

Неориентированный граф

Задачи на «кратчайшее
расстояние»

ДЕМО 2013: A2, B9

2015: №5

Графы

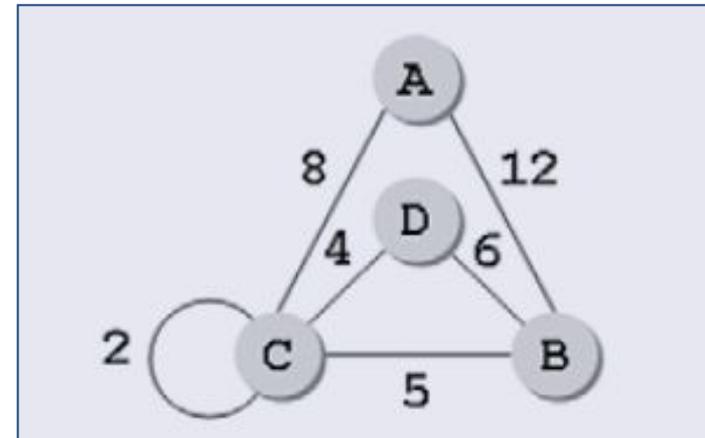
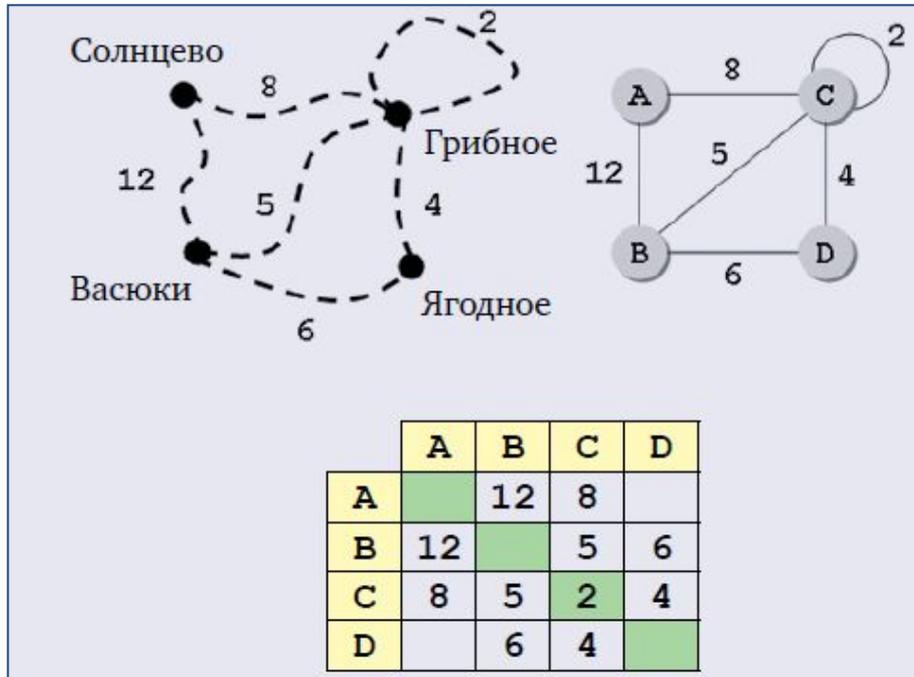
I. два варианта значения слова “граф”:

- 1) удобная форма описания структур типа дорожной сети или сети передачи данных;
- 2) математический объект $G := (V, E)$, где V — это непустое множество вершин, а E — множество ребер (пар вершин).

Для описания графа часто используют квадратную таблицу, которая описывает все возможные связи между узлами (без учета дублирования).

Если, например, на пересечении строки **A** и столбца **B** записано число **1**, это означает, что есть ребро, соединяющее вершины **A** и **B**; число **0** в этой ячейке означает, что такого ребра нет. Такую таблицу называют **матрицей смежности**.

A2 и A13 на графы



“Длину” связей между вершинами называют “весом”.
Весовая матрица

Единица на главной диагонали (выделенной зеленым цветом) показывает, что в графе есть *петля* —ребро, которое начинается и заканчивается в одной и той же вершине.

Неориентированный граф — ребра не имеют направления и каждое из них учтено в матрице смежности дважды.

A2 и A13 на графы

Вопросы и задачи:

1) Как по весовой матрице графа определить количество ребер (количество петель)?

2) Как можно обозначить отсутствие связи между вершинами при хранении весовой матрицы в памяти реального компьютера (рассмотрите разные варианты)?

3) Для каждой приведенной ниже весовой матрицы:

- определите вес ребра между вершинами В и D (если оно есть);

- предполагая, что веса ребер обозначают расстояния между вершинами, определите длину пути **ABDCEA**;

- укажите, какой из трех путей — **ABDC**, **ADEC** или **AEBC** — самый короткий, а какой самый длинный;

	A	B	C	D
A		4		5
B	4		3	6
C		3		
D	5	6		

а)

	A	B	C	D	E
A		4	3	8	7
B	4		4	2	2
C	3	4		6	3
D	2	2	6		1
E	7	8	3	1	

б)

	A	B	C	D	E
A		2	5	7	6
B	2		1	3	4
C	5	1		9	8
D	7	3	9		1
E	6	4	8	1	

в)

	A	B	C	D	E
A		1	2	3	9
B	1		5	4	1
C	2	5		5	6
D	3	4	5		7
E	9	1	6	7	

г)

	A	B	C	D	E
A		5	2	1	6
B	5		3	7	2
C	2	3		4	9
D	1	7	4		8
E	6	2	9	8	

Задача на «кратчайшее расстояние»

ДЕМО

2013

A2

Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		3				
B	3		7	4	7	
C		7			5	
D		4			2	
E		7	5	2		3
F					3	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

1) 11

2) 12

3) 13

4) 18

А2. Задача на «кратчайшее расстояние»

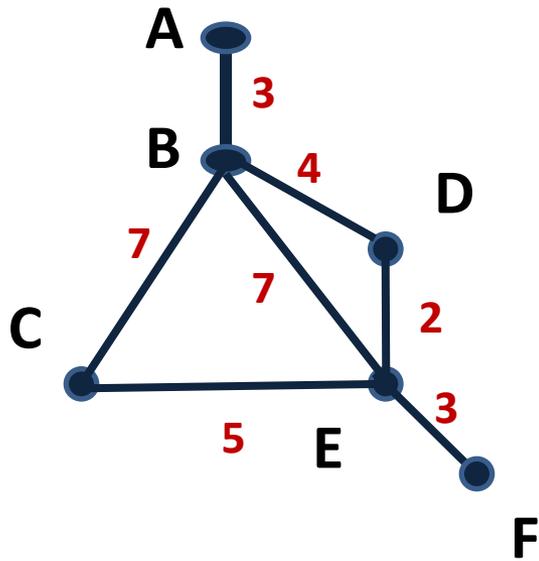
способы решения

Способ 1. Построение графа

1. Анализ весовой матрицы и количества ребер.

$AB=3$, $BC=7$, $BD=4$, $BE=7$, $CE=5$, $DE=2$, $EF=3$

2. Построение графа.



A2 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		3				
B	3		7	4	7	
C		7			5	
D		4			2	
E		7	5	2		3
F					3	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

1) 11 2) 12 3) 13 4) 18

3. Перебор путей из A в F.

$ABCEF=3+7+5+3=18$

$ABDEF=3+4+2+3=12$

$ABEF=3+7+3=13$

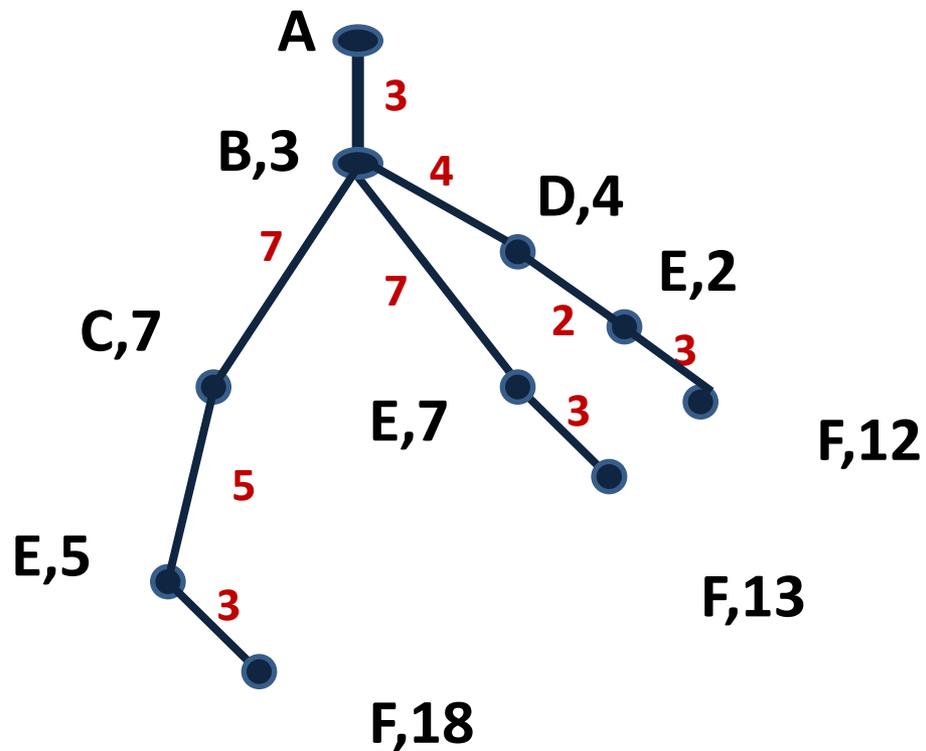
(лексикографический порядок)

А2. Задача на «кратчайшее расстояние»

способы решения

Способ 2. Построение дерева возможных путей

1. Определение вершины.
2. Построение графа.



A2 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		3				
B	3		7	4	7	
C		7			5	
D		4			2	
E		7	5	2		3
F					3	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

- 1) 11 2) 12 3) 13 4) 18

3. Ответ
ABDEF=12

А2. Задача на «кратчайшее расстояние»

способы решения

Способ 3. Перебор возможных путей без построения дерева

1. Все ребра от вершины А.
 $AB=3$

2. Все ребра из В (3 ребра).
 $ABC=3+7=10$
 $ABD=3+4=7$
 $ABE=3+7=10$

3. Все ребра из вершин С, D, Е (3 ребра).
 $ABCD=10+2=12$
 $ABDE=7+2=9$
 $ABEF=10+3=13$ – цель достигнута

4. Все ребра из вершин D,Е (4 ребра).
 $ABCDE=12+2=14$
 $ABDEF=9+3=12$ – цель достигнута

5. Ребра из вершины Е (5 ребер)
 $ABCDEF=14+3=17$ – цель д-а
Можно было не рассматривать, см. п.4. очевидно.

A2

Между населёнными пунктами А, В, С, D, Е, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		3				
B	3		7	4	7	
C		7			5	
D		4			2	
E		7	5	2		3
F					3	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

1) 11

2) 12

3) 13

4) 18

А2. Задача на «кратчайшее расстояние»

способы решения

Способ 4. Использование алгоритма Дейкстры.

Описание в статье К.Полякова на сайте

<http://kpolyakov.narod.ru/download/in-f-2012-03b.pdf>

A2 Между населёнными пунктами А, В, С, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A		3				
B	3		7	4	7	
C		7			5	
D		4			2	
E		7	5	2		3
F					3	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами А и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

- 1) 11 2) 12 3) 13 4) 18

5

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: _____.

Демо 2015, №5. Задача на «кратчайшее расстояние»

Способ 1. Построение графа.

5

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

1. Анализ весовой матрицы и количества ребер.

$AB=5$, $AD=12$, $AG=25$,
 $BD=8$,
 $CD=2$, $CE=4$, $CF=5$, $CG=10$,
 $EG=5$,
 $FG=5$

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: _____.

2. Построение графа.

3. Перебор путей

Демо 2015, №5. Задача на «кратчайшее расстояние»

Способ 1. Построение графа.

1. Анализ весовой матрицы и количества ребер.

$AB=5$, $AD=12$, $AG=25$,

$BD=8$,

$CD=2$, $CE=4$, $CF=5$, $CG=10$,

$EG=5$,

$FG=5$

3. Перебор путей:

3.1

$ABD=5+8=13$

$AD=12$

$AG=25$

3.2

$DCEG=2+4+5=11$

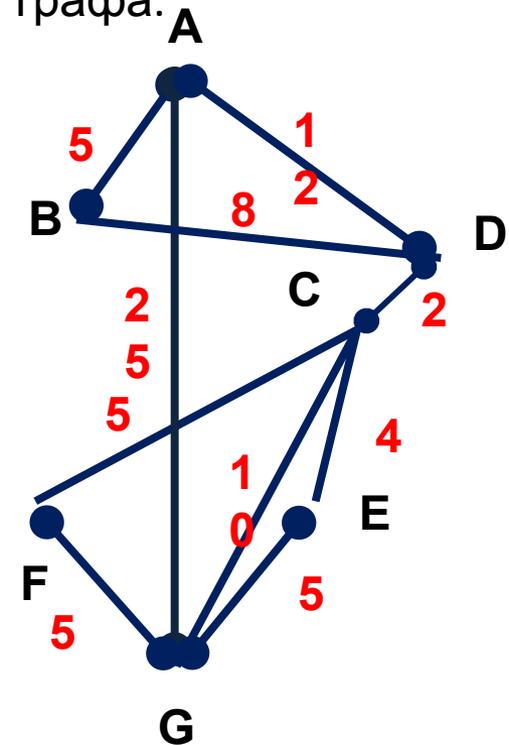
$DCG=2+10=12$

$DCFG=2+5+5=12$

3.3

$AD+DCEG=12+11=23$

2. Построение графа.



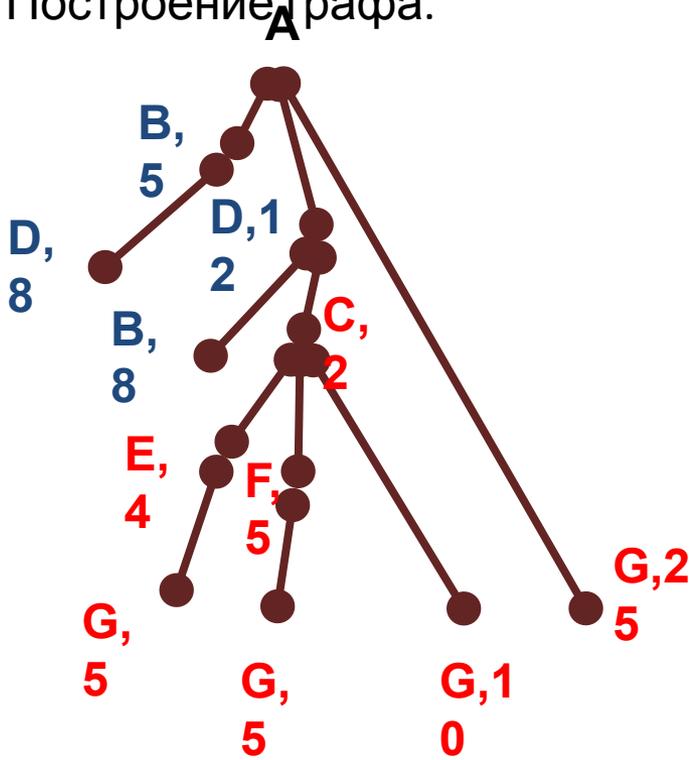
$ADCEG$

Демо 2015, №5. Задача на «кратчайшее расстояние»

Способ 2. Построение дерева

3. Определение путей

1. Определение вершины
2. Построение графа.



5

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

Ответ: _____

3. Перебор путей:

$$\underline{AD_{12}C_2E_4G_5=12+2+4+5=23}$$

$$AD_{12}C_2FG_5=12+2+5+5=24$$

$$AD_{12}C_2G_{10}=12+2+10=24$$

$$AG_{25}=25$$

Задача на «кратчайшее расстояние» тренировочные задачи

Задачи для тренировки

Между населенными пунктами А, В, С, D, E, F построены дороги, протяженность которых приведена в таблице. Отсутствие числа в ячейке таблицы означает, что прямой дороги между пунктами нет. Определите длину кратчайшего пути между пунк-

г) (источник — <http://ege.yandex.ru>, ответ: 15)

	A	B	C	D	E	F
A			3			
B			9		4	
C	3	9		3	8	
D			3		2	
E		4	8	2		7
F					7	

д) (ответ: 18)

	A	B	C	D	E	F
A			2			
B			6		3	
C	2	6		5	7	
D			5		4	
E		3	7	4		9
F					9	

тами А и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

а) (демонстрационный вариант ЕГЭ, ответ: 9)

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

б) (ответ: 17)

	A	B	C	D	E	F
A		5				
B	5		9	3	8	
C		9			4	
D		3			2	
E		8	4	2		7
F					7	

Задача на «кратчайшее расстояние»

18. В таблице приведены итоги шахматного турнира:

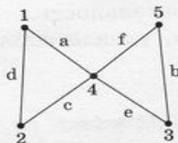
Участники	Антонов	Беляев	Валиев	Григорьев
Антонов	0	1/2	1	1/2
Беляев	1/2	0	1/2	0
Валиев	0	1/2	0	1
Григорьев	1/2	1	0	0

Кто является победителем турнира?

- 1) Антонов
- 2) Беляев
- 3) Валиев
- 4) Григорьев

ответ 1

19. Дан граф:



ответ 3

Выберите его табличное представление.

1)

	1	2	3	4	5
1		a		b	
2	a			c	
3				f	d
4	b	c	f		e
5			d	e	

2)

	1	2	3	4	5
1		a		b	
2	a			c	
3				f	d
4	b	c	f		e
5			d	e	

3)

	1	2	3	4	5
1		d		a	
2	d			c	
3				e	b
4	a	c	e		f
5			b	f	

4)

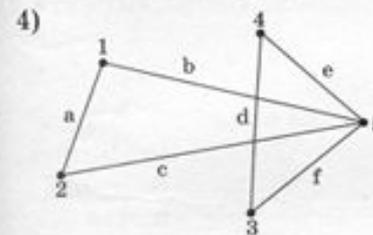
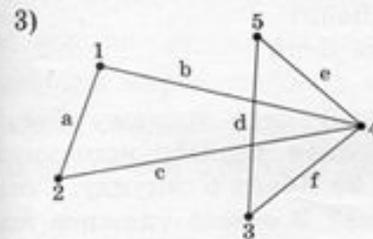
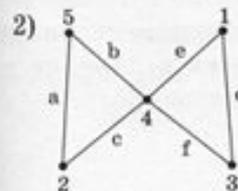
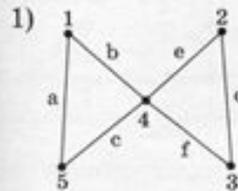
	1	2	3	4	5
1	a	a		b	
2				c	
3				f	d
4	b	c	f	d	e
5				e	

20. Дано следующее описание графа:

$a(2, 5)$ $b(4, 5)$ $c(2, 4)$ $d(1, 3)$ $e(1, 4)$ $f(3, 4)$

Укажите его графическое представление

ответ 2



► Во второй части экзаменационной работы располагаются задачи, на решение которых необходимо выделить самостоятельно

Задача на «кратчайшее расстояние» тренировочные задачи

9. Грунтовая дорога проходит последовательно через прибрежные населенные пункты А, В, С и D. При этом длина дороги между А и В равна 15 км, между В и С — 45 км и между С и D — 20 км. Расстояние по воде между А и D 60 км, и работает паромное сообщение. Оцените минимально возможное время движения велосипедиста из пункта А в пункт С, если его скорость по грунтовой дороге 20 км/час, а паром (которым можно воспользоваться) движется со скоростью 40 км/час.

- 1) 1,5 часа
- 2) 2 часа
- 3) 2,5 часа
- 4) 3 часа

ответ 3

10. Шоссе проходит последовательно через населенные пункты А, В, С и D. При этом длина дороги между А и В равна 15 км, между В и С — 10 км, между С и D — 5 км, а по реке между А и D — 20 км. Путешественник может идти пешком со скоростью 5 км/час или дополнительно воспользоваться лодкой, движущейся со скоростью 10 км/час. Оцените минимально возможное время движения путешественника из пункта А в пункт С.

- 1) 1,5 часа
- 2) 2,5 часа
- 3) 3 часа
- 4) 3,5 часа

ответ 2

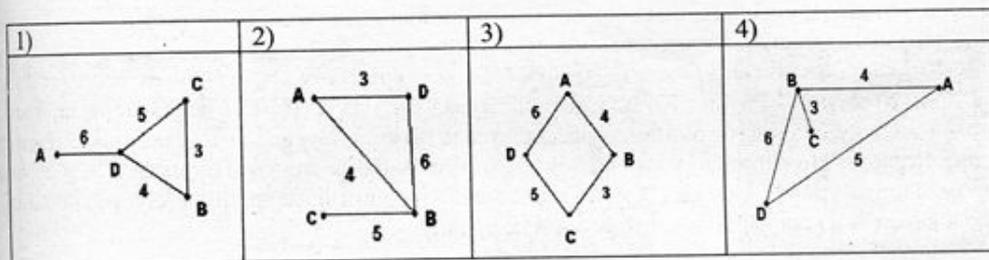
1.4. Моделирование

1.120

В таблице приведена стоимость перевозок между соседними железнодорожными станциями. Укажите схему, соответствующую таблице.

	A	B	C	D
A		4		6
B	4		3	
C		3		5
D	6		5	

ответ 3

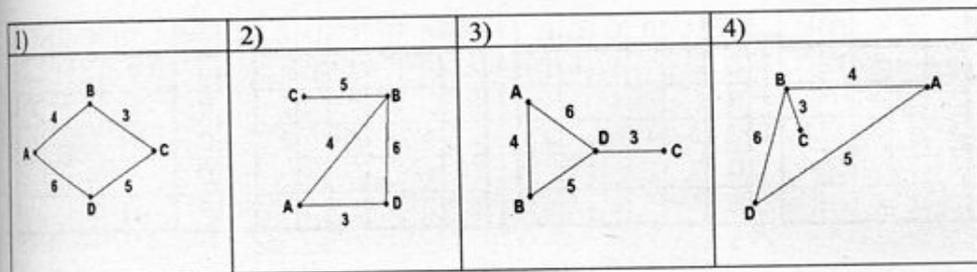


1.121

В таблице приведена стоимость перевозок между соседними железнодорожными станциями. Укажите схему, соответствующую таблице.

	A	B	C	D
A		4		5
B	4		3	6
C		3		
D	5	6		

ответ 4



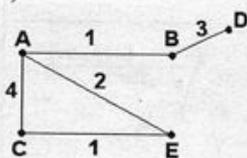
1.122

В таблице приведена стоимость перевозок между соседними железнодорожными станциями. Укажите схему, соответствующую таблице.

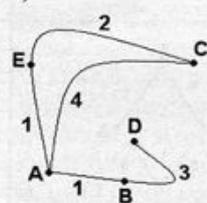
	A	B	C	D	E
A		1	4		1
B	1			3	
C	4				2
D		3			
E	1		2		

ответ 2

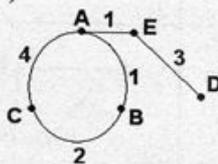
1)



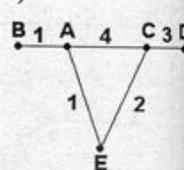
2)



3)



4)



1.123

Таблица стоимости перевозок устроена следующим образом: числа, стоящие на пересечении строк и столбцов таблиц означают стоимость проезда между соответствующими соседними станциями. Если пересечение строки и столбца пусто, то станции не являются соседними.

Укажите таблицу, для которой выполняется условие: "Минимальная стоимость проезда из A в B не больше 6".

Стоимость проезда по маршруту складывается из стоимостей проезда между соответствующими соседними станциями.

ответ 3

1)	2)	3)	4)																																																																																																																																																
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td>2</td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td>2</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td>2</td> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	A			3	1		B			4	2		C	3	4			2	D	1					E		2	2			<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td>3</td> <td>1</td> <td>1</td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td>2</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>E</th> <td>1</td> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	A			3	1	1	B			4			C	3	4			2	D	1					E	1	2				<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td>3</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td>2</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	A			3	1		B			4	1		C	3	4			2	D	1					E		1	2			<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>E</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>A</th> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>B</th> <td></td> <td></td> <td>4</td> <td>1</td> <td></td> </tr> <tr> <th>C</th> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> <tr> <th>D</th> <td>1</td> <td></td> <td>4</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>E</th> <td></td> <td>1</td> <td>2</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		A	B	C	D	E	A				1		B			4	1		C		4		4	2	D	1		4			E		1	2		
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1																																																																																																																																															
B			4	2																																																																																																																																															
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E		2	2																																																																																																																																																
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1	1																																																																																																																																														
B			4																																																																																																																																																
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E	1	2																																																																																																																																																	
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A			3	1																																																																																																																																															
B			4	1																																																																																																																																															
C	3	4			2																																																																																																																																														
D	1																																																																																																																																																		
E		1	2																																																																																																																																																
	A	B	C	D	E																																																																																																																																														
A				1																																																																																																																																															
B			4	1																																																																																																																																															
C		4		4	2																																																																																																																																														
D	1		4																																																																																																																																																
E		1	2																																																																																																																																																

1.124

Между четырьмя крупными аэропортами, обозначенными кодами BOK, EDT, LAA и SAK, ежедневно выполняются авиарейсы. Приведён фрагмент расписания перелётов между этими аэропортами:

Аэропорт вылета	Аэропорт прилета	Время вылета	Время прилета
BOK	EDT	03:10	05:15
SAK	EDT	03:35	05:40
SAK	BOK	07:30	11:30
LAA	BOK	10:15	12:45
BOK	LAA	10:40	15:05
SAK	LAA	11:20	13:25
BOK	SAK	13:35	17:25
EDT	BOK	14:20	16:20
LAA	SAK	14:50	16:30
EDT	SAK	15:55	18:10

Путешественник находится в аэропорту BOK в полночь (0:00). Определите самое раннее время, когда он может оказаться в аэропорту SAK.

ответ 3

- 1) 11:30 2) 16:30 3) 17:25 4) 18:10

A1 Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.)

	A	B	C	D	E	F
A			6	3		
B			1			1
C	6	1		2	5	5
D	3		2		4	
E			5	4		
F		1	5			

Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и F (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

- 1) 7
2) 8
3) 10
4) 11

Задача на «кратчайшее расстояние» тренировочные задачи

Открытый банк заданий ГИА:

<http://opengia.ru/subjects/informatics-11/topics/1>

Задание №12f4c6

Задание №085029

Задание №049386

Задание №02f448

Задание №14F165

Задание №202015

Задание №2D7F6D

Задание №42bfcc

...