



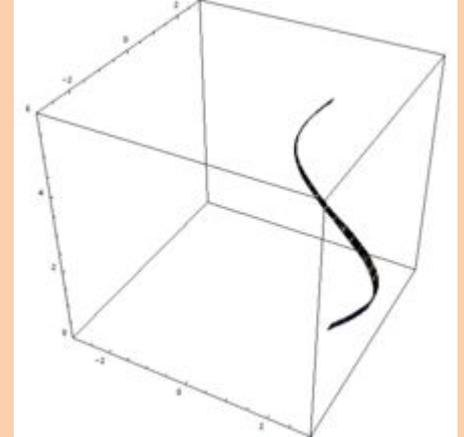
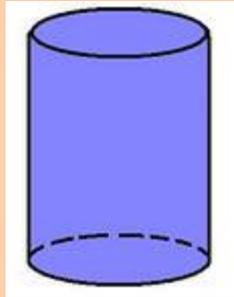
## Тела вращения



**Тела вращения — объёмные тела, возникающие при вращении плоской геометрической фигуры, ограниченной некоторой кривой, вокруг оси, лежащей в той же плоскости**

### Примеры тел вращения

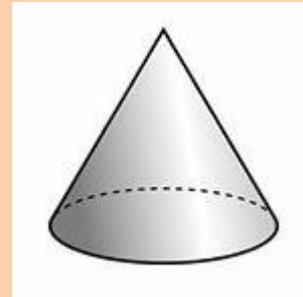
цилиндр



шар



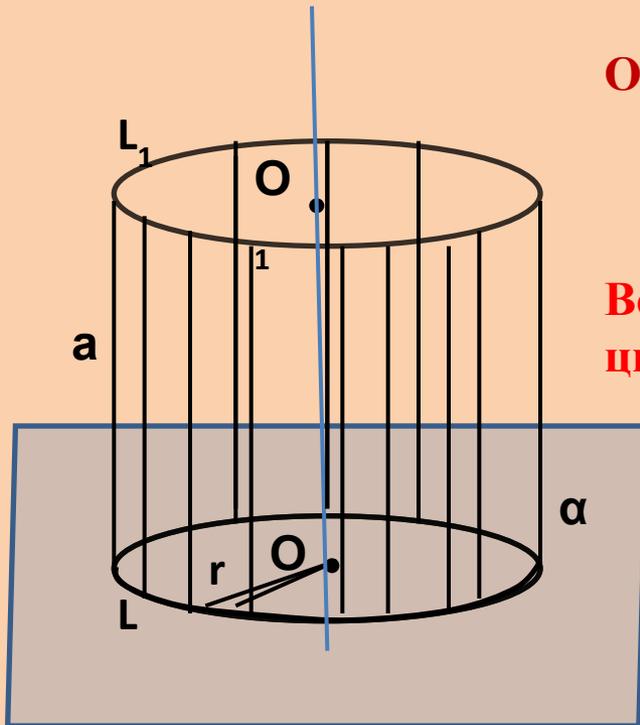
конус



# Цилиндр

## Цилиндрическая поверхность

Поверхность, образованная прямой  $a$  и прямыми, параллельными ей, называется цилиндрической, а сами прямые – образующими цилиндрической поверхности.

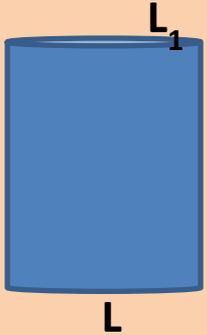


$OO_1$  – ось цилиндрической поверхности

Все образующие равны и параллельны оси цилиндрической поверхности.

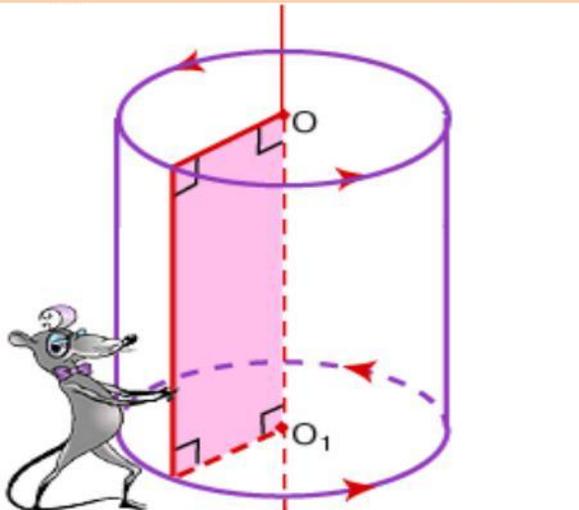
Радиус окружности – радиус цилиндрической поверхности.

**Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами  $L$  и  $L_1$ , называется цилиндром.**



**Круги – основания цилиндра, отрезки образующих, заключенных между основаниями - образующие цилиндра, а образующая ими часть цилиндрической поверхности - боковая поверхность цилиндра.**

**Цилиндр образован прямоугольником, вращающимся вокруг одной из сторон.**



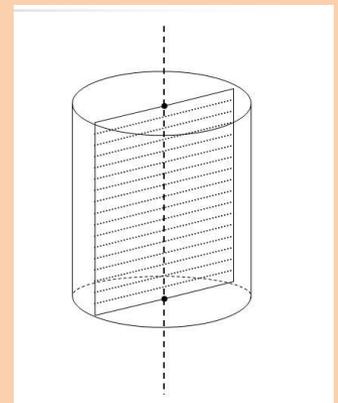
**Длина образующей – высота цилиндра, радиус основания - радиус цилиндра.**

# Сечения цилиндра

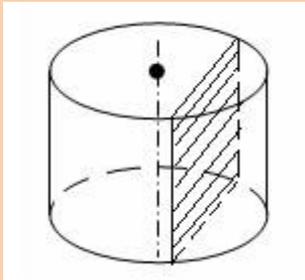
## 1. Плоскостью , проходящей через ось цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется осевым сечением цилиндра.

Осевое сечение – прямоугольник, две стороны которого – образующие цилиндра, а две другие – диаметры его оснований.



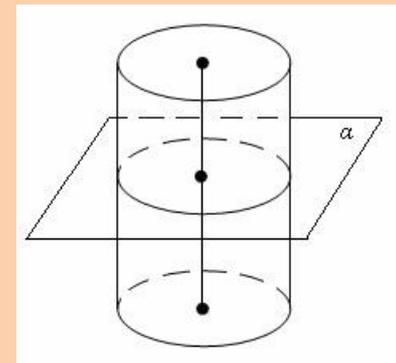
## 2. Плоскостью , проходящей параллельно оси цилиндра.



Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси – прямоугольник, две стороны которого – образующие цилиндра, а две другие – хорды его оснований.

## 3. Плоскостью , проходящей параллельно основаниям цилиндра.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям – круг с центром на оси цилиндра и радиусом, равным радиусу цилиндра.



# Площадь поверхности цилиндра

Площадь полной поверхности цилиндра равна сумме площадей его боковой поверхности и площадей его оснований.

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + 2 S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r^2$$

За площадь боковой поверхности цилиндра принимают площадь ее развертки.

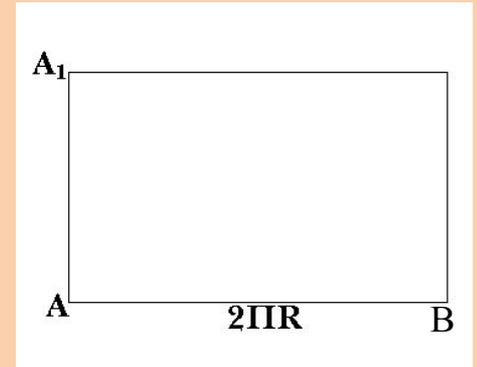
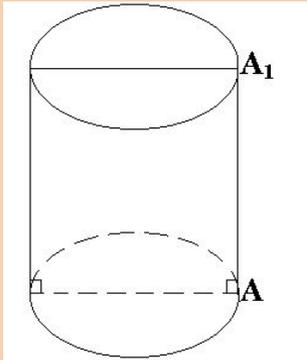
$$AA_1 = h \qquad S_{\text{бок}} = AA_1 \cdot AB \qquad AB = 2\pi r$$

$$S_{\text{бок}} = 2\pi rh$$

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на его высоту.

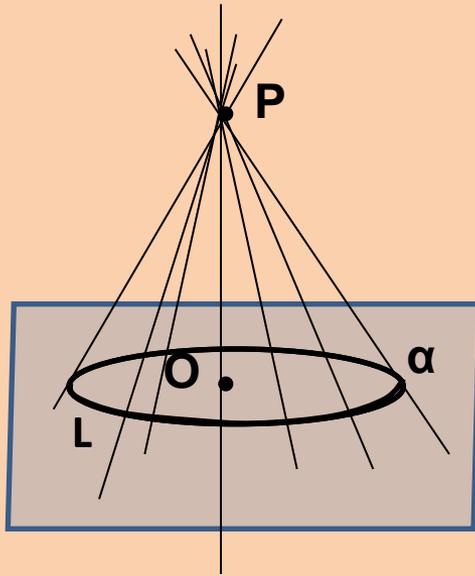
$$S_{\text{пол}} = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$S_{\text{пол}} = 2\pi r( h + r )$$



# Конус

## Коническая поверхность



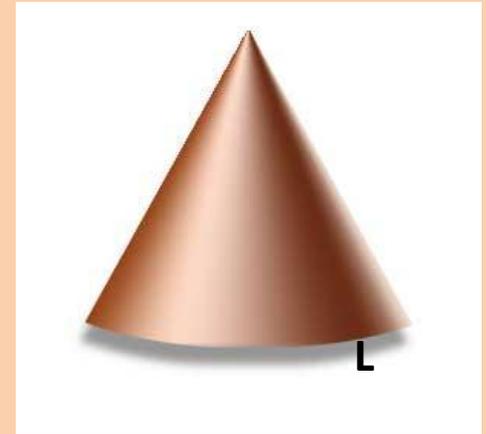
Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической, а сами прямые – образующими конической поверхности.

Точка  $P$  называется вершиной, а прямая  $OP$  – осью конической поверхности.

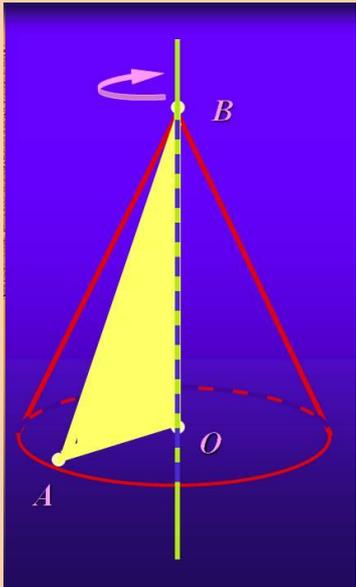
Радиус окружности – радиус конической поверхности.

**Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей  $L$ , называется конусом.**

**Круг – основание конуса, вершина конической поверхности - вершина конуса, отрезки образующих, заключенных между вершиной и основанием - образующими конуса, а образующая ими часть конической поверхности - боковой поверхностью конуса.**



**Конус образован прямоугольным треугольником, вращающимся вокруг одного из его катетов.**



**Ось конической поверхности - ось конуса, отрезок оси конуса, заключенный между вершиной и основанием, – высота конуса, радиус основания - радиус конуса.**

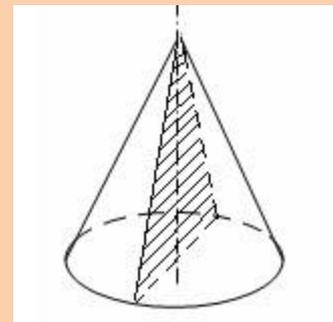
**Все образующие конуса равны.**

# Сечения конуса

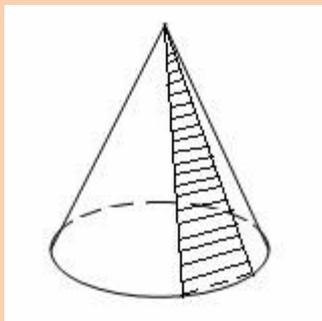
## 1. Плоскостью , проходящей через ось конуса.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется осевым сечением конуса.

Осевое сечение – равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие конуса, а основание – диаметр его оснований.



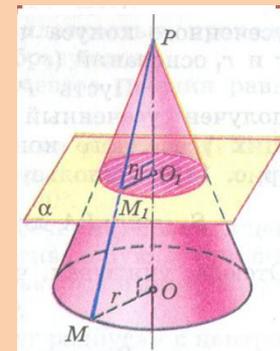
## 2. Плоскостью , проходящей через вершину конуса и его основание.



Сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и его основание – равнобедренный треугольник, боковые стороны которого – образующие конуса, а основание – хорда его основания.

## 3. Плоскостью , проходящей параллельно основанию конуса.

Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию – круг с центром на оси конуса.



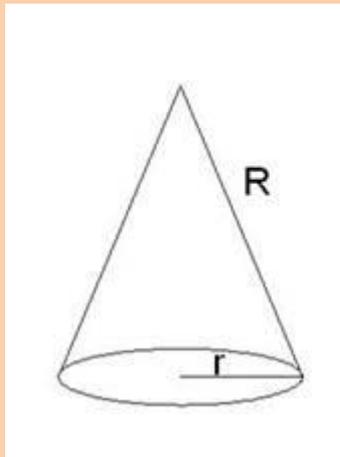
# Площадь поверхности конуса

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей его боковой поверхности и площади его основания.

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{осн}} = \pi r^2$$

За площадь боковой поверхности конуса принимают площадь ее развертки.



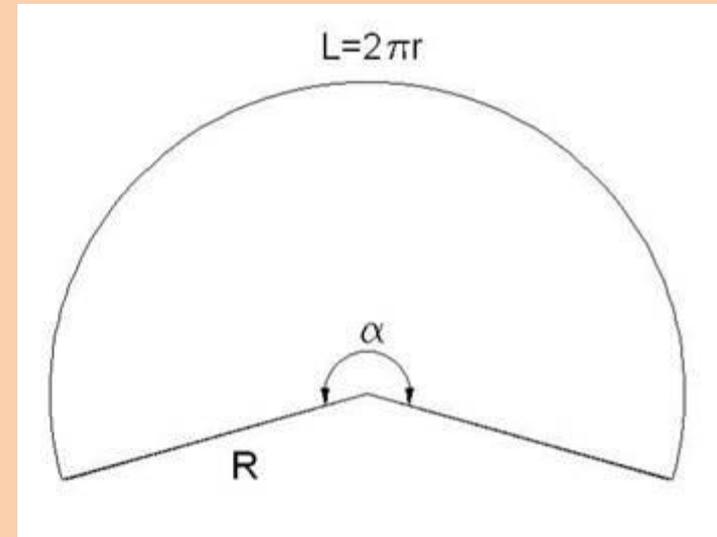
$$S_{\text{бок}} = \pi r l$$

$l$  – образующая конуса

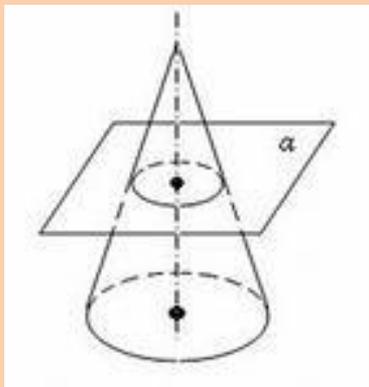
Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

$$S_{\text{пол}} = \pi r l + \pi r^2$$

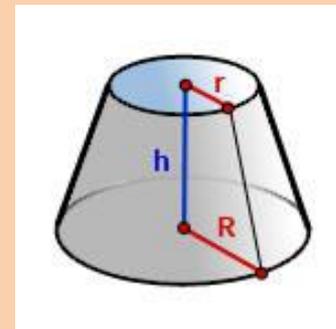
$$S_{\text{пол}} = \pi r (l + r)$$



## Усеченный конус



Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.



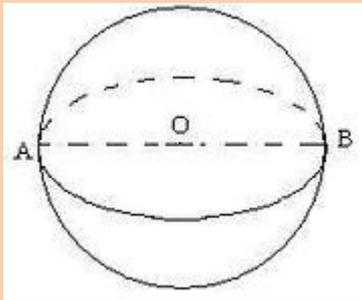
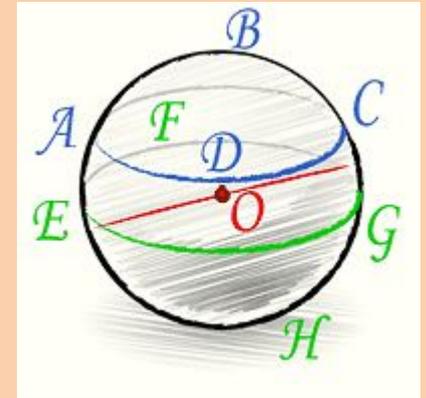
Круги – основания усеченного конуса, отрезок, соединяющий их центры - высота усеченного конуса, отрезки образующих, заключенных между основаниями - образующие усеченного конуса, а образующая ими часть конической поверхности - боковая поверхность усеченного конуса.

$$S_{\text{бок}} = \pi(R + r)l$$

# Сфера и шар

**Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.**

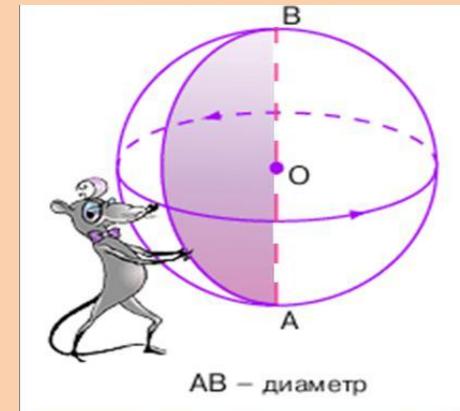
**Данная точка – центр сферы, данное расстояние – радиус сферы (любой отрезок, соединяющий центр сферы с какой – либо точкой сферы), диаметр сферы – отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее середину.**



**Тело, ограниченное сферой, называется шаром.**

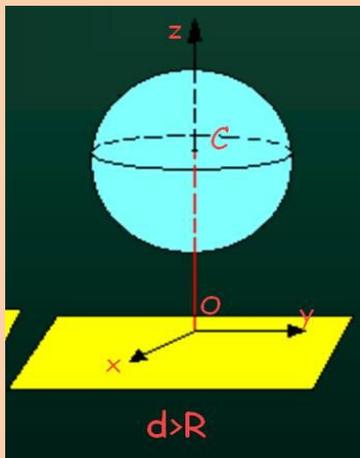
**Центр, радиус, диаметр сферы называют также центром, радиусом и диаметром шара.**

**Шар можно рассматривать как тело, полученное от вращения полукруга вокруг диаметра как оси.**

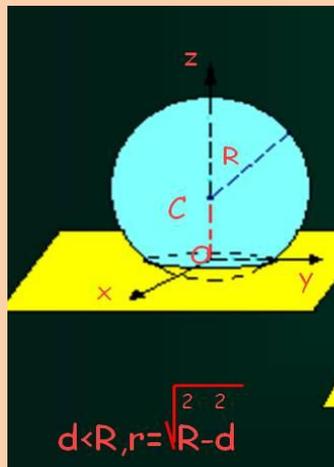


## Взаимное расположение сферы и плоскости

**1.** Если расстояние от центра сферы до плоскости больше радиуса этой сферы, то сфера и плоскость не имеют общих точек.

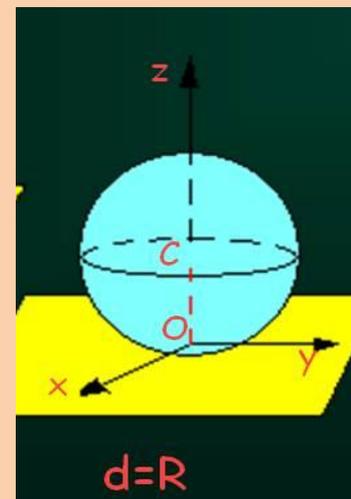


**2.** Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса этой сферы, то сфера и плоскость пересекаются, т. е. имеют много общих точек.



Плоскость называется секущей. В сечении - окружность.

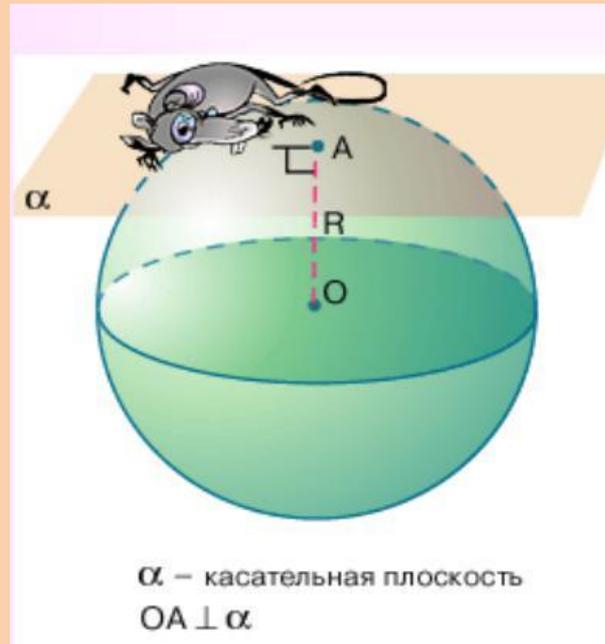
**3.** Если расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу этой сферы, то сфера и плоскость имеют одну общую точку.



Плоскость называется касательной. Общая точка - точка касания.

## Касательная плоскость к сфере

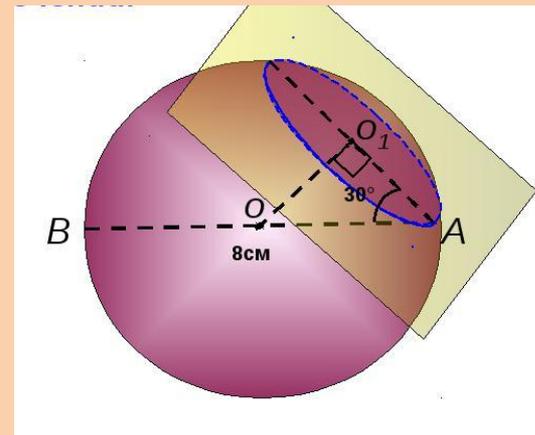
Радиус сферы,  
проведенный в точку  
касания сферы и  
плоскости,  
перпендикулярен к  
касательной плоскости.



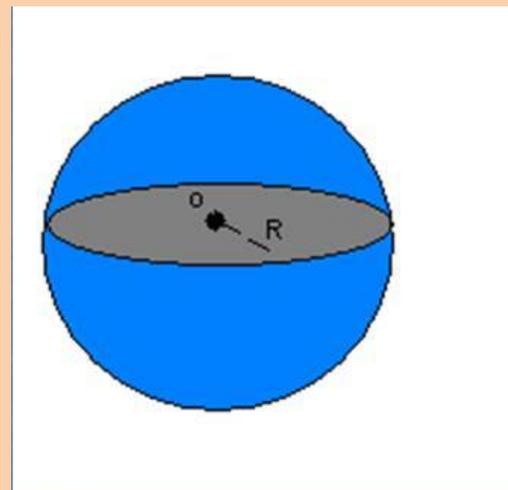
Если радиус сферы  
перпендикулярен к плоскости,  
проходящей через его конец,  
лежащий на сфере, то эта  
плоскость является касательной  
к сфере.

## Сечение шара плоскостью

Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.



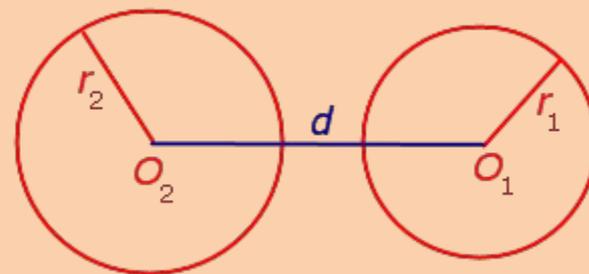
Сечение, проходящее через центр шара – большой круг (диаметральное сечение).



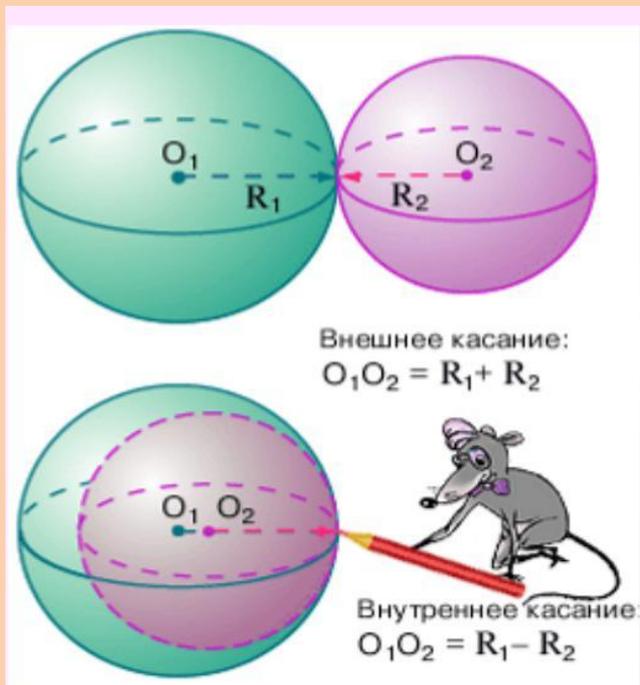
Чем дальше проходит секущая плоскость от центра сферы, тем меньше радиус сечения.

# Взаимное расположение двух сфер

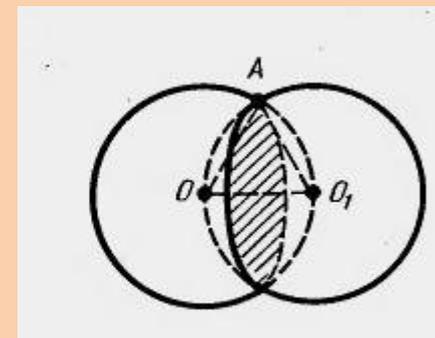
**1. Если расстояние между центрами сфер больше суммы их радиусов, то сферы не имеют общих точек.**



$$d > r_1 + r_2$$

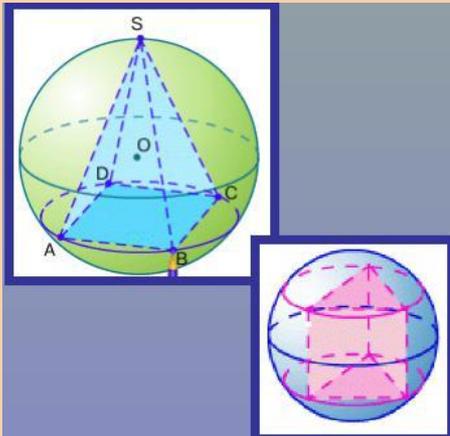
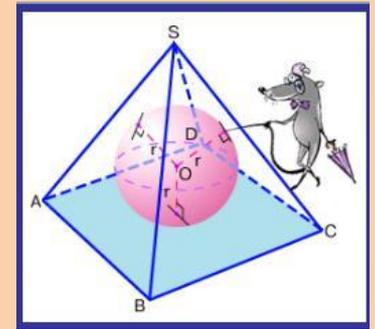


**2. Если сферы имеют общую точку, то сферы касаются.**



**3. Если сферы имеют много общих точек, то они пересекаются. Сферы пересекаются по окружности.**

**Многогранник называется описанным около сферы (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется вписанной в многогранник.**



**Многогранник называется вписанным в сферу (шар), если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется описанной около многогранника.**

**Площадь сферы**

$$S = 4\pi r^2$$

