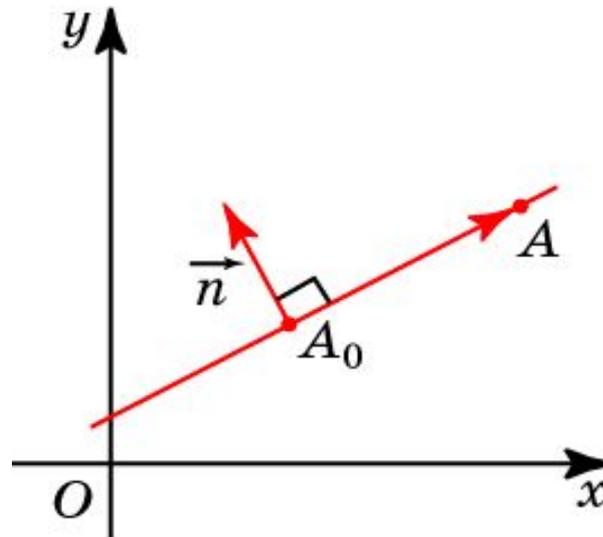


Уравнение прямой

Теорема. Прямая на плоскости задается уравнением

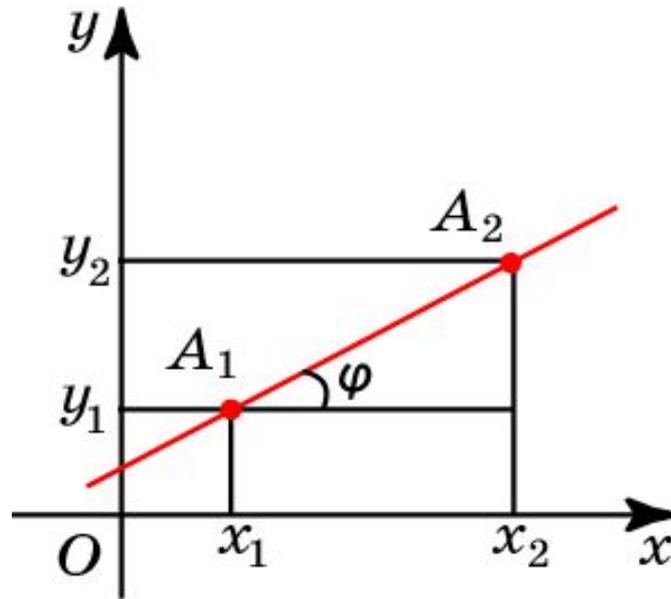
$$ax + by + c = 0,$$

где a , b , c - некоторые числа, причем a , b одновременно не равны нулю и составляют координаты вектора \vec{n} , перпендикулярного этой прямой и называемого **вектором нормали**.



Угловой коэффициент

Если число b в уравнении прямой не равно нулю, то, разделив на b , это уравнение можно привести к виду $y = kx + l$. Коэффициент k называется **УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ** этой прямой. Он равен тангенсу угла, который образует прямая с осью абсцисс.



Взаимное расположение прямых

Две прямые, заданные уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, параллельны, если векторы их нормалей одинаково или противоположно направлены, т.е. для их координат (a_1, b_1) , (a_2, b_2) для некоторого числа t выполняются равенства $a_2 = ta_1$, $b_2 = tb_1$. При этом, если $c_2 = tc_1$, то уравнения определяют одну и ту же прямую. Если же $c_2 \neq tc_1$, то эти уравнения определяют параллельные прямые.

Если две прямые пересекаются, то угол между ними равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1(a_1, b_1)$, $\vec{n}_2(a_2, b_2)$. Этот угол можно вычислить через формулу скалярного произведения

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Пример 1

Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$.

Решение: Векторы нормалей к данным прямым имеют координаты $(1, 2)$ и $(2, -1)$ соответственно. Их скалярное произведение равно нулю и, следовательно, эти векторы перпендикулярны. Значит, угол между данными прямыми равен 90° .

Пример 2

Найдите уравнение прямой, проходящей через заданные точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$.

Решение: Найдем вектор нормали к данной прямой. Он перпендикулярен вектору $\overrightarrow{A_1A_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Следовательно, в качестве такого вектора можно взять вектор с координатами $(y_2 - y_1, x_1 - x_2)$. Искомым уравнением прямой будет уравнение

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0,$$

которое можно также переписать в виде

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_2y_1 - y_2x_1 = 0.$$

Упражнение 1

Какие уравнения имеют координатные прямые:

а) Ox ; б) Oy ?

Ответ: а) $y = 0$; б) $x = 0$.

Упражнение 2

Прямая задана уравнением $x - 2y + 1 = 0$. Чему равны координаты вектора нормали? Нарисуйте эту прямую и вектор нормали.

Ответ: $(1, -2)$.

Упражнение 3

Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат с угловым коэффициентом: а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$. Нарисуйте эти прямые.

Ответ: а) $y = x$; б) $y = 2x$; в) $y = \frac{1}{2}x$; г) $y = -x$;
д) $y = -2x$; е) $y = -\frac{1}{2}x$.

Упражнение 4

Найдите угловой коэффициент прямой: а) $2x - 3y + 4 = 0$; б) $x + 2y - 1 = 0$.

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$.

Упражнение 5

Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A_0(1, 2)$ с вектором нормали $\vec{n}(-1, 1)$.

Ответ: $x - y + 1 = 0$.

Упражнение 6

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 0)$, $B(0, 1)$.

Ответ: $x + y - 1 = 0$.

Упражнение 7

Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $M(3, -1)$, $N(4, 1)$. Найдите координаты вектора нормали этой прямой.

Ответ: $2x - y - 7 = 0$; $\vec{n} (2, -1)$.

Упражнение 8

Напишите уравнение прямой, которая проходит через точку $M(1, -2)$ и параллельна: а) координатной прямой Ox ; б) координатной прямой Oy ; в) прямой $y = x$.

Ответ: а) $y = -2$; б) $x = 1$; в) $y = x - 3$.

Упражнение 9

Точка $H(-2, 4)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую. Напишите уравнение этой прямой.

Ответ: $x - 2y + 10 = 0$.

Упражнение 10

Определите, какие из перечисленных ниже пар прямых параллельны между собой:

а) $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$;

б) $x + y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$;

в) $-7x + y = 0$, $7x - y - 5 = 0$;

г) $2x + 4y - 8 = 0$, $-x - 2y + 4 = 0$.

Ответ: а), в).

Упражнение 11

Найдите угол между прямыми, заданными уравнениями $x + y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. Нарисуйте эти прямые.

Ответ: 90° .

Упражнение 12

Найдите координаты точки пересечения прямых:

а) $x + y - 1 = 0$, $x - y + 3 = 0$;

б) $3x - y + 2 = 0$, $5x - 2y + 1 = 0$.

Ответ: а) $(-1, 2)$; б) $(-3, -7)$.

Упражнение 13

Треугольник задан своими вершинами $A(1, 3)$, $B(3, 0)$, $C(4, 2)$. Найдите уравнения высот этого треугольника и координаты их точки пересечения.

Ответ: $h_a: x + 2y - 7 = 0$; $h_b: 3x - y - 9 = 0$;
 $h_c: 2x - 3y - 2 = 0$; $H(3\frac{4}{7}, 1\frac{5}{7})$.