

МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Царева В.В.
учитель
математики
МОУ
Инзенская
СОШ №2

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ:

Цель занятия: познакомить учащихся с методом замены множителей, как эффективным способом решения целого класса неравенств.

Задачи занятия:

- ввести понятие метода замены множителей и рассмотреть применение этого метода для решения различных видов неравенств;
- повторение и обобщение метода интервалов;
- расширение кругозора учащихся;
- воспитание познавательной активности;
- повышение интереса к изучению математики на примере красоты метода замены множителей;
- подготовка учащихся к решению задачи С3 ЕГЭ по математике.

І.ПОВТОРЕНИЕ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

$$a) (x - 2)(x + 1) \leq 0$$

$$б) \frac{(x^2 - 1)(x + 3)}{x} \geq 0$$

II. МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Определения возрастающей и убывающей функций можно сформулировать по другому:

Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве M , если для любых a и b из множества M выражения $a-b$ и $f(a)-f(b)$ имеют одинаковый (противоположный) знак.

Этот факт можно использовать при решении неравенств, в правой части которых стоит ноль. Можно в левой части (числителе и/или знаменателе левой части) заменить разность значений монотонной функции разностью значений аргумента. При этом, если функция возрастающая, то знак неравенства сохранится, а если функция убывающая, то знак неравенства поменяется на противоположный. Такой прием решения неравенств и называется методом замены множителей.

Базовая информация по методу замены множителей

1. Стандартный вид неравенств, когда применяется метод замены множителей

$$\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n} \leq 0$$

где символ «v» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: <, >, ≤, ≥

2. Основная идея метода замены множителей состоит в замене любого множителя в числителе или в знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ ЗАМЕНЫ

$$1) |t| \leftrightarrow t^2$$

$$2) |t_1| - |t_2| \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2 = (t_1 - t_2)(t_1 + t_2)$$

$$3) \sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2$$

$$4) |t_1| - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1^2 - t_2$$

$$5) f - g \leftrightarrow f^2 - g^2 \quad (f \geq 0, g \geq 0)$$

$$6) \log_a f - \log_a g \leftrightarrow (a-1)(f-g)$$

$$7) a^f - a^g \leftrightarrow (a-1)(f-g)$$

III. ЗАКРЕПЛЕНИЕ. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$$a) |x + 2| \leq |4 - x|$$

$$б) (|x + 1| - 3)(|x - 2| - 5) < 0$$

$$в) x^2 - 6|x| + 8 < 0$$

$$г) |x^3 - 1| > 1 - x$$

$$д) (x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leq x^2 - 9$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ

$$a) |x + 2| \leq |4 - x|$$

Решение :

$$|x + 2| - |4 - x| \leq 0$$

$$(x + 2)^2 - (4 - x)^2 \leq 0$$

$$(x + 2 - 4 + x)(x + 2 + 4 - x) \leq 0$$

$$6(2x - 2) \leq 0$$

$$2x - 2 \leq 0$$

$$2x \leq 2$$

$$x \leq 1$$

Ответ : $x \leq 1$

$$б) (|x+1|-3)(|x-2|-5) < 0$$

Решение :

$$((x+1)^2 - 3^2)((x-2)^2 - 5^2) < 0$$

$$(x+1-3)(x+1+3)(x-2-5)(x-2+5) < 0$$

$$(x-2)(x+4)(x-7)(x+3) < 0$$

$$x \in (-4; -3) \cup (2; 7)$$

$$\text{Ответ : } x \in (-4; -3) \cup (2; 7)$$

$$в) x^2 - 6|x| + 8 < 0$$

Решение :

$$|x|^2 - 6|x| + 8 < 0$$

$$(|x| - 4)(|x| - 2) < 0$$

$$(x^2 - 16)(x^2 - 4) < 0$$

$$x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$$

$$\text{Ответ : } x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$$

$$2) |x^3 - 1| > 1 - x$$

Решение :

$$|x^3 - 1| - (1 - x) > 0$$

$$(x^3 - 1)^2 - (1 - x)^2 > 0$$

$$(x - 1)^2 (x^2 + x + 1)^2 - (x - 1)^2 > 0$$

$$(x - 1)^2 ((x^2 + x + 1)^2 - 1) > 0$$

$$(x - 1)^2 (x^2 + x + 1 - 1)(x^2 + x + 1 + 1) > 0$$

$$(x - 1)^2 (x^2 + x)(x^2 + x + 2) > 0$$

$$x(x - 1)^2 (x + 1)(x^2 + x + 2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$\text{Ответ : } x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$z)(x-3)\sqrt{x^2+4} \leq x^2-9$$

Решение :

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} - (x^2-9) \leq 0$$

$$(x-3)\sqrt{x^2+4} - (x-3)(x+3) \leq 0$$

$$(x-3)(\sqrt{x^2+4} - (x+3)) \leq 0$$

$$(x-3)(x^2+4 - (x+3)^2) \leq 0$$

$$(x-3)(x^2+4 - (x^2+6x+9)) \leq 0$$

$$(x-3)(x^2+4 - x^2 - 6x - 9) \leq 0$$

$$(x-3)(-6x-5) \leq 0$$

$$x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$$

$$\text{Ответ : } x \in \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty)$$

IV. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

$$а) \frac{(|x-2|-4-x^2) \cdot (|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|1-x|-4) \cdot (|3+x|-|x-5|)} > 0$$

Ответ : $x \in (-3;-2) \cup [2;5)$

$$б) (x^2 + x - 6) \cdot \sqrt{x^2 - 2x - 3} \geq 0$$

Ответ : $x \in (-\infty;-3] \cup \{-1\} \cup [3;+\infty)$

$$в) \frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$$

Ответ : $x \in (-5;-2) \cup (2;3) \cup (3;5)$

V. ЛИТЕРАТУРА

1) «Квантор» В. И. Голубев; В. И. Тарасов. «Эффективные пути решения неравенств».

2) «Сборник по математике для поступающих в вузы» под редакцией М. И. Сканава.

3) Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. — М.: Илекса, 2007

*Дерзайте, думайте,
решайте.*

Спасибо за внимание!