Теорема Пифагора

Пребудет вечной истина, как скоро
Её познает слабый человек!
И ныне теорема Пифагора
Верна, как и в его далёкий век.

Формулировка теоремы

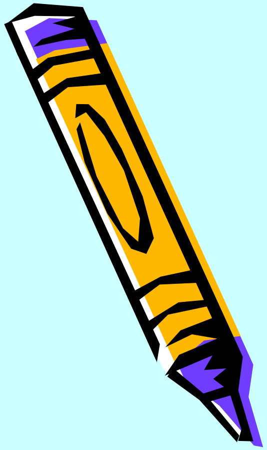
Во времена теорема Пифагора звучала так:

- « Доказать, что квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на катетах»

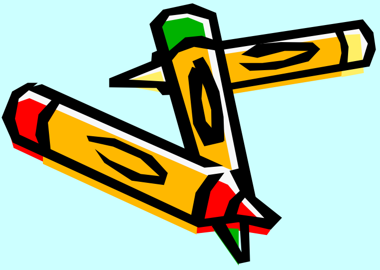
или

- « Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах».

Современная формулировка



« В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов».

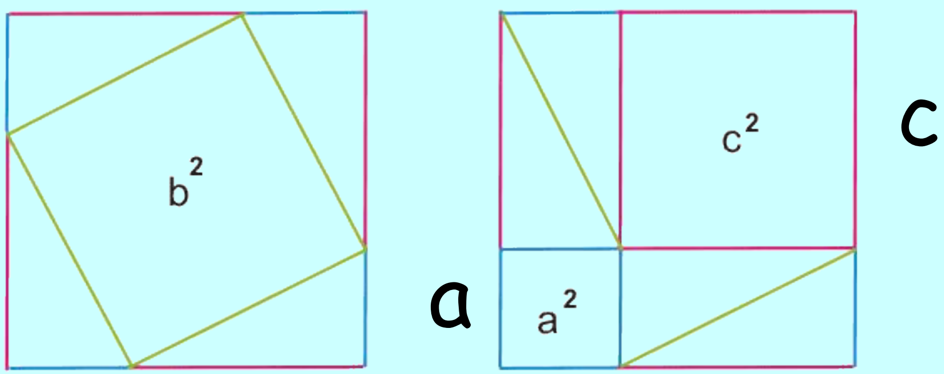


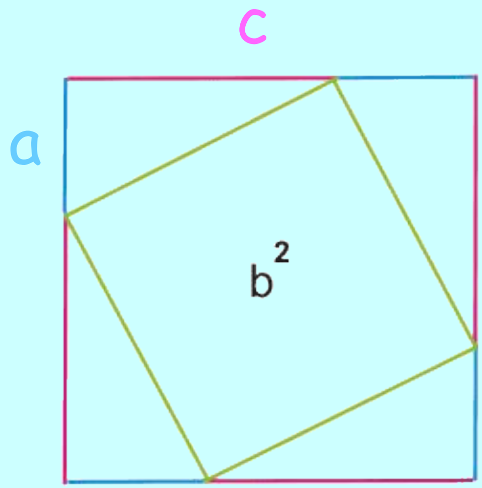
Доказательства теоремы

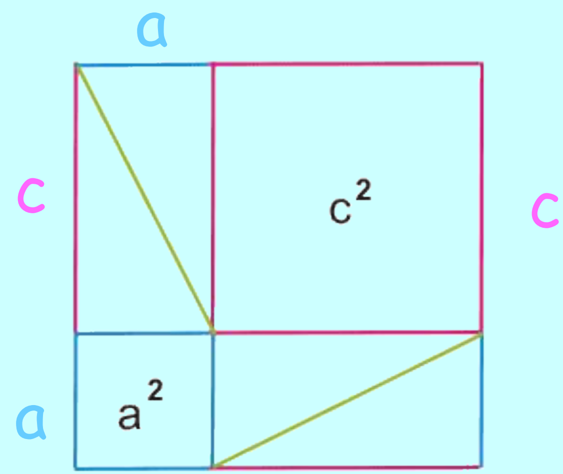
Существует около 500 различных доказательств этой теоремы (геометрических, алгебраических, механических и т.д.).

I. Самое простое доказательство

Рассмотрим квадрат, показанный на рисунке.
Сторона квадрата равна **a + c**.





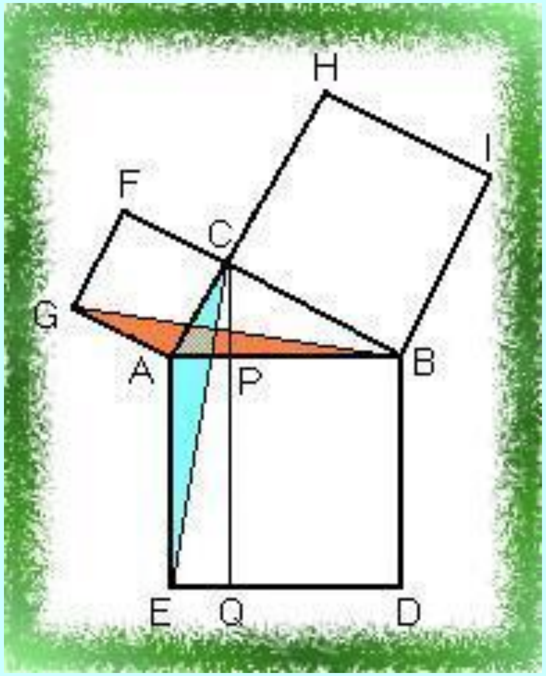


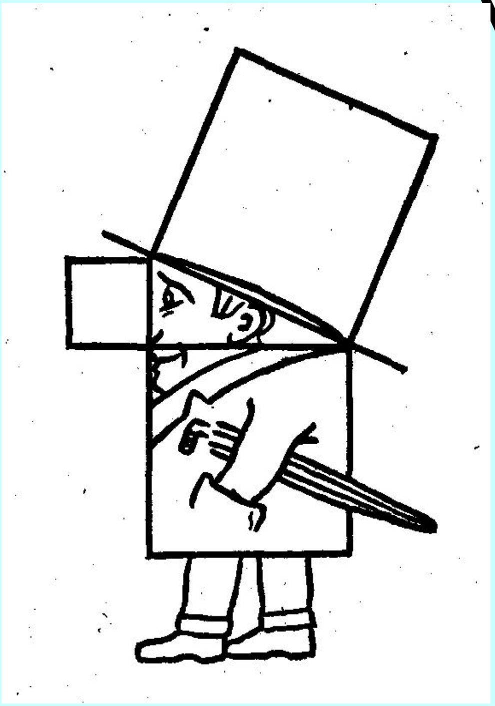
В одном случае (слева) квадрат разбит на квадрат со стороной b и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c.

В другом случае (справа) квадрат разбит на два квадрата со сторонами a и c и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и c.

Таким образом, получаем, что площадь квадрата со стороной b равна сумме площадей квадратов со сторонами a и c.

II. Доказательство Евклида





Дано:

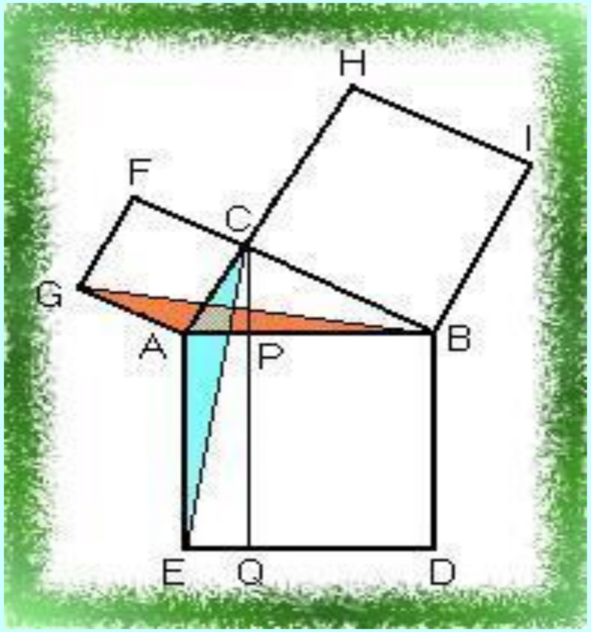
ABC-прямоугольный треугольник

Доказать:

$S_{ABDE}=S_{ACFG}+S_{BCHI}$

Доказательство:

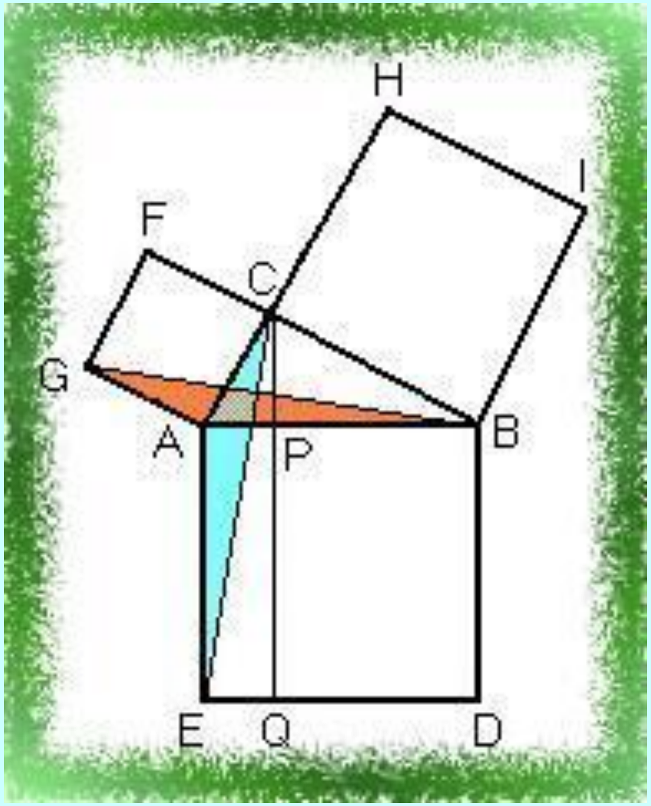
Пусть ***ABDE***-квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника ***ABC***, а ***ACFG*** и ***BCHI***-квадраты, построенные на его катетах. Опустим из вершины ***C*** прямого угла перпендикуляр ***CP*** на гипотенузу и продолжим его до пересечения со стороной ***DE*** квадрата ***ABDE*** в точке ***Q***; соединим точки ***C*** и ***E***, ***B*** и ***G***.



Очевидно, что углы ***CAE=GAB(=A+90°)***; отсюда следует, что треугольники ***ACE*** и ***AGB***(закрашенные на рисунке) равны между собой (по двум сторонам и углу, заключённому между ними). Сравним далее треугольник ***ACE*** и прямоугольник ***PQEA***; они имеют общее основание ***AE*** и высоту ***AP***, опущенную на это основание, следовательно

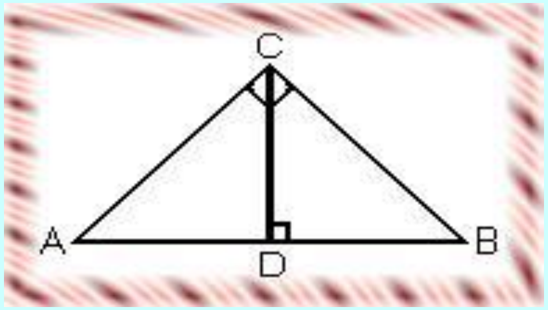
$S_{PQEA}=2S_{ACE}$

Точно так же квадрат FCAG и треугольник BAG имеют общее основание GA и высоту AC; значит, $S_{FCAG}=2S_{GAB}$



Отсюда и из равенства треугольников ACE и GBA вытекает равновеликость прямоугольника QPBD и квадрата CFGA; аналогично доказывается и равновеликость прямоугольника QPAE и квадрата CHIB. А отсюда, следует, что квадрат ABDE равновелик сумме квадратов ACFG и BCHI, т.е. теорема Пифагора.

III. Алгебраическое доказательство



Дано: *ABC*-прямоугольный треугольник

Доказать: $AB^2=AC^2+BC^2$

Доказательство:

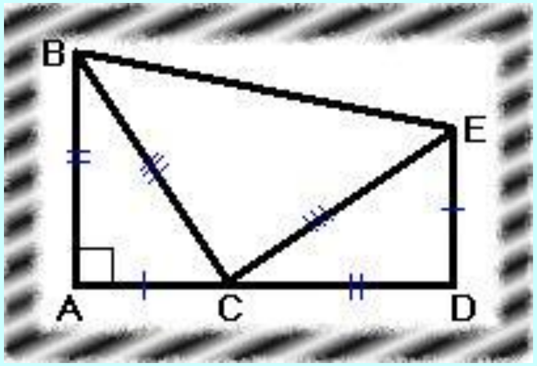
1) Проведем высоту **CD** из вершины прямого угла **C**.
2) По определению косинуса угла **cosA=AD/AC=AC/AB**, отсюда следует **AB*AD=AC^2.**
3) Аналогично **cosB=BD/BC=BC/AB**, значит **AB*BD=BC^2.**
4) Сложив полученные равенства почленно, получим:

$$AC^2+BC^2=AB*(AD+DB)$$

$$AB^2=AC^2+BC^2.$$

Что и требовалось доказать.

IV. Геометрическое доказательство



Дано: ***ABC***-прямоугольный треугольник

Доказать: $BC^2=AB^2+AC^2$

Доказательство:

1) Построим отрезок ***CD*** равный отрезку ***AB*** на продолжении катета ***AC*** прямоугольного треугольника ***ABC***. Затем опустим перпендикуляр ***ED*** к отрезку ***AD***, равный отрезку ***AC***, соединим точки ***B*** и ***E***.

2) Площадь фигуры ***ABED*** можно найти, если рассматривать её как сумму площадей трёх треугольников:

$$S_{ABED}=2*AB*AC/2+BC^2/2$$

3) Фигура ***ABED*** является трапецией, значит, её площадь равна:

$$S_{ABED}= (DE+AB)*AD/2.$$

4) Если приравнять левые части найденных выражений, то получим:

$AB*AC+BC^2/2=(DE+AB)(CD+AC)/2$

$AB*AC+BC^2/2= (AC+AB)^2/2$

$AB*AC+BC^2/2= AC^2/2+AB^2/2+AB*AC$

$BC^2=AB^2+AC^2.$

Это доказательство было опубликовано в 1882 году Гэрфилдом.

Значение теоремы Пифагора

Теорема Пифагора- это одна из самых важных теорем геометрии. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем геометрии.

Доказательство теоремы Пифагора учащиеся средних веков считали очень трудным и называли его Dons asinorum - ослиный мост, или elefuga - бегство «убогих», так как некоторые «убогие» ученики, не имевшие серьезной математической подготовки, бежали от геометрии. Слабые ученики, заучившие теоремы наизусть, без понимания, и прозванные поэтому «ослами», были не в состоянии преодолеть теорему Пифагора, служившую для них вроде непреодолимого моста. Из-за чертежей, сопровождающих теорему Пифагора, учащиеся называли ее также «ветряной мельницей», составляли стихи, вроде «Пифагоровы штаны на все стороны равны», рисовали карикатуры.