

# ПРОИЗВОДНАЯ И ЕГЭ

*“При изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила”*

*Ньютон*

*“Примеры учат больше, чем теория”*

*Ломоносов*

# Геометрический смысл производной



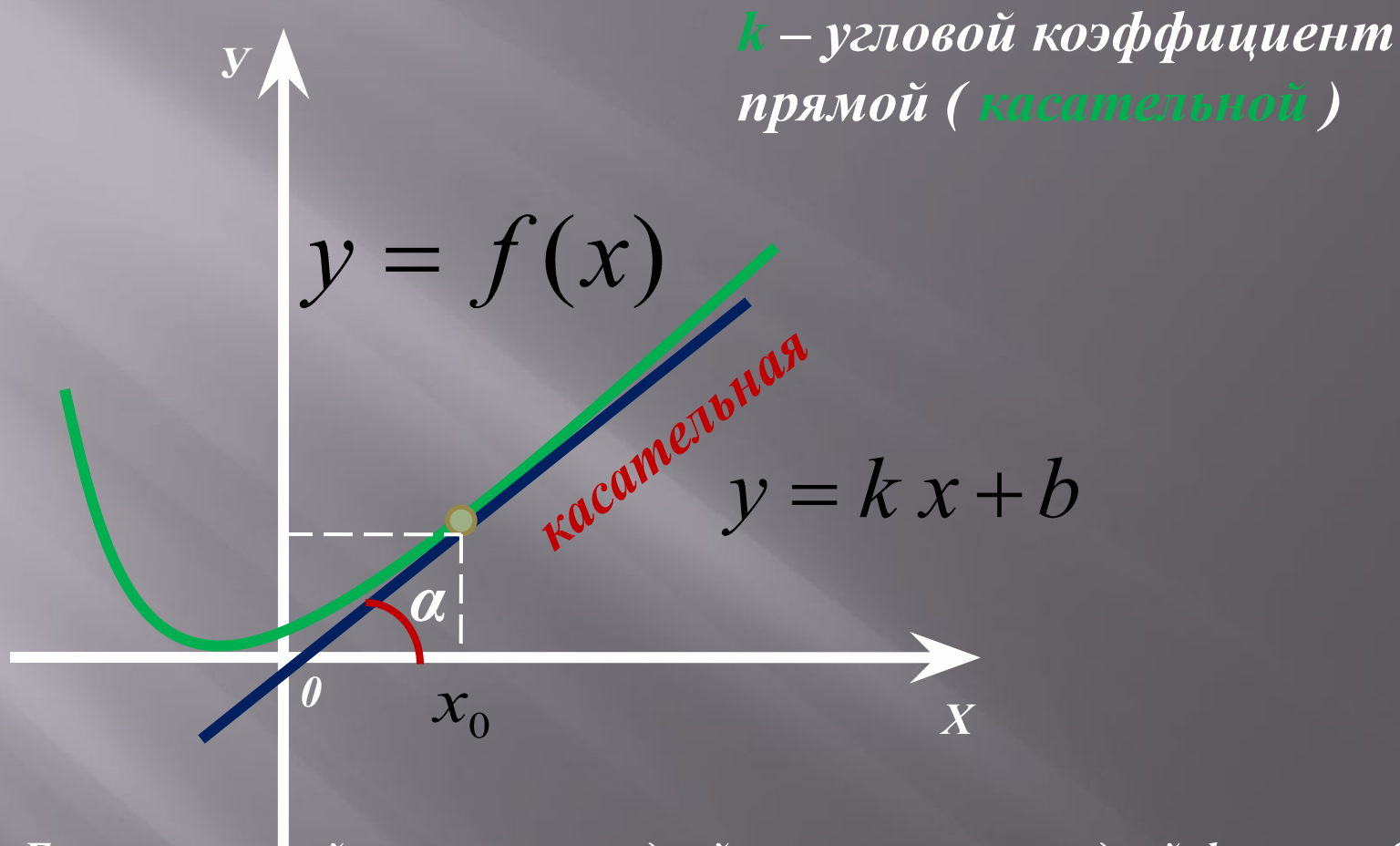
ц

Готфрид  
Вильгельм  
Лейбниц  
(1646-1716)

# Механический смысл производной

*Исаак Ньютон*  
*(1643 – 1727)*





Геометрический смысл производной: значение производной функции  $f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0; f(x_0))$ , т.е.  $f'(x_0) = k$

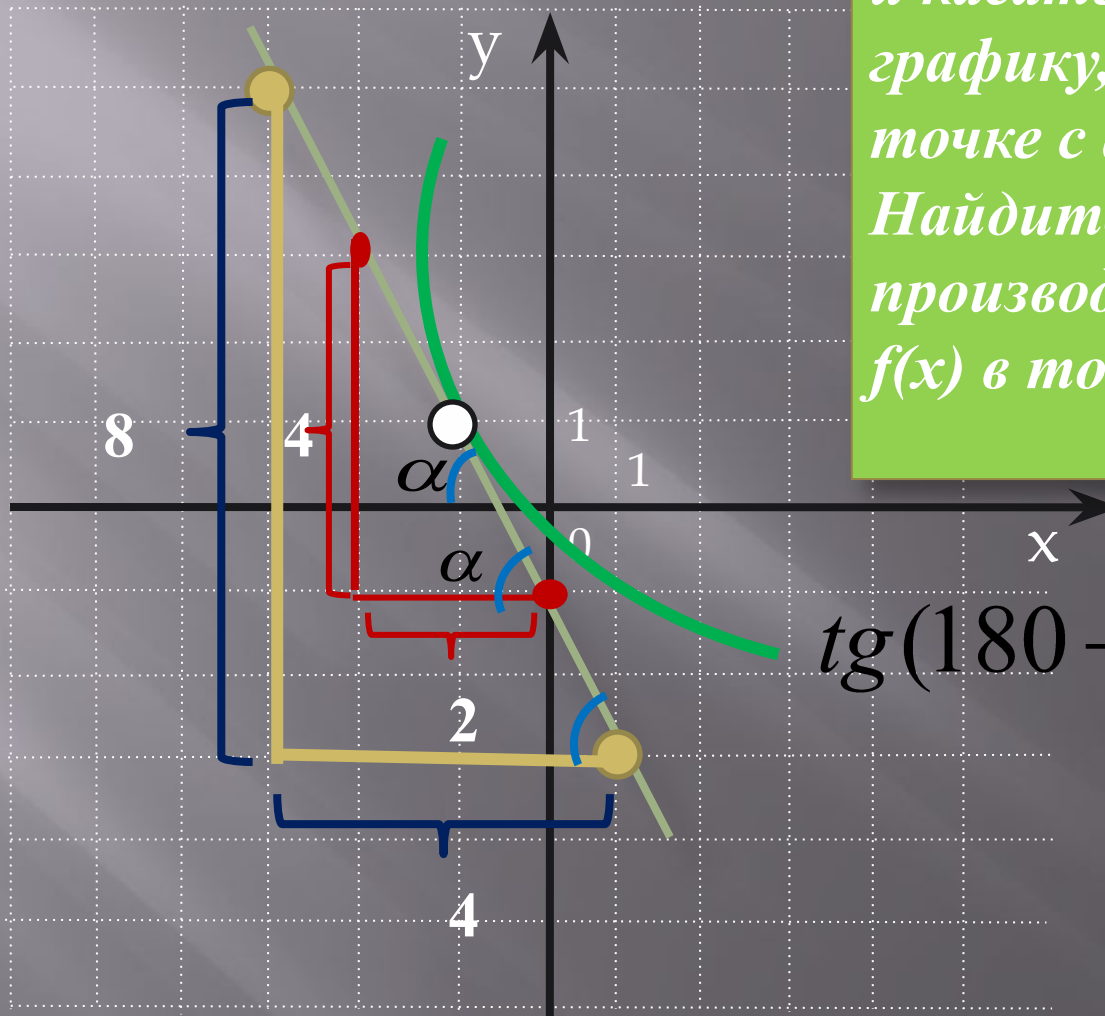
Поскольку  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , то верно равенство  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$

□ *Острый или тупой угол образует касательная к графику функции в точке  $x_0$  с положительной полуосью  $Ox$ ?*

□ *Чему равен тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = x^2 + 2$  в точке  $x_0 = -1$ ?*

# Задание №1

На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой  $-1$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0 = -1$ .



$$\operatorname{tg}(180 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$$

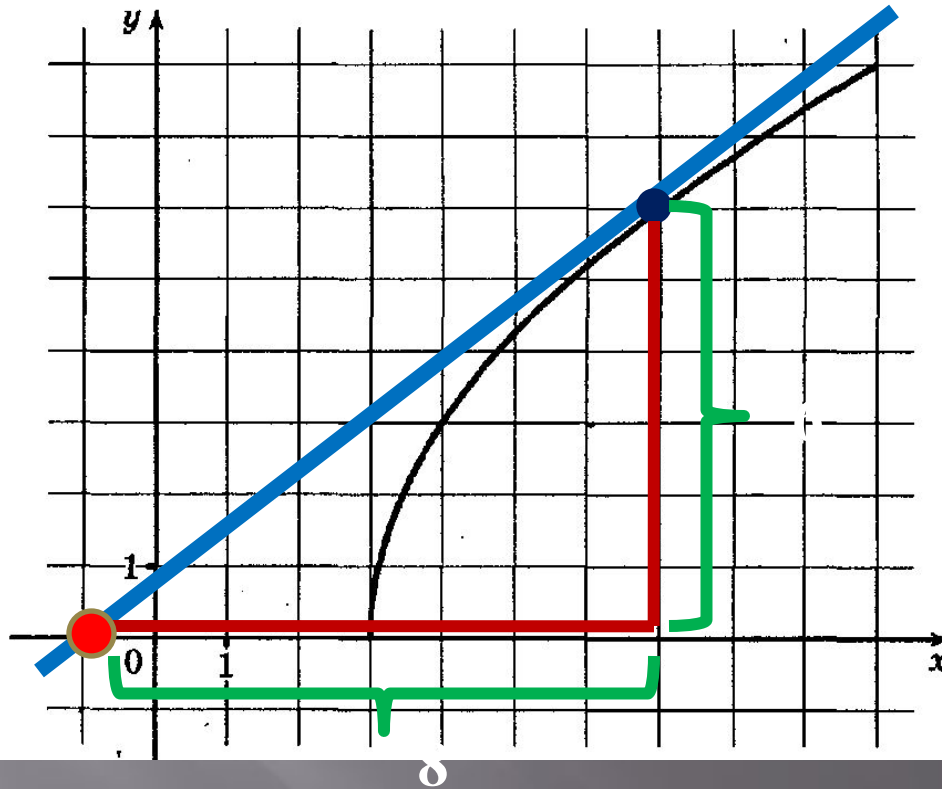
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{2}$$

$$f'(x_0) = -2$$



## Задание №2

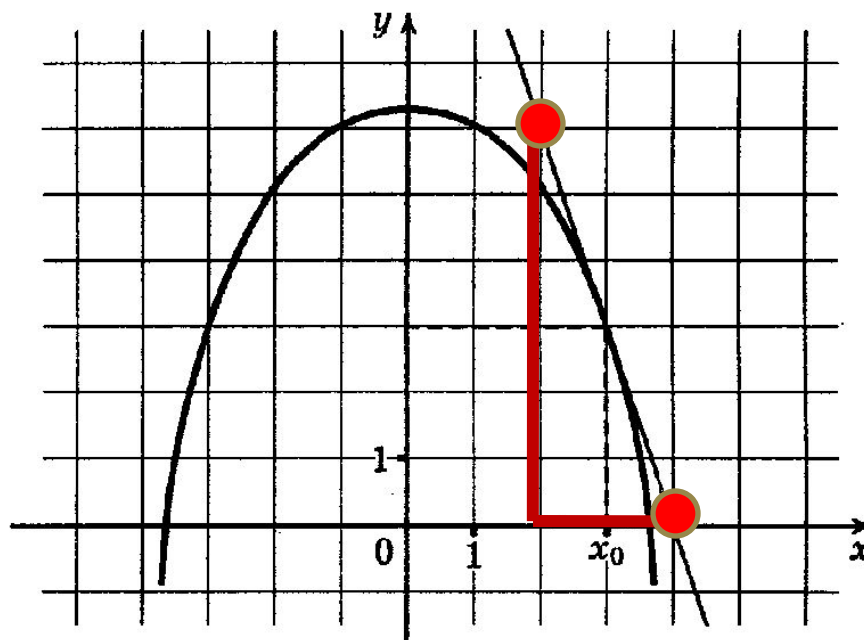
На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Прямая, проходящая через точку  $(-1; 0)$ , касается графика этой функции в точке с абсциссой 7. Найдите  $f'(7)$ .



Ответ: В 8 0 , 7 5

## Задание №3

На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной  $f'(x)$  в точке  $x_0$ .

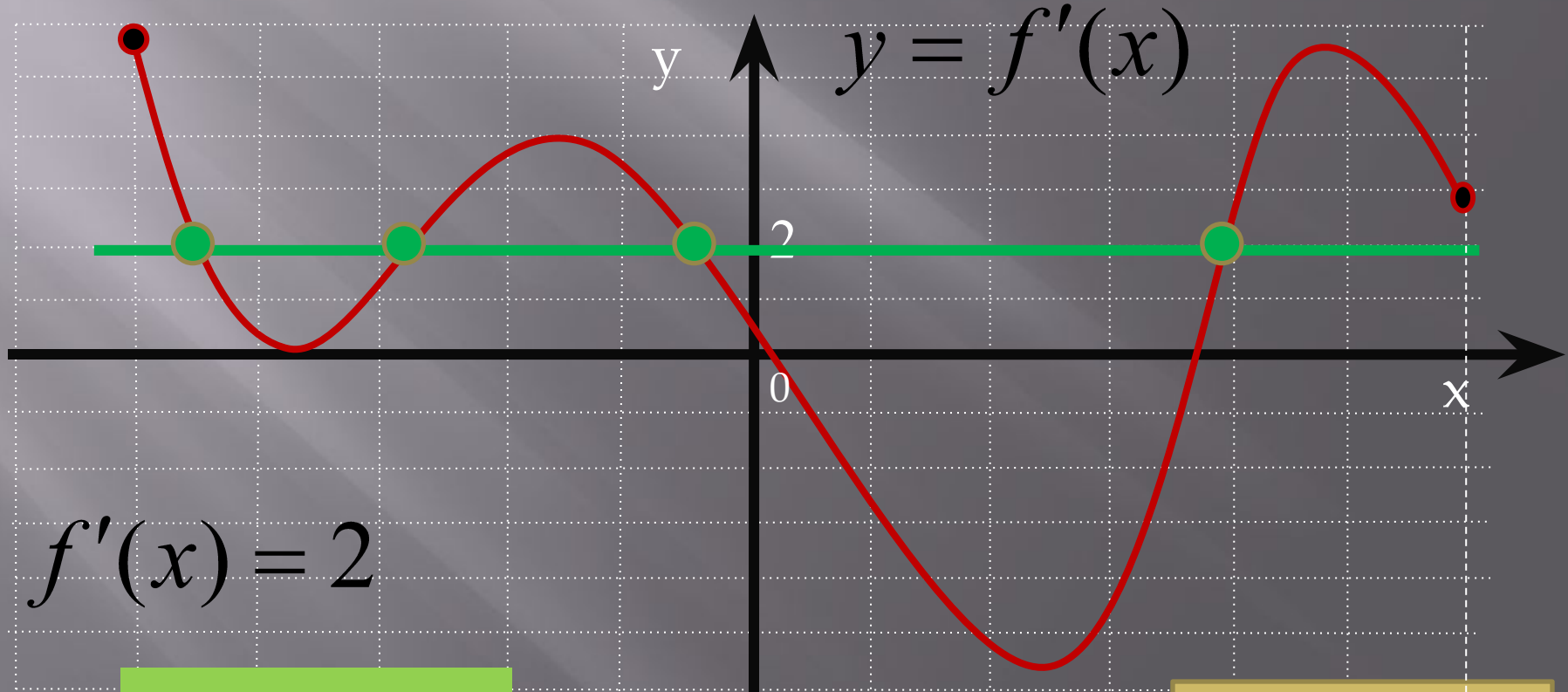


Ответ: В 8 - 3



## Задание №4

На рисунке изображён график производной функции  $y = f'(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 6)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 5$  или совпадает с ней.



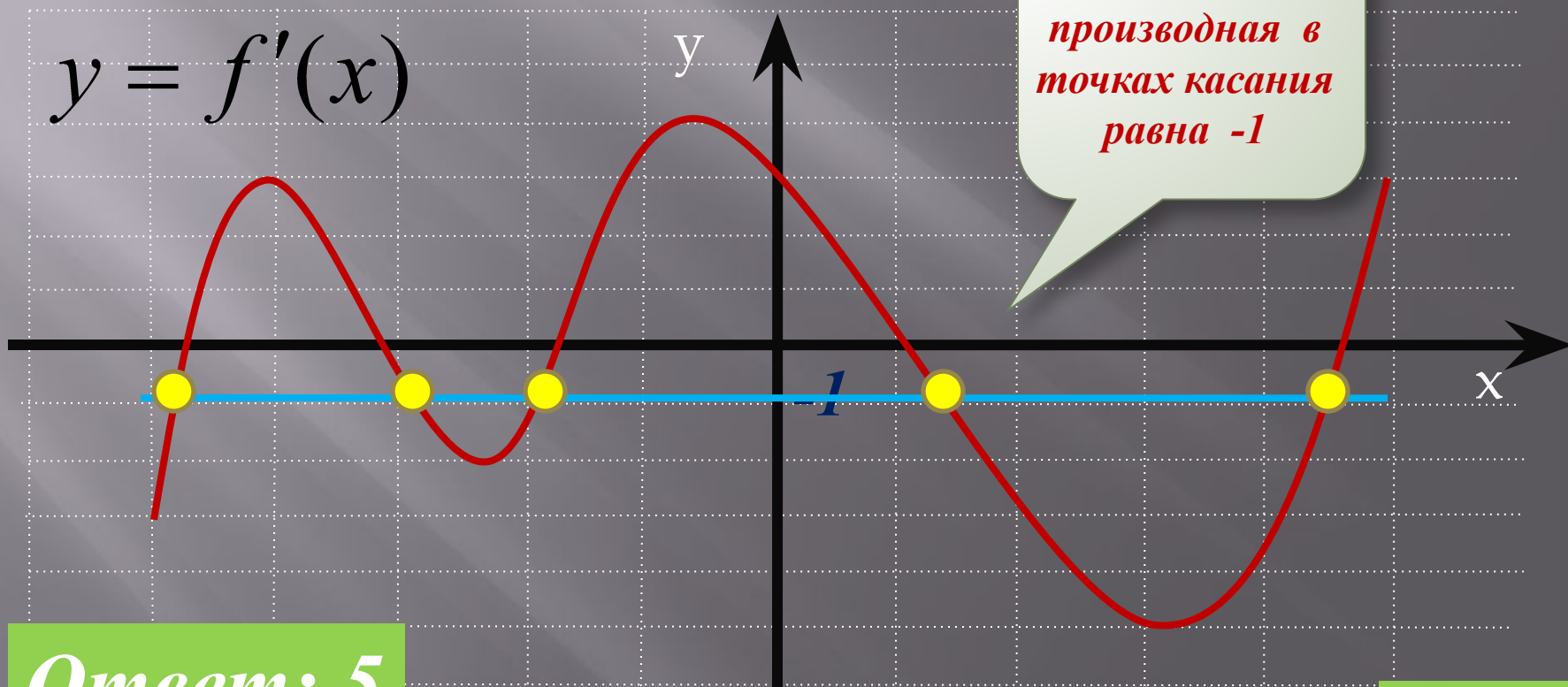
$$f'(x) = 2$$

Ответ: 4

ПОДСКАЗКА

## Задание №5

К графику функции  $y = f(x)$  провели касательные под углом  $135^\circ$  к положительному направлению оси  $Ox$ . На рисунке изображён график производной функции. Укажите количество точек касания.

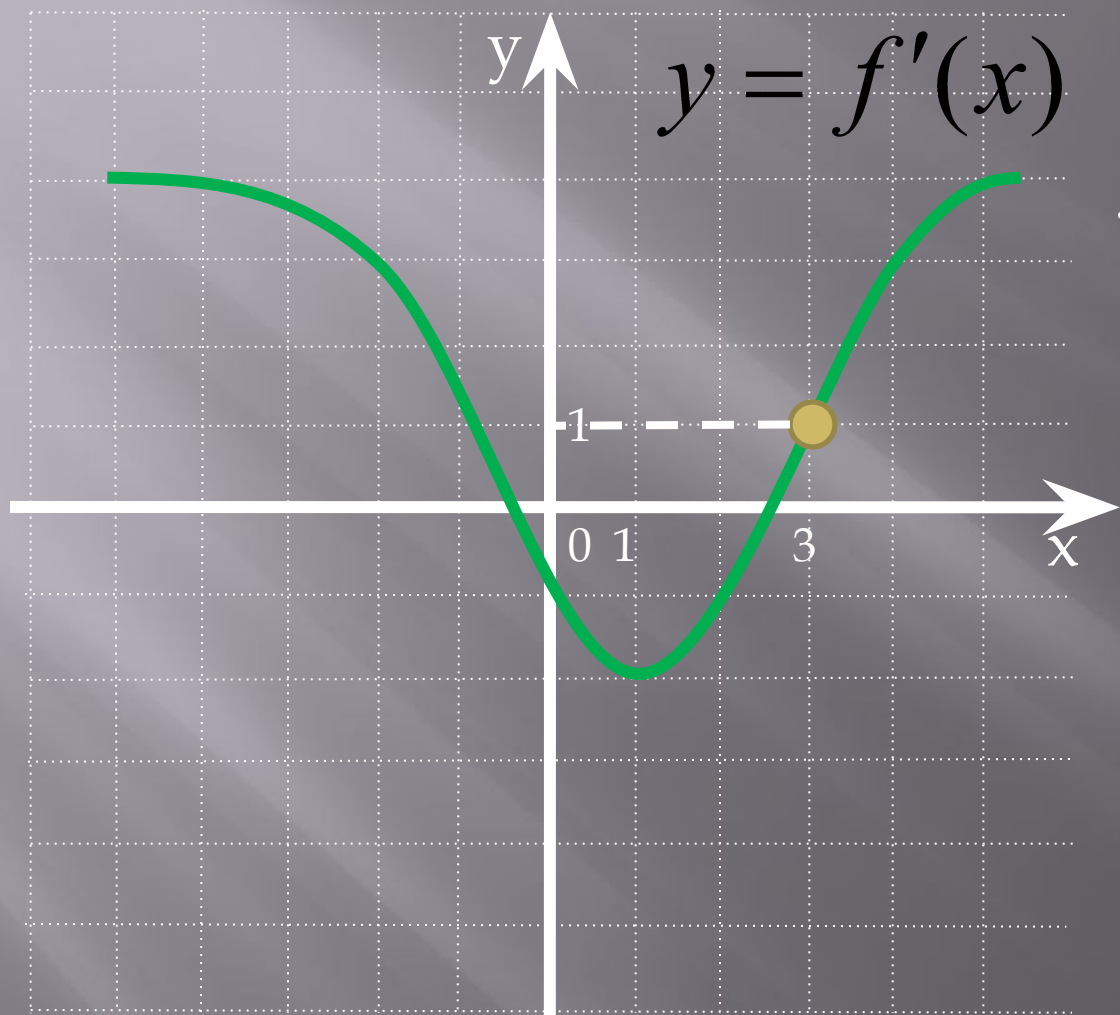


Ответ: 5

подсказк

а

## Задание №6



К графику функции  $y = f(x)$  проведена касательная в точке с абсциссой  $x_0 = 3$ . Определите градусную меру угла наклона касательной, если на рисунке изображён график производной этой функции.

$$f'(x_0) = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1$$

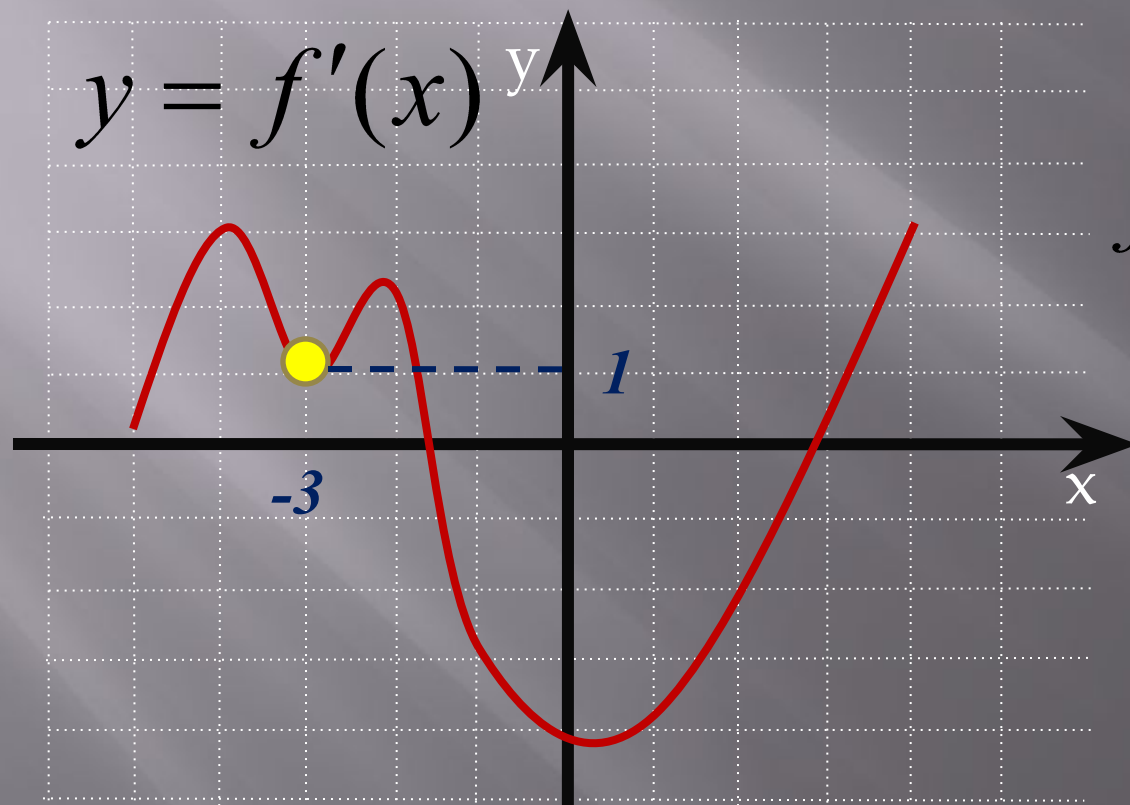
$$\alpha = 45^\circ$$

Ответ:

В8 4 5

## Задание №7

По графику производной функции определите величину угла в градусах между положительным направлением оси  $Ox$  и касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0 = -3$ .



$$f'(-3) = 1 = \operatorname{tg} \alpha$$

Ответ:

В8 4 5

## Задание №8

Прямая  $y = 8x + 11$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 7x - 7$ . Найдите абсциссу точки касания.

В8 0 , 5

Ответ:

подсказка

## Задание №9

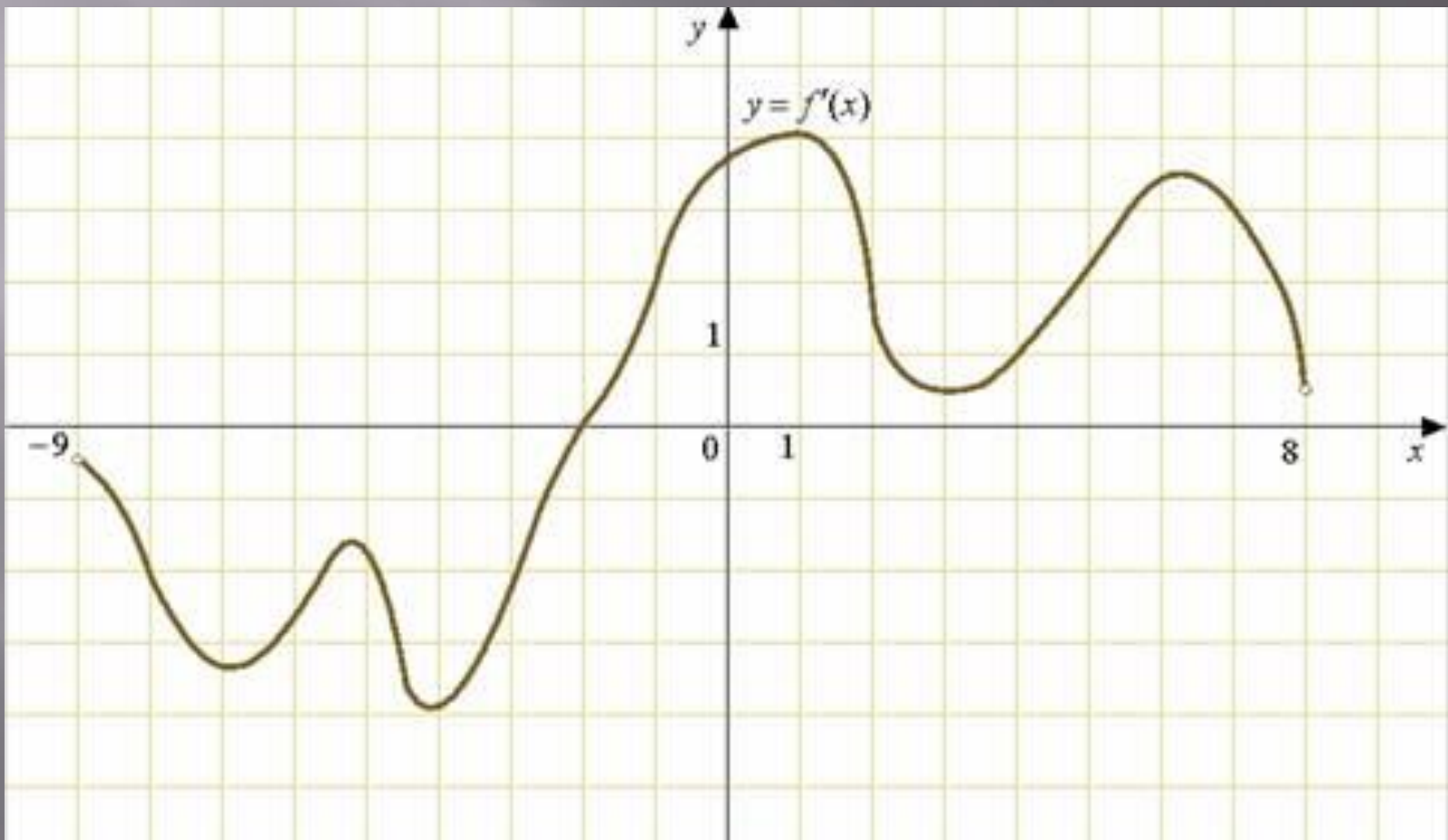
Прямая  $y = -4x - 11$  является касательной к графику функции  $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$ . Найдите абсциссу точки касания.

В8 - 1

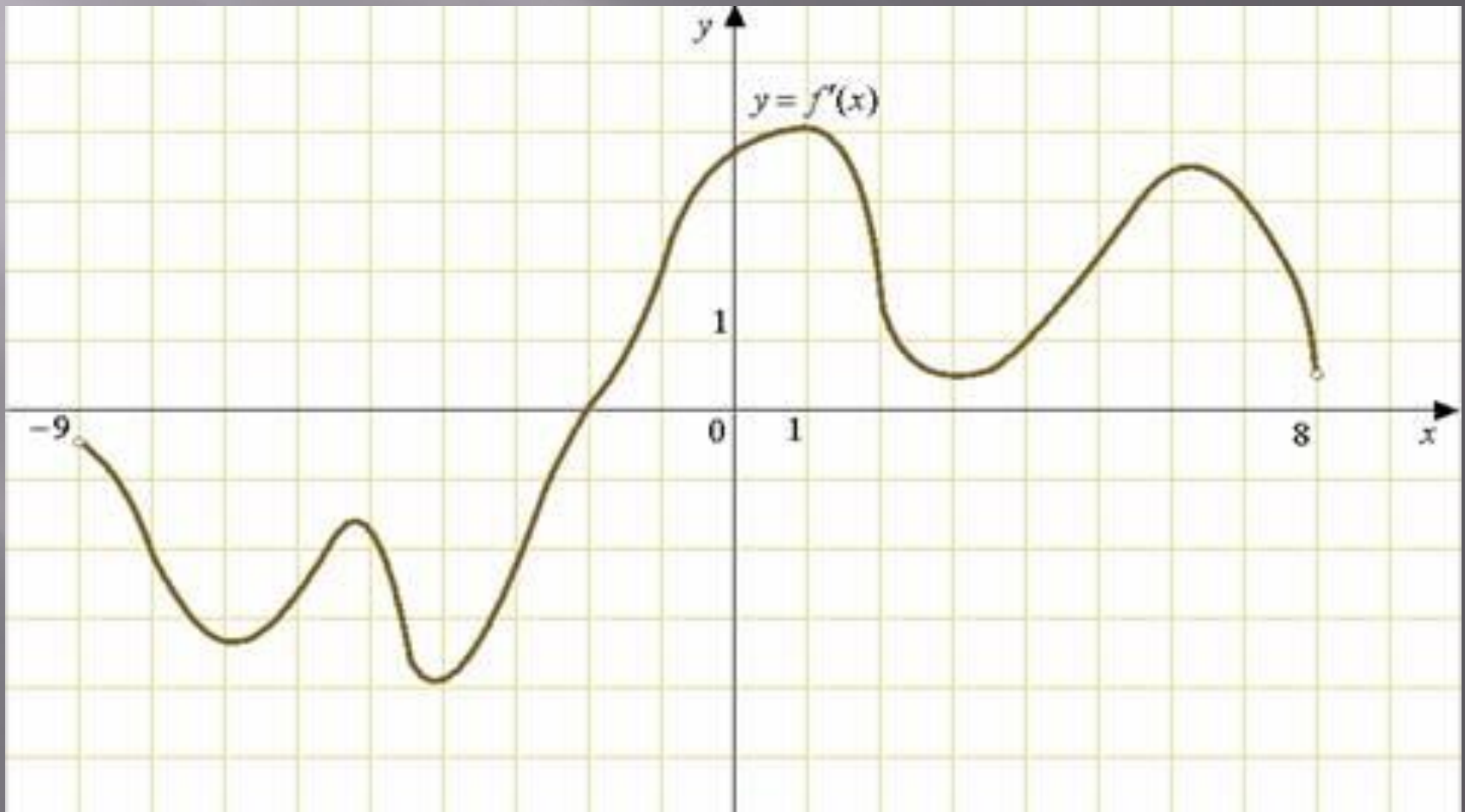
Ответ:

подсказка

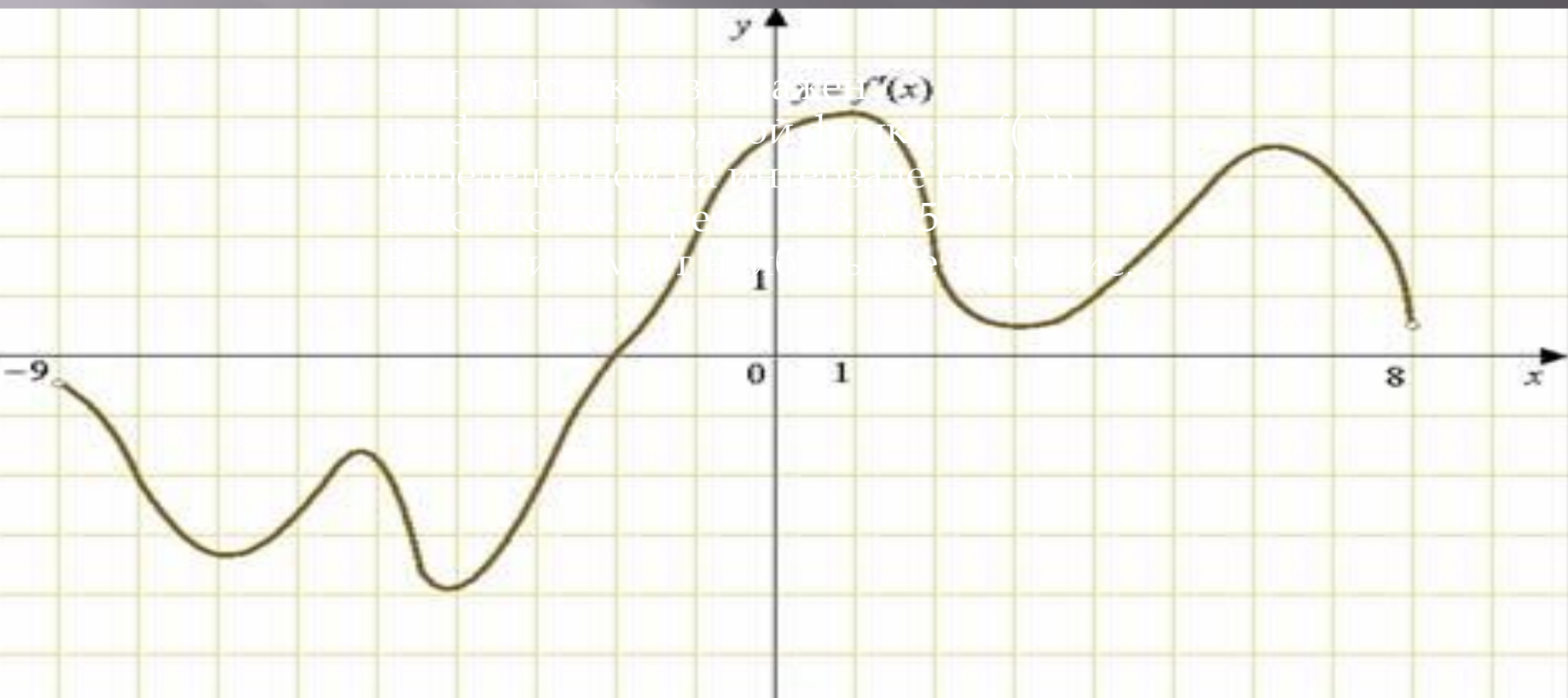
1. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9;8)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y=x-7$  или совпадает с ней.



2. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9;8)$ .. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $f(x)$  параллельна прямой  $y=-x+8$  или совпадает с ней.

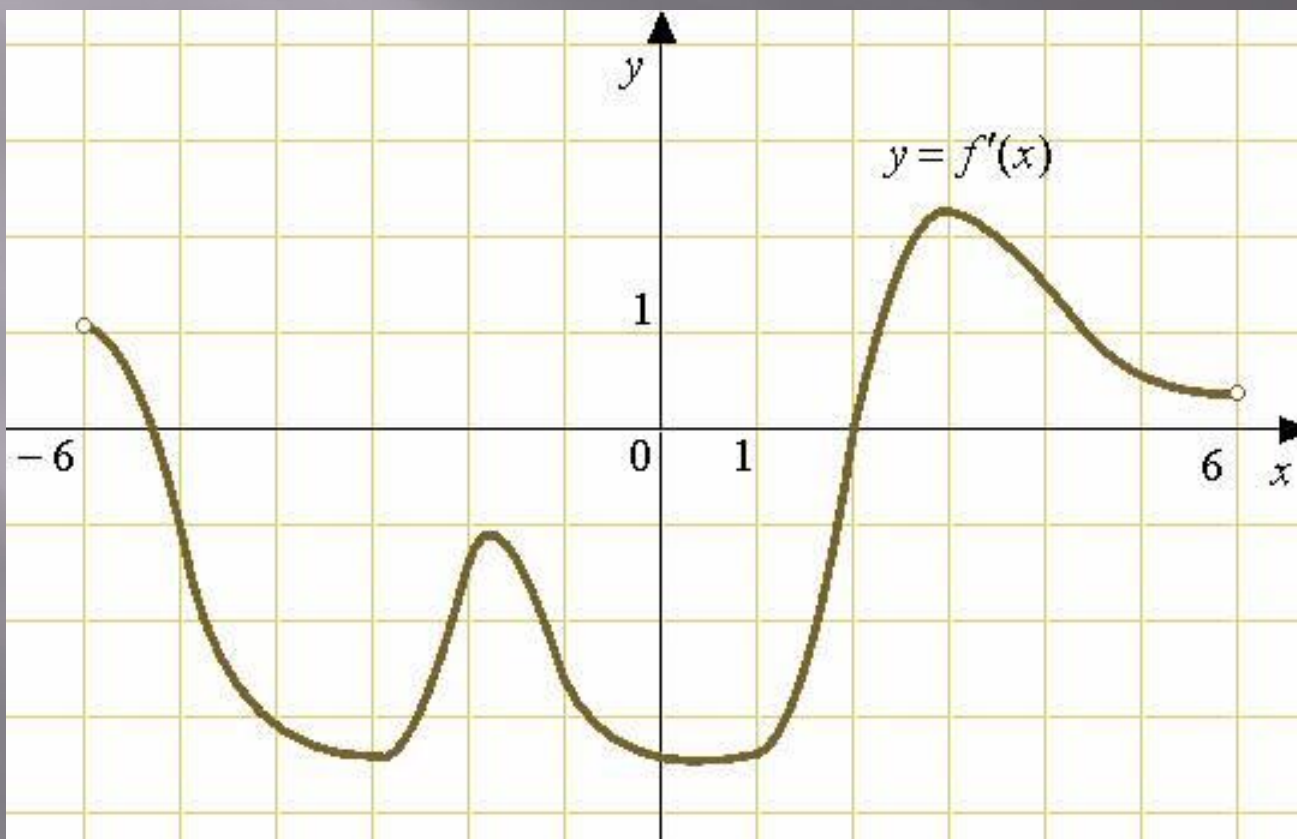


3. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9;8)$ . В какой точке отрезка от  $-5$  до  $-3$   $f(x)$  принимает наименьшее значение .

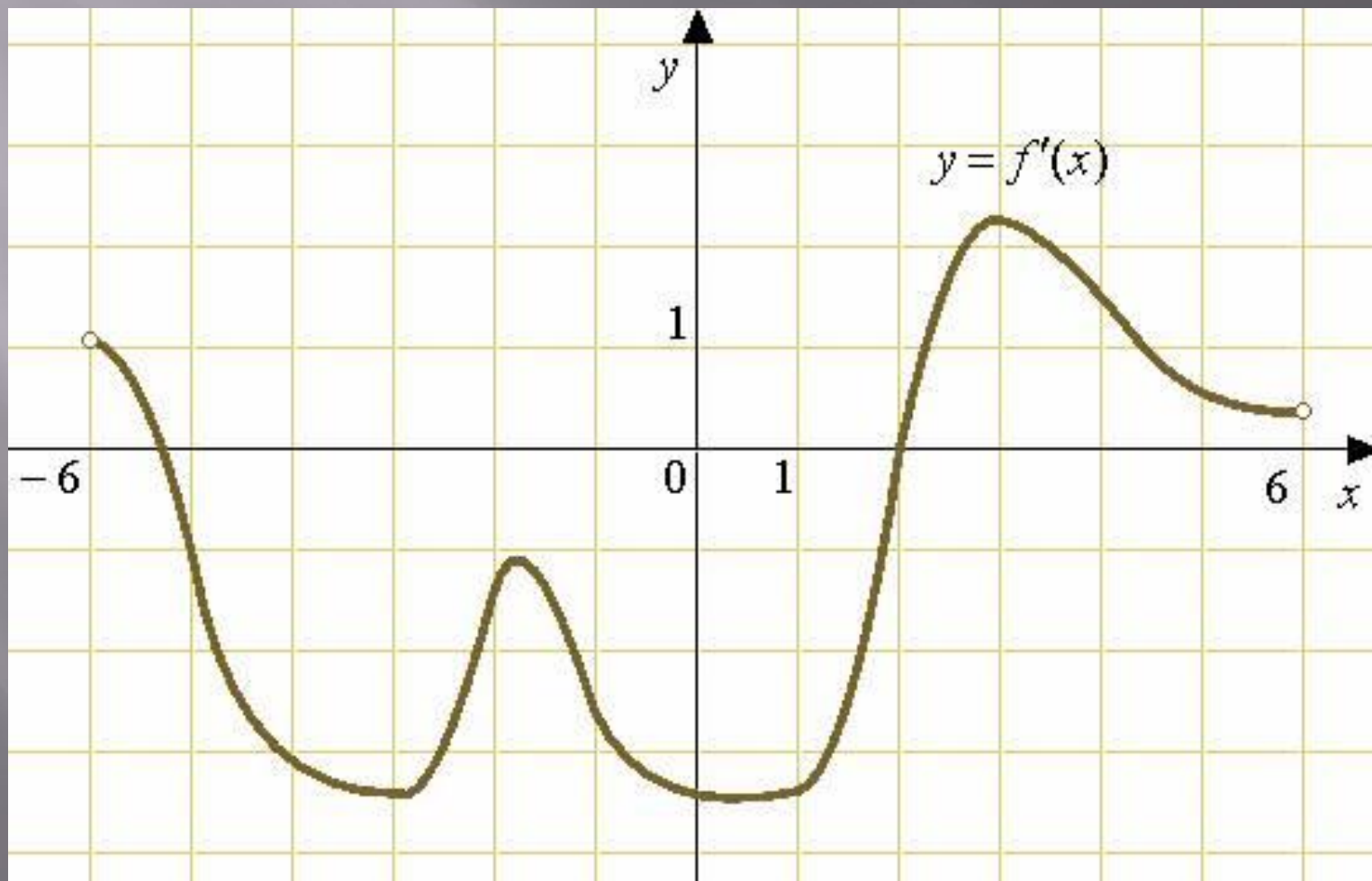




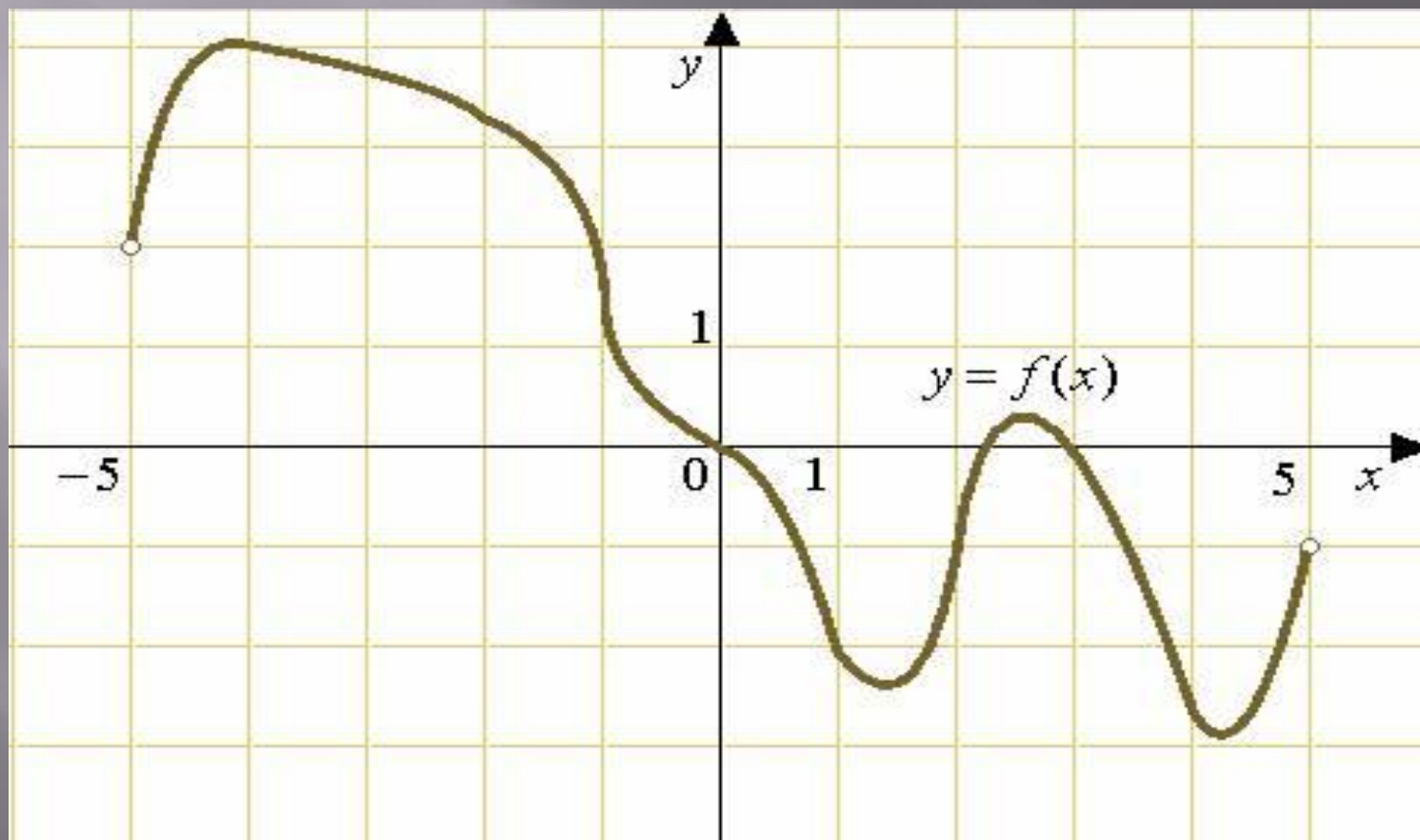
4. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6;6)$ . В какой точке отрезка от 3 до 5  $f(x)$  принимает наибольшее значение.



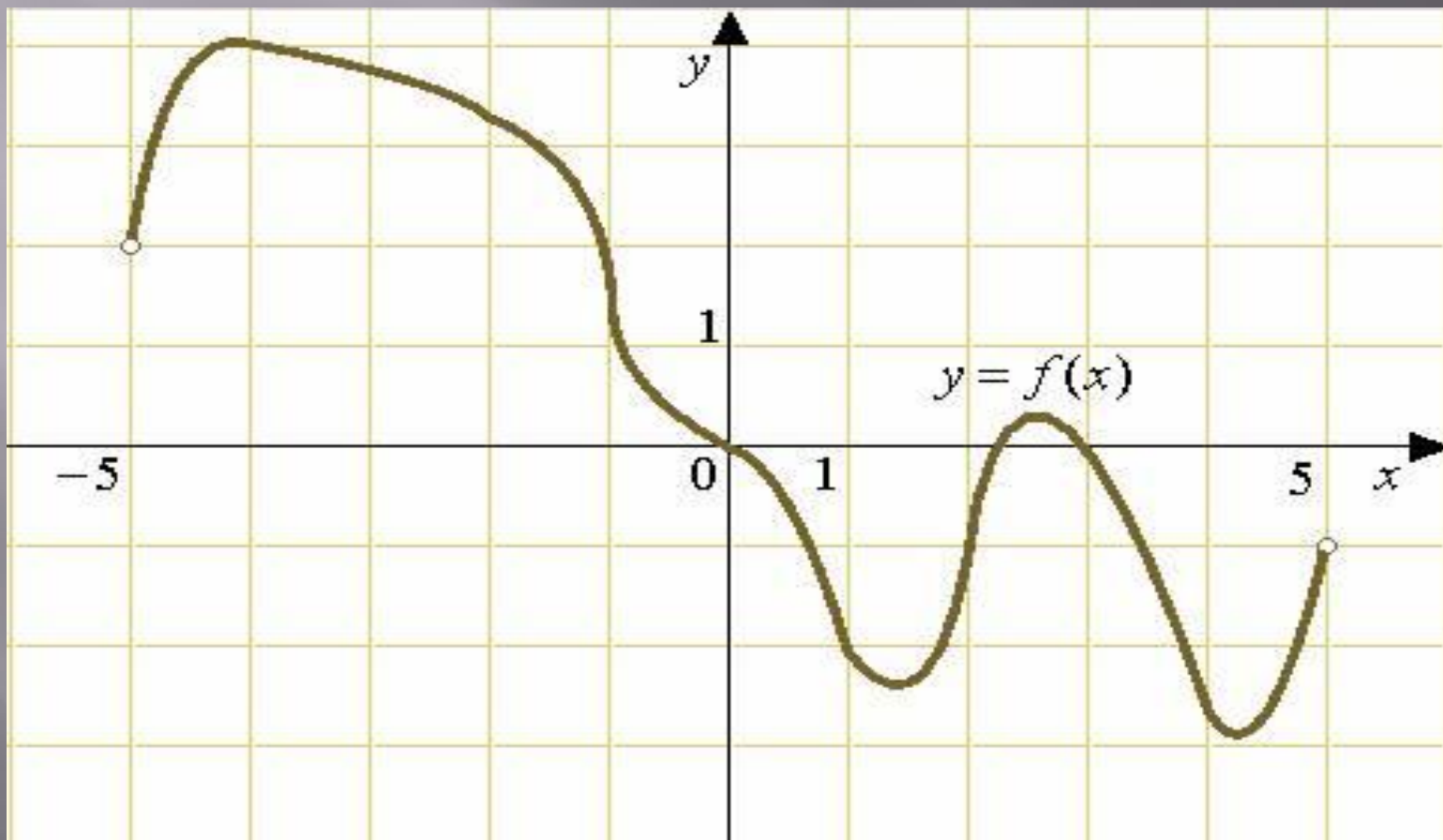
5. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6;6)$ . Найдите точку экстремума функции  $f(x)$  на интервале  $(-4;5)$ .



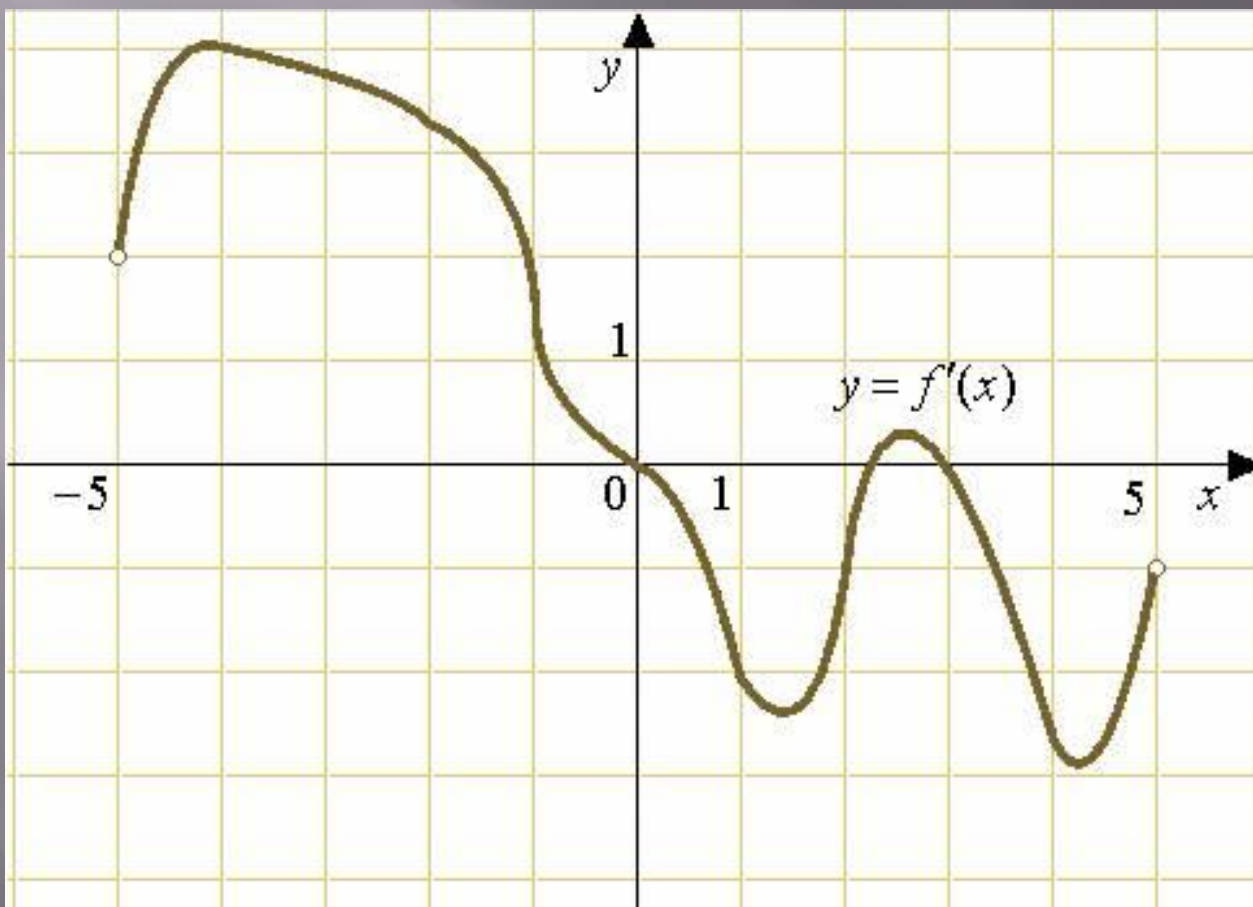
6. На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y=6$ .



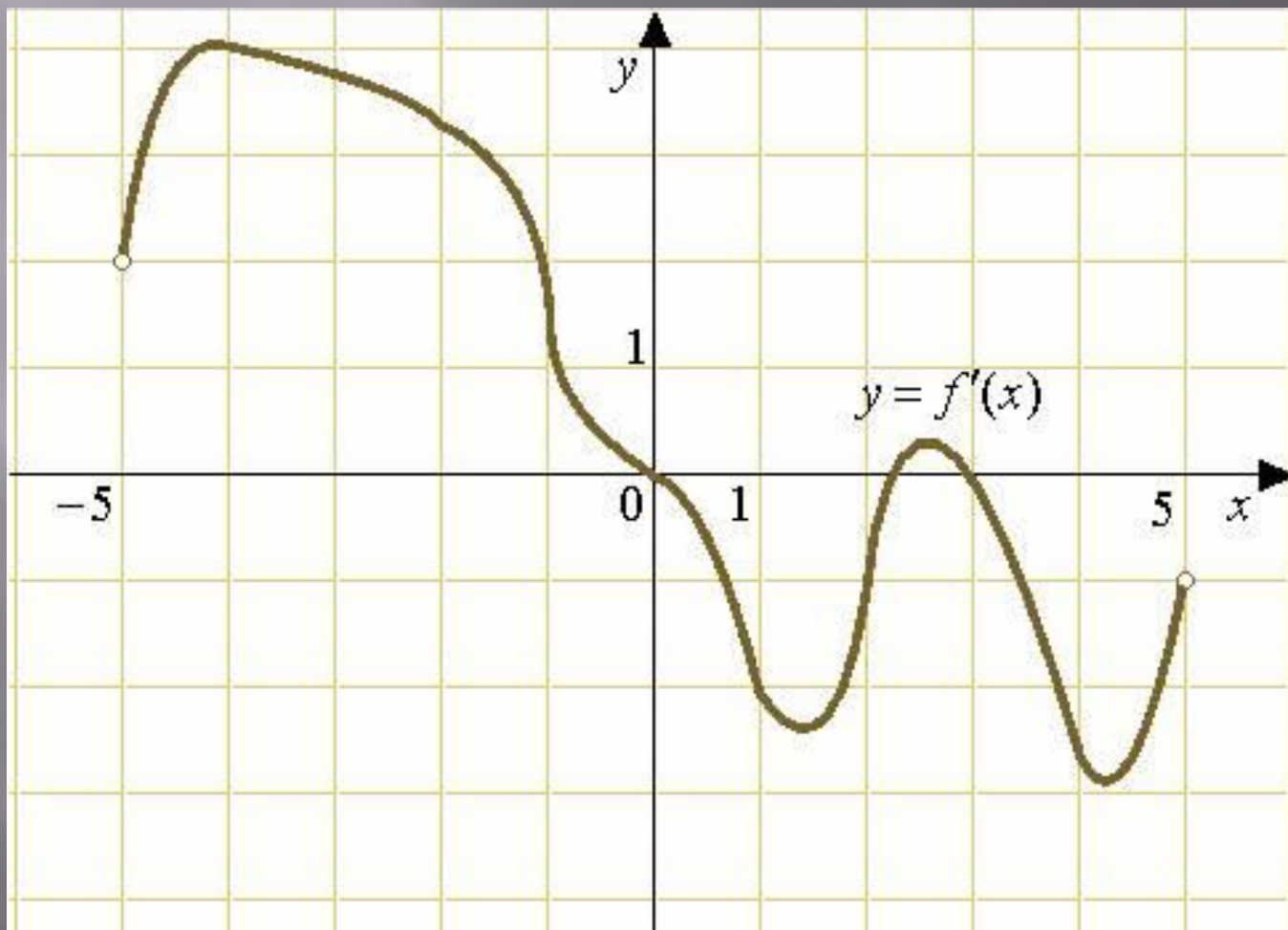
7. На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна.



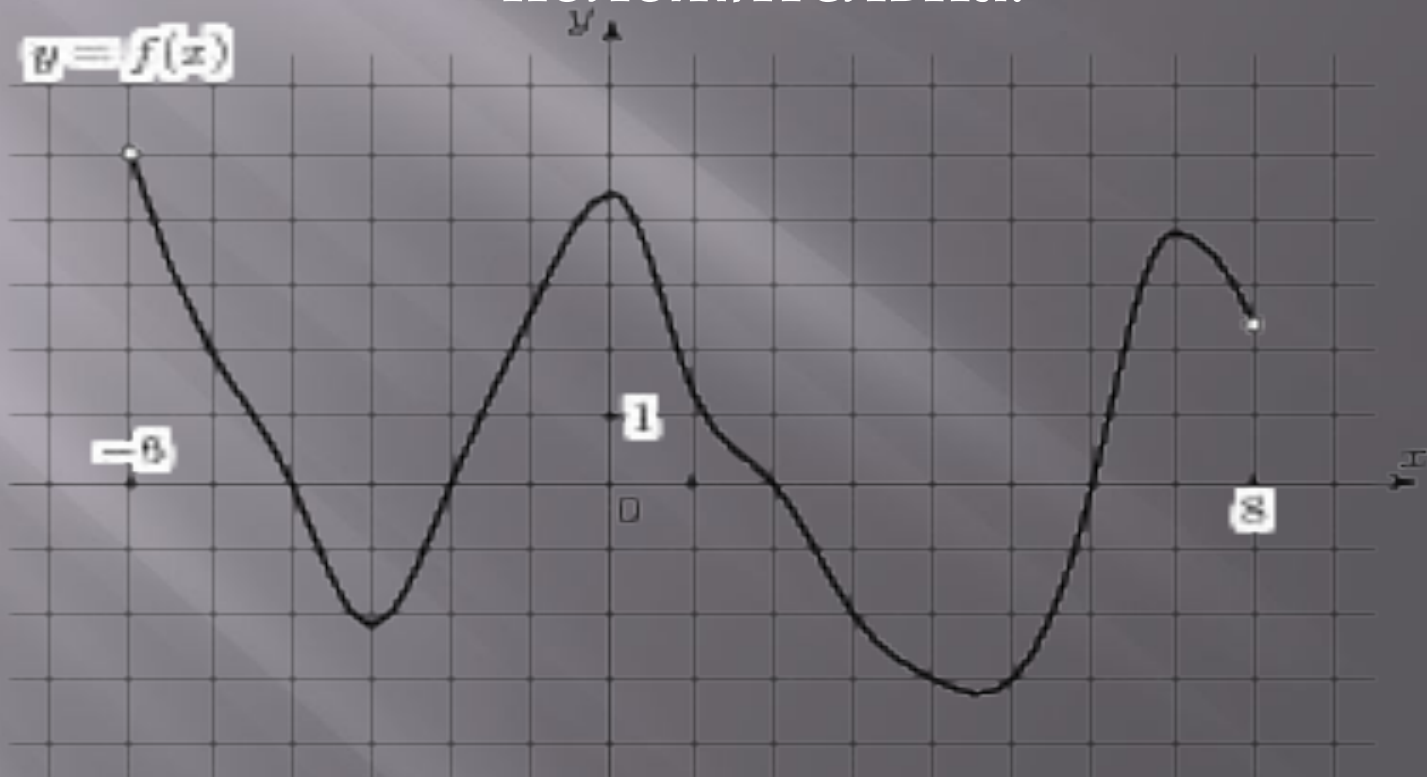
8. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . В какой точке отрезка от  $-4$  до  $-1$   $f(x)$  принимает наименьшее значение.



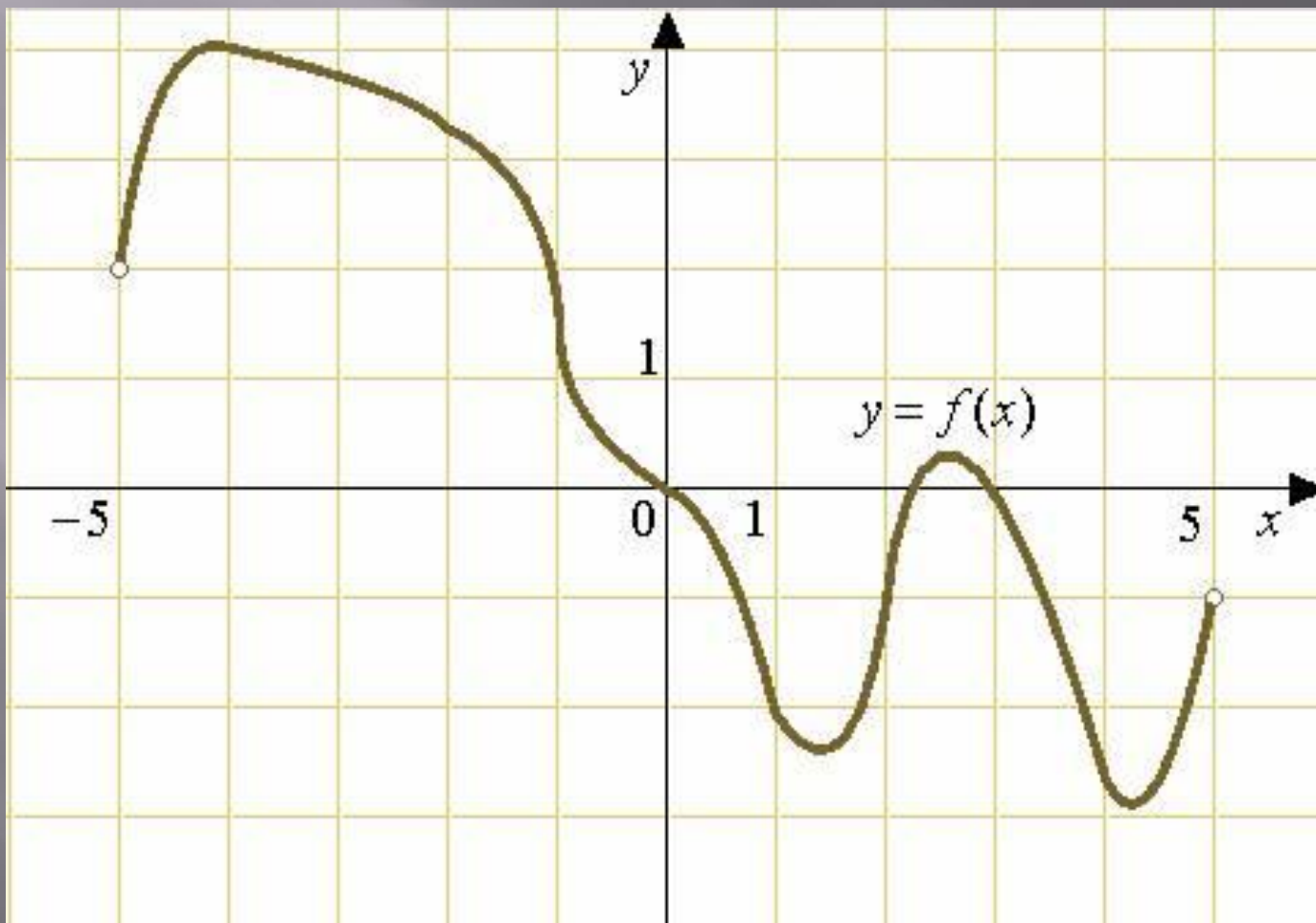
9. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$  на отрезке от  $-4$  до  $4$ .



10. На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 8)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

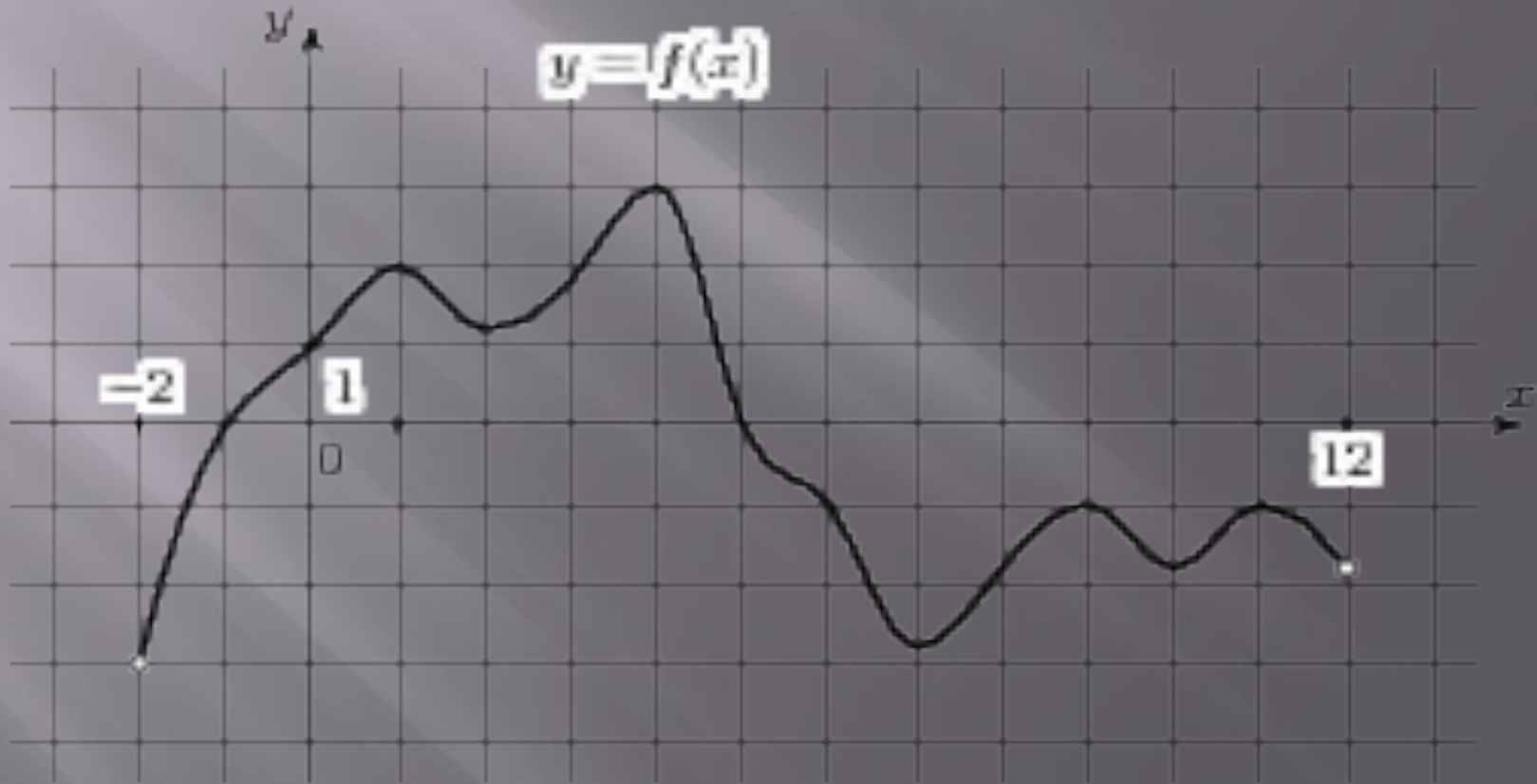


11. На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-5;5)$ . Определите количество целых точек, в которых производная функции  $f(x)$  отрицательна.

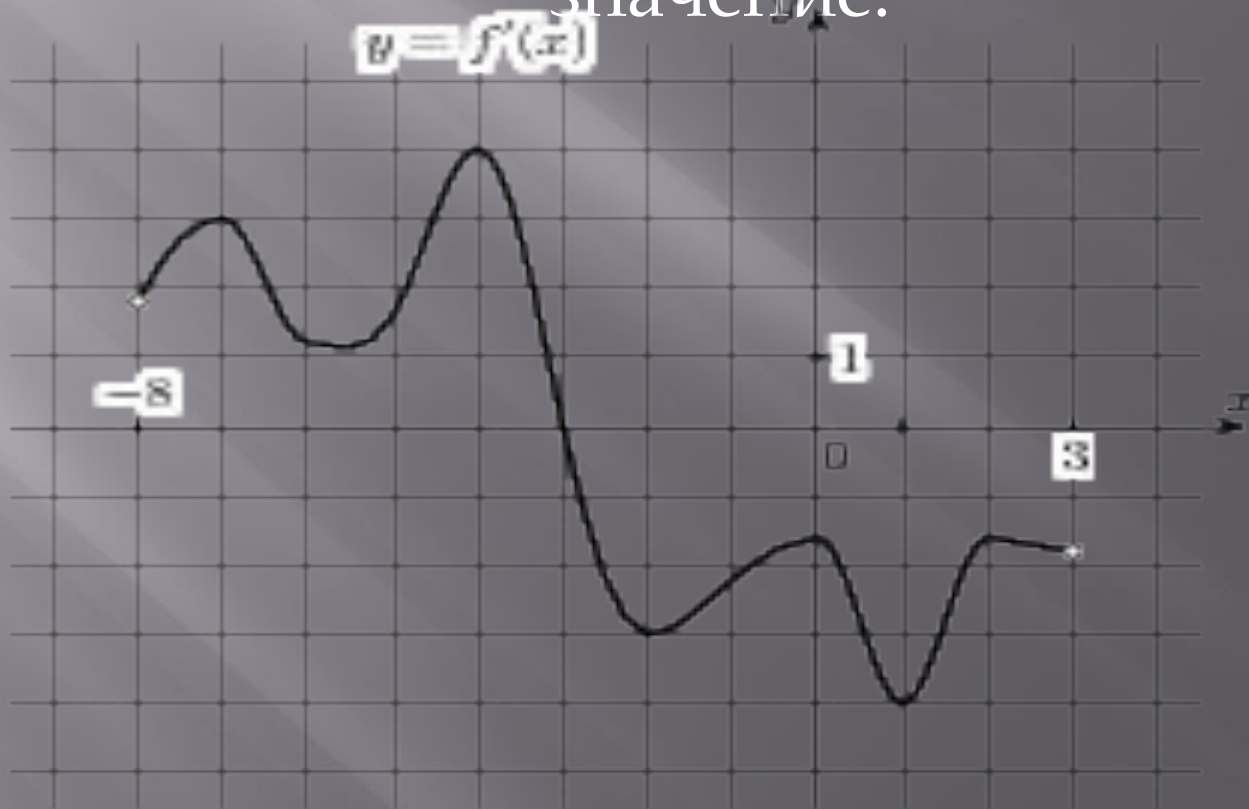




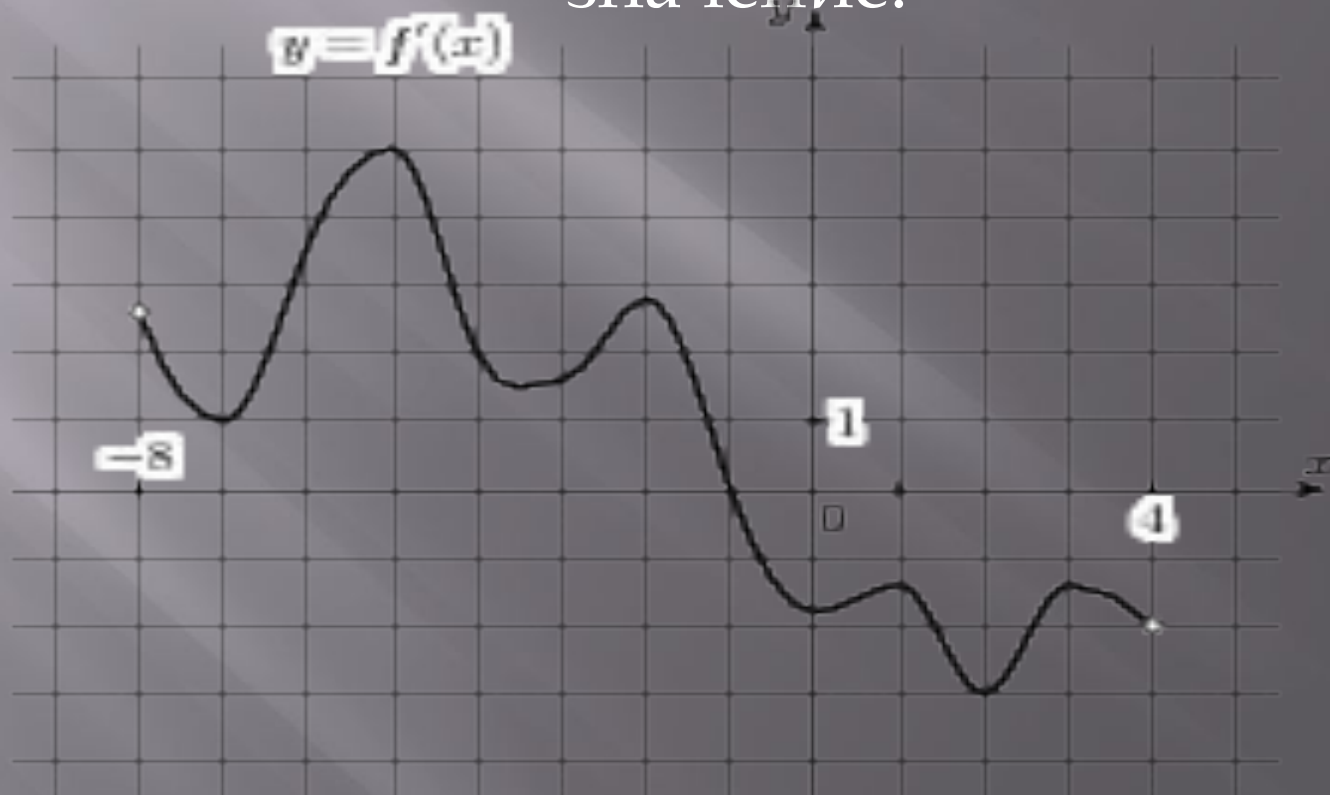
12. На рисунке изображен график функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-2;12)$ .  
Найдите сумму точек экстремума функции  $f(x)$ .



13. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8;3)$ . В какой точке отрезка от  $-3$  до  $2$   $f(x)$  принимает наибольшее значение.



14. На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-8;4)$ . В какой точке отрезка от  $-7$  до  $-3$   $f(x)$  принимает наименьшее значение.



*Рано или поздно всякая  
математическая  
идея находит применение в том или  
ином деле.  
А. Н. Крылов*



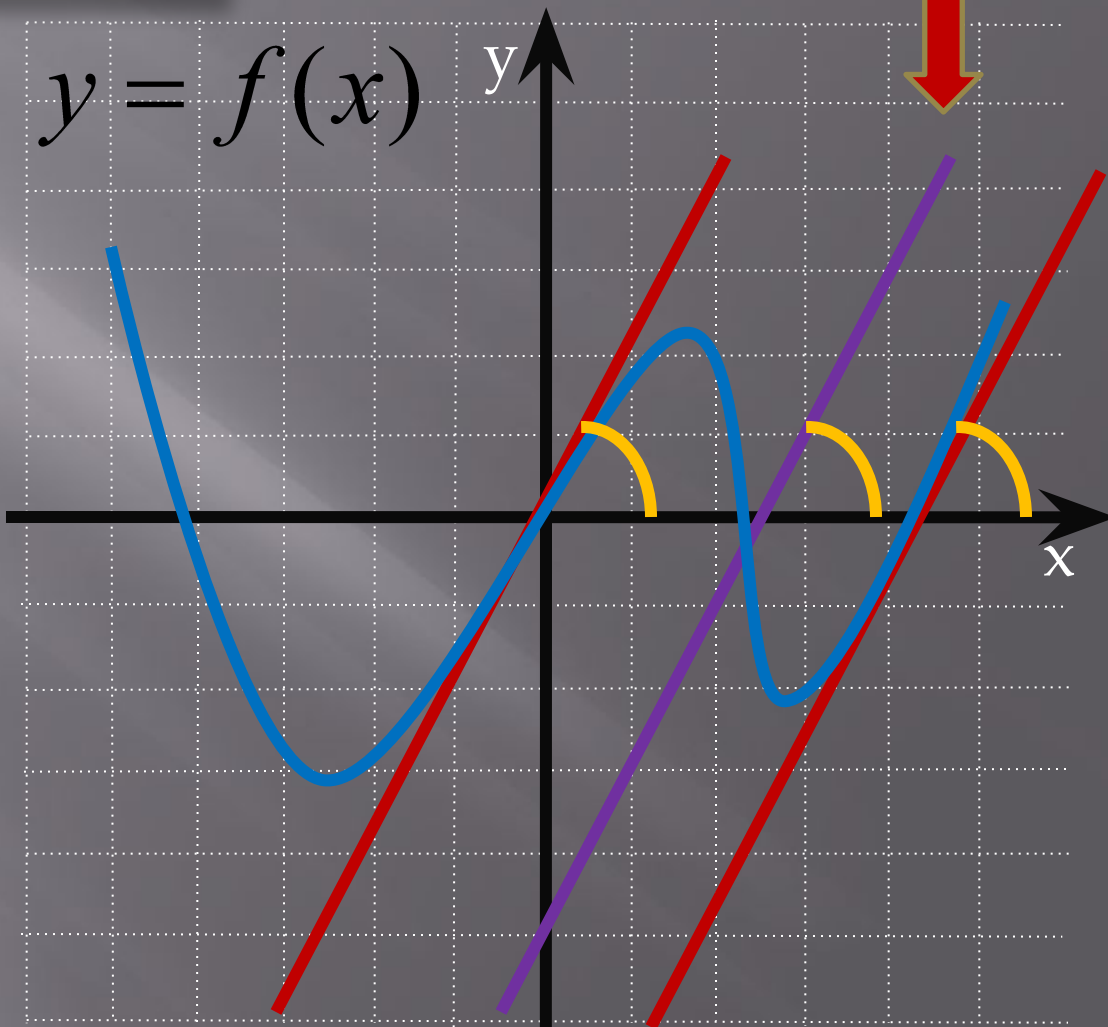
# Угловые коэффициенты параллельных прямых

равны  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$

$$y = 2x - 5$$



$$y = f(x)$$



$$y = 2x + b$$



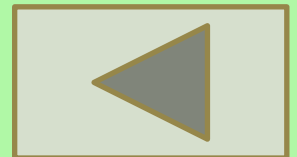
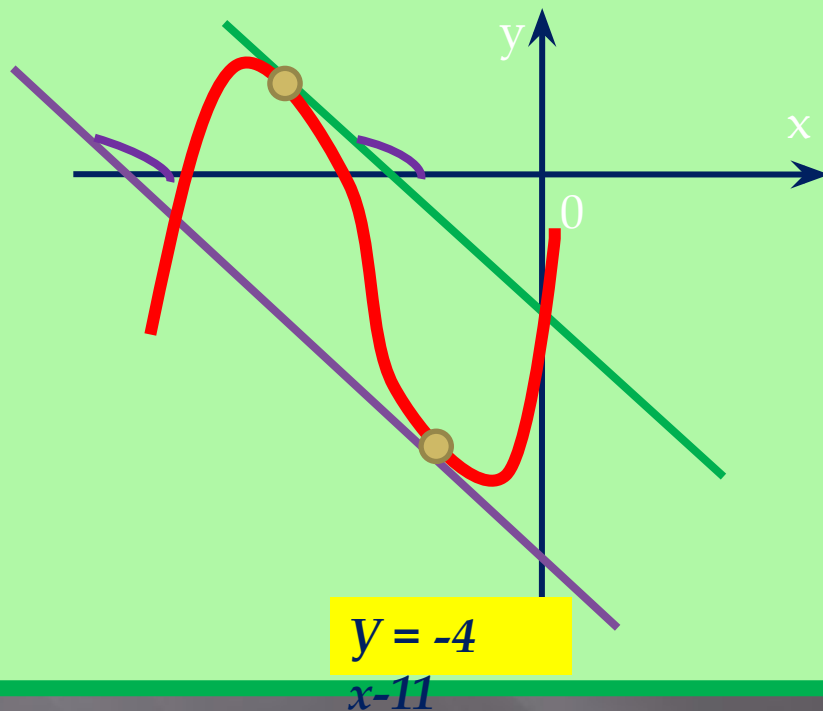
- ▣ Так как касательная параллельна прямой  $y=8x+11$ , то их угловые коэффициенты совпадают, т.е. угловой коэффициент касательной равен восьми  **$k = 8$** .

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

**$x_0$**  – абсцисса искомой точки касания



- ▣ В результате решения будут найдены абсциссы двух точек касания, которые принадлежат графику данной функции.
- ▣ Но только одна из этих точек принадлежит касательной  $y = -4x - 11$ , чтобы определить какая, нужно найденные абсциссы подставить в оба из данных уравнений. Должны получиться верные равенства.



Найти производные функций:

$$y = 2x - 3$$

$$y = \sqrt{x-2}$$

$$y = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$$

$$y = \sin(3-2x)$$

$$y = (2x+1)^2$$

$$y = 3\operatorname{tg}x + 2$$

$$y = \cos 5x$$

$$y = \sqrt{x} - 16x$$