РЕШАЕМ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Проект учителя математики высшей категории
МОУ СОШ №10 с УИОП г. Красногорска
Трапезниковой Н.К.

СОДЕРЖАНИЕ:

- ***1. Цели***
- ***2. Способы решения***
- ***3. Задания для самостоятельной работы***

ЦЕЛИ:

- Актуализировать знания о логарифмах, систематизировать знания о способах решения логарифмических уравнений

СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ:

- ***1. По определению логарифма***
- ***2. Потенциирование***
- ***3. Замена переменных***
- ***4. Приведение к одному основанию***

1. ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЛОГАРИФМА:

$$log_{2+x}(2x^2+3x-2)=2$$

Решение:

Зададим ОДЗ:

$$\begin{cases} 2+x\neq 1 \\ 2+x>0 \\ 2x^2+3x-2>0 \end{cases};\begin{cases} x\neq -1 \\ x>-2 \\ 2(x-0{,}5)(x+2)>0 \end{cases};$$

значит $x\in(0{,}5;+\infty)$

Используем определение логарифма:

логарифм – это показатель степени.

$$(2+x)^2 = 2x^2 + 3x - 2;$$

$$x^2 + 4x + 4 = 2x^2 + 3x - 2$$

$$x^2 - x - 6 = 0;$$

x=3 или x=-2.

Число -2 не удовл. ОДЗ, значит x=3.

Ответ: 3.

2. ПОТЕНЦИИРОВАНИЕ (*ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ЛОГАРИФМА*)

$$\lg x - \lg(2x-5) = \frac{1}{3}\lg 8 - 2\lg\sqrt{x-3}$$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x-3>0 \\ 2x-5>0; \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>3 \\ x>2{,}5; \\ x>0 \end{cases}$

Значит $x \in (3;+\infty)$

Применим свойства логарифма:

$$\lg\frac{x}{2x-5} = \lg\frac{8^{1/3}}{x-3};$$

значит $\frac{x}{2x-5} = \frac{8^{1/3}}{x-3};$ $\frac{x}{2x-5} = \frac{2}{x-3};$

по свойству пропорции $x(x-3) = 2(2x-5);$

$x^2 - 3x = 4x - 10;$

$x^2 - 7x + 10 = 0;$

$x = 2$ или $x = 5$

2 не удовл. ОДЗ.

Ответ: 5.

3. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ:

$$\lg^3 x^2 - \lg^2 x^3 + \lg x = 0$$

Решение: ОДЗ: $x > 0;$

Пусть : $t = \lg x$

$$\lg^3 x^2 = (\lg x^2)^3 = (2\lg x)^3 = 8\lg^3 x = \\ = 8t^3$$

$$\lg^2 x^3 = (3\lg x)^2 = (3t)^2 = 9t^2$$

Тогда: $8t^3 - 9t^2 + t = 0$

$$t(8t^2 - 9t + 1) = 0$$

$$\boldsymbol{t = 0;\ t = {}^{1}/_{8}} \text{ или } \boldsymbol{t = 1}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \lg x = \dfrac{1}{8} \\ lgx = 1 \\ lgx = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt[8]{10} \\ x = 10 \\ x = 1 \end{cases}$$

Все три значения удовлетворяют ОДЗ.

Ответ: $\sqrt[8]{10}$ 1.

4. ПРИВЕДЕНИЕ К ОДНОМУ ОСНОВАНИЮ:

$$log_3 x - log_{\sqrt{3}} x + log_{\frac{1}{3}} x = 5$$

Решение: ОДЗ: $x > 0;$

$$log_3 x - log_{3^{\frac{1}{2}}} x + log_{3^{-1}} x = 5;$$

$$log_3 x - 2log_3 x - log_3 x = 5;$$

$$-2log_3 x = 5; \quad log_3 x = -\frac{5}{2}$$

$$x = 3^{-\frac{5}{2}}.$$

Данное значение удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: $3^{-\frac{5}{2}}.$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. $log_2(x+14) + log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+2} = 6;$

2. $log_8 x + log_4 x + log_2 x = 11;$

3. $log_{0,4}(x^3 - 7x^2 + 13x - 2) =$
$= x^{log_x 3} * log_{0,4}(x-2)$

ОТВЕТЫ:

- №1. x=2.
- №2. x=64.
- №3. x=3.

РАЗБОР ЗАДАНИЙ

$$1.\ log_2(x+14) + log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+2} = 6;$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x + 14 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases}$$

значит x>-2.

Применим прием приведения к одному основанию:

$$\log_2(x+14)+\log_{2^{1/2}}\sqrt{x+2}=6$$

$$\log_2(x+14)+2\log_2\sqrt{x+2}=6$$

$$\log_2(x+14)+\log_2\sqrt{(x+2)^2}=6$$

$$\log_2(x+14)+\log_2(x+2)=6$$

Применим свойства логарифма:

$$\log_2(x+14)(x+2)=6$$

$$\log_2(x+14)(x+2)=\log_2 64$$

(x+14)(x+2)=64

X^2+2x+14x+28-64=0

X^2+16x-36=0

X=2 или x=-18.

Число -18 не входит в ОДЗ.

Ответ: 2.

$$2.\ log_8 x + log_4 x + log_2 x = 11;$$

ОДЗ: x>0

Приведем все логарифмы к одному основанию:

$$\log_{2^3} x + \log_{2^2} x + \log_2 x = 11$$

$$\frac{1}{3}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 x = 11$$

$$\frac{11}{6}\log_2 x = 11$$

$$\log_2 x = 6$$

$$x = 64$$

Ответ: 64.

$$3.\ log_{0,4}(x^3 - 7x^2 + 13x - 2) = \\ = x^{log_x 3} * log_{0,4}(x - 2)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x^3 - 7x^2 + 13x - 2 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Заметим, что

$$x^{\log_x 3} = 3$$

Тогда

$$\log_{0,4}(x^3 - 7x^2 + 13x - 2) = 3\log_{0.4}(x - 2)$$

$$\log_{0,4}(x^3 - 7x^2 + 13x - 2) = \log_{0.4}(x - 2)^3$$

Имеем равные логарифмы: основания равны, значит, и под логарифмами равные выражения.

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 2 = (x-2)^3$$

$$x^3 - 7x^2 + 13x - 2 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

После приведения подобных слагаемых получаем:
x^2-x-6=0,
x=3 или x=-2,
учитывая ОДЗ, x=3.

Ответ: 3.