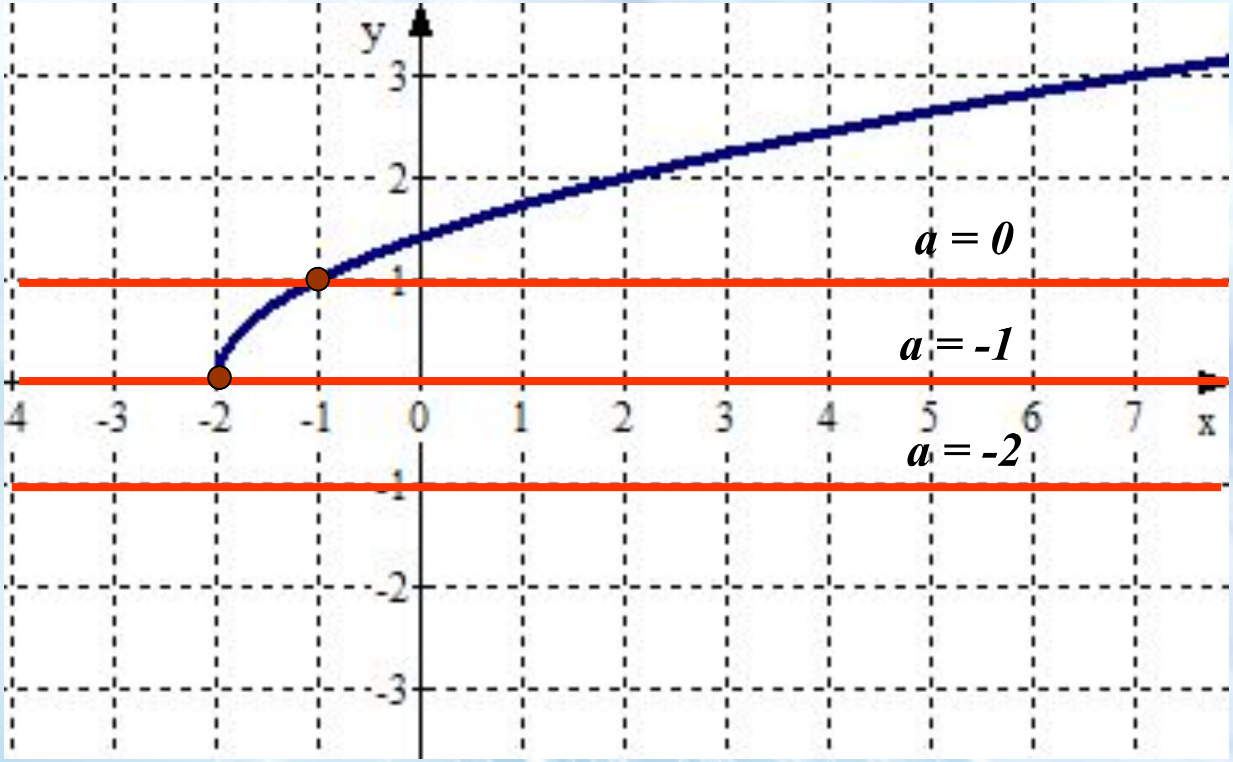
график функции y = |x - a| лежит ниже графика функции y=x+3, значит при

$a \ge -3 \quad x \ge \dfrac{a-3}{2}$

Ответ

Для каждого значения параметра а решите неравенство $\sqrt{2+x} \le a+1$

Решение: Построим графики функций у = $\sqrt{2+x}$ и у=a+1



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+1 \ge 0 \\ 2+x \ge (a+1)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a+1 < 0 \\ 2+x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge -1 \\ x \ge a^2+2a-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a < -1 \\ x \ge -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: ***при a < -1 x* € [-2; + ∞)**

***при a ≥ -1 x* € [**a^2+2a-1 **; + ∞)**

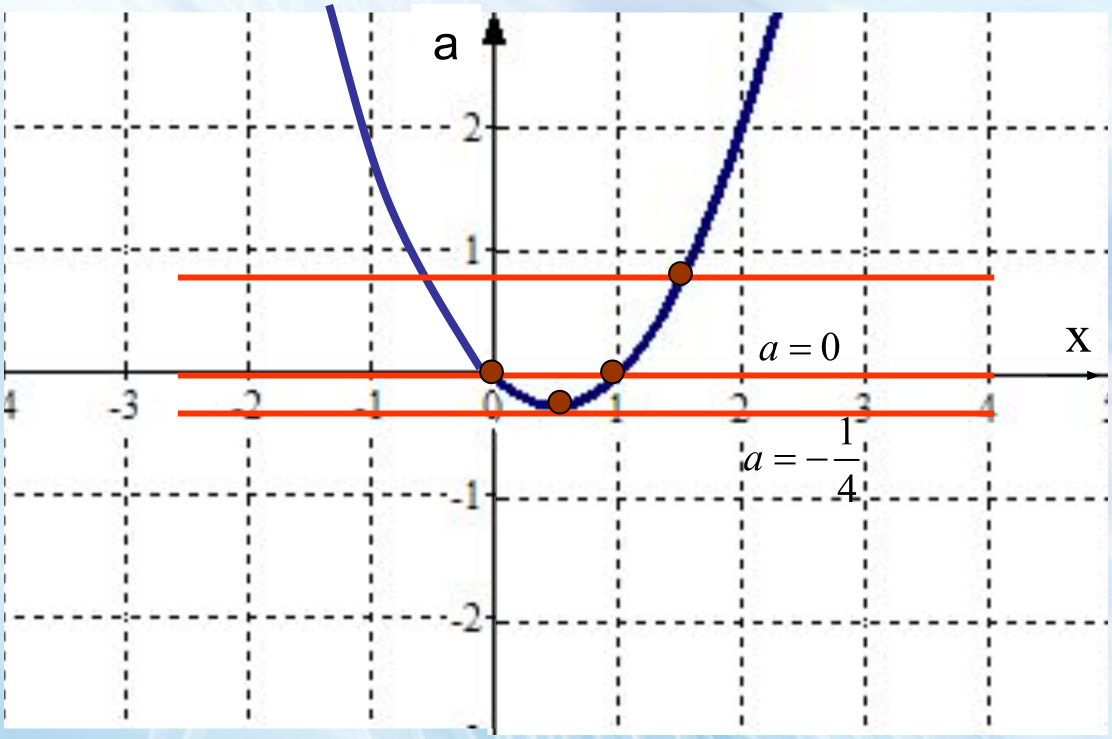
Графический метод. Координатная плоскость (x;a)

Алгоритм решения.

- Находим область определения уравнения.
- Выражаем a как функцию от x.
- В системе координат xOa строим график функции $a = F(x)$ для тех значений x, которые входят в область определения данного уравнения.
- Находим точки пересечения прямой $a = c$, где c $(-\infty;+\infty)$ с графиком функции $a = F(x)$. Если прямая $a = c$ пересекает график $a = F(x)$, то определяем абсциссы точек пересечения. Для этого достаточно решить уравнение $a = F(x)$ относительно x.
- Записываем ответ.

При каких значениях параметра $\sqrt{x+a}=x$ *уравнение имеет два корня?*

Решение. Переходим к равносильной системе $\begin{cases} x \geq 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$



Найдём координаты вершины параболы:

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

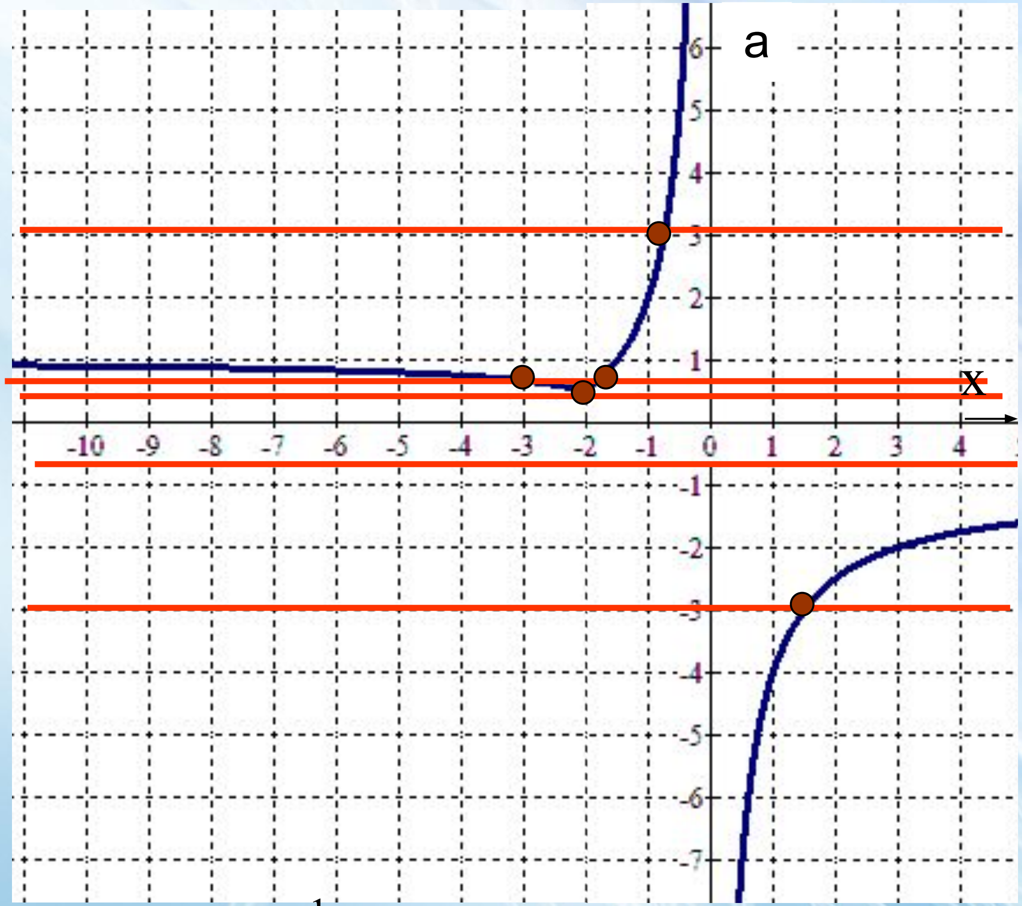
$$a_0 = -\frac{1}{4}$$

Из графика видно, что при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет 2 корня.

Ответ: при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ уравнение имеет два корня.

Решите уравнение с параметром а $\quad ax+1=|x+2|$

Решение: Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения, то можно разрешить уравнение относительно a: $\quad a=\dfrac{|x+2|-1}{x}$ или $\quad a=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x}, & x\ge -2\\ -\dfrac{x+3}{x}, & x<-2\end{cases}$



Если $a\in(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$, то прямая $a = c$ пересекает график в одной точке. Абсциссу этой точки найдем при решении уравнения $a=\dfrac{x+1}{x}$ относительно x.

$$a=\frac{x+1}{x}\Leftrightarrow ax=x+1\Leftrightarrow x=\frac{1}{a-1}$$

Если $a\in(-1;\frac{1}{2})$, то прямая a=c пересекает график уравнения в двух точках. Абсциссы этих точек можно найти из уравнений $a=\dfrac{x+1}{x}$ и $a=-\dfrac{x+3}{x}$

$$x_1=\frac{1}{a-1} \qquad x_2=-\frac{3}{a+1}$$

Если $a\in(\frac{1}{2};1]$, то прямая $a = c$ не пересекает график уравнения, следовательно решений нет.

Ответ

Ответ:

если $a<0$ и $a>3$, то одно решение;

если $a=0$ и $a=3$, то два решения;

если $0< a<3$, то три решения.

Ответ: если $a<0$, то нет решения;

если $a=0$, $a>4$, то два решения;

если $0<a<4$, то четыре решения;

если $a=4$, то три решения.

Ответ:

при $a < -3$ нет корней;

при $a = -3$ и $-1 < a < 2$ два корня;

при $-3 < a < -1$ и $a > 2$ четыре корня;

при $a = -1$ и $a = 2$ три корня;

Ответ:

если $a < -3$, то решений нет;

если $a \geq -3$, то $\frac{a-3}{2} \leq x \leq +\infty$.

Ответ:

если $a \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **, то** $x = \frac{1}{a-1}$ **;**

если $a \in (-1; \frac{1}{2})$ **, то** $x_1 = \frac{1}{a-1}$ **;** $x_2 = -\frac{3}{a+1}$

если $a \in (\frac{1}{2}; 1]$ **, то решений нет**

Реши сам:

а) при каких значениях параметра *а* уравнение

$$|x^2 + 4ax + a| = a + 2$$

имеет три решения? Найдите эти решения.

б) Определите число решений уравнения в зависимости от параметра *а*.

$$|x^2 - ax + a| = a - 3$$

Спасибо за урок!