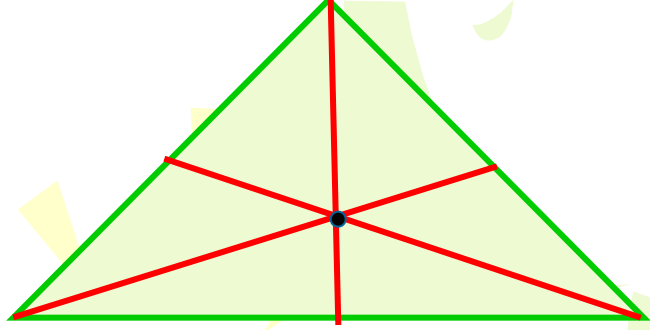
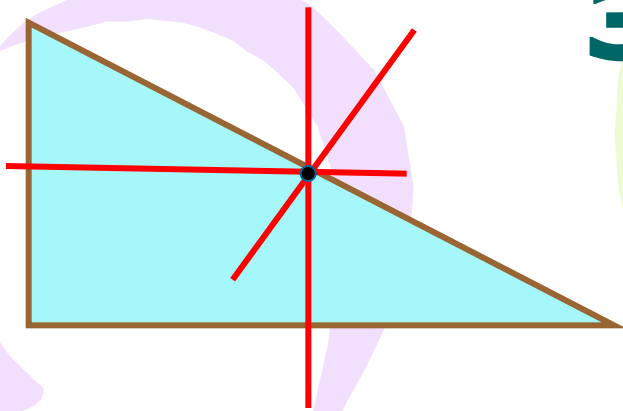


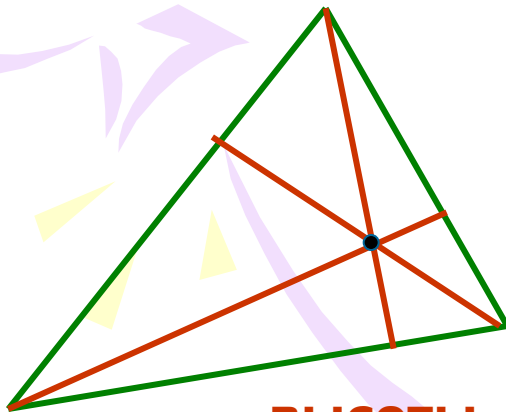
Четыре замечательные точки треугольника



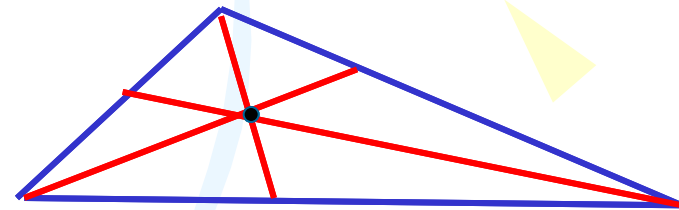
медианы



серединные перпендикуляры



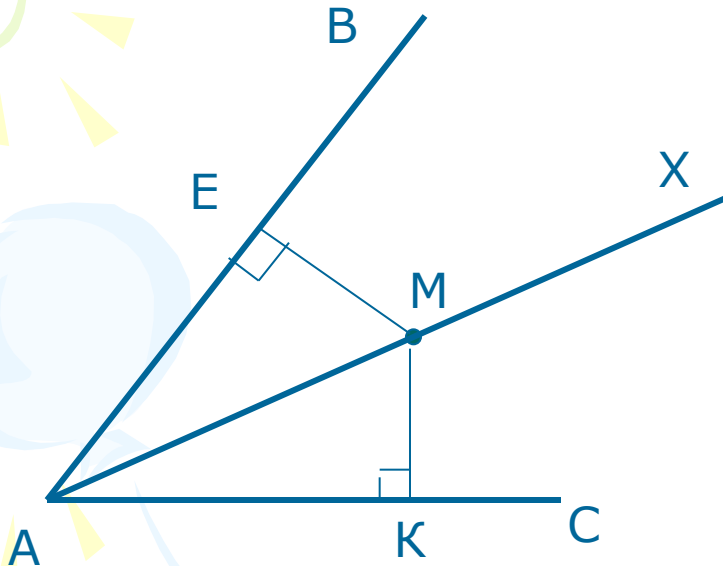
высоты



биссектрисы

Свойство биссектрисы неразвёрнутого угла

Теорема 1. Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.



Дано: $\angle BAC$, AX – биссектриса,

$M \in AX$, $ME \perp AB$, $MK \perp AC$

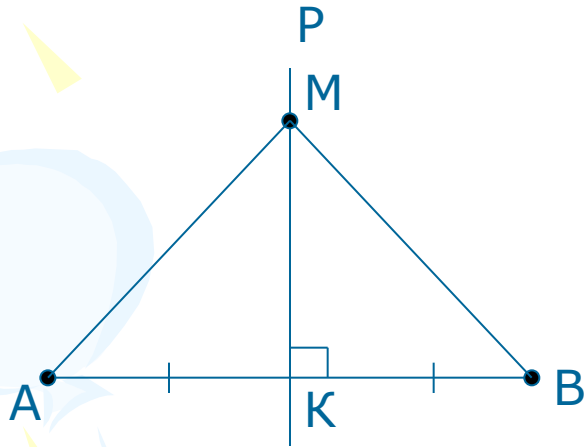
Доказать: $ME = MK$

Теорема 2 (обратная). Точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.

Обобщённая теорема: биссектриса неразвёрнутого угла – множество точек плоскости, равноудалённых от сторон этого угла.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Теорема 1. **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.**



Дано: AB – отрезок,
 PK – серединный перпендикуляр,
 $M \in PK$

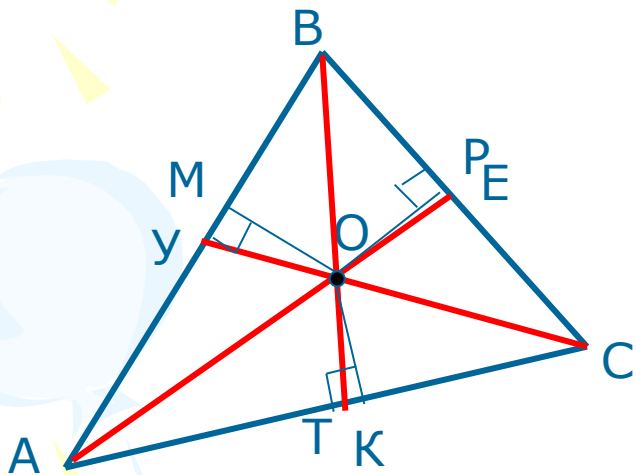
Доказать: $MA = MB$

Теорема 2. **Точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Обобщённая теорема: серединный перпендикуляр к отрезку – множество точек плоскости, равноудалённых от его концов.

Первая замечательная точка треугольника

Теорема. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: $\triangle ABC$, AE , BT – биссектрисы,
 O – точка их пересечения

Доказать: CY – биссектриса $\triangle ABC$, $O \in CY$

Доказательство:

AE – биссектриса и $OM \perp AB$, $OK \perp AC$,
значит, $OM = OK$

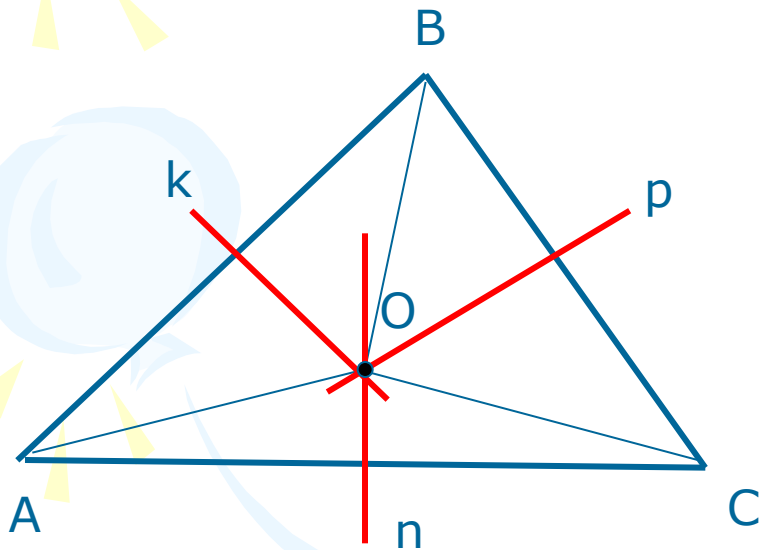
BT – биссектриса, и $OM \perp AB$, $OP \perp BC$, значит, $OM = OP$

Значит, $OM = OK = OP$ и $OP \perp BC$, $OK \perp AC$, следовательно,
 O лежит на биссектрисе угла ACB , т. е. CY – биссектриса $\triangle ABC$.

Значит, O – точка пересечения трёх биссектрис треугольника.

Вторая замечательная точка треугольника

Теорема. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: $\triangle ABC$, k, n – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,
 O – точка их пересечения

Доказать: p – серединный перпендикуляр к BC , $O \in p$

Доказательство:

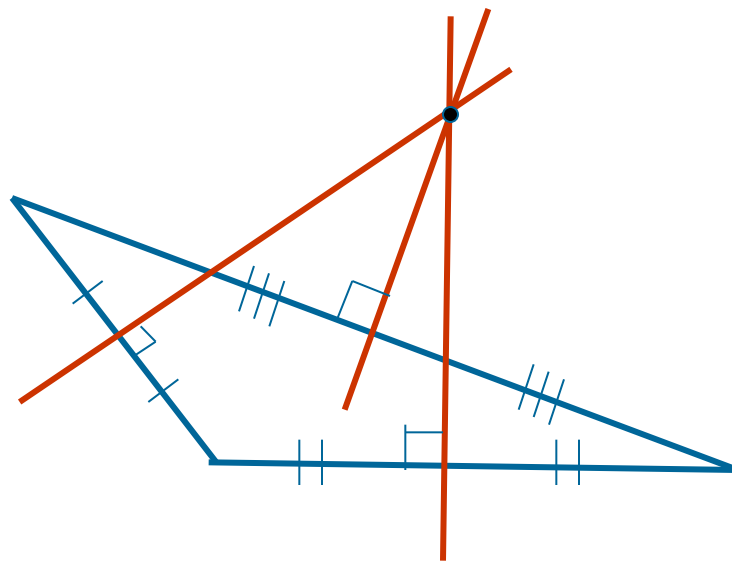
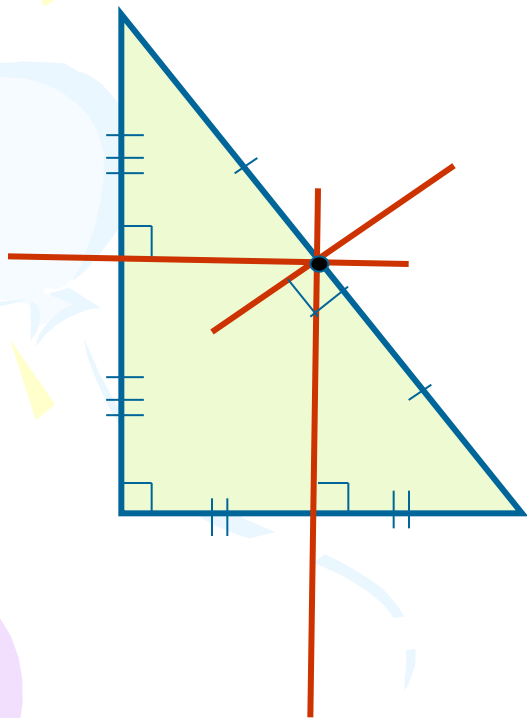
n – серединный перпендикуляр к AC и $O \in n$, значит, $OA = OC$.

k – серединный перпендикуляр к AB и $O \in k$, значит, $OA = OB$.
Следовательно, $OA = OB = OC$, значит, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC , т. е. на p .

Значит, O – точка пересечения серединных перпендикуляров k, n, p .

Вторая замечательная точка треугольника (продолжение)

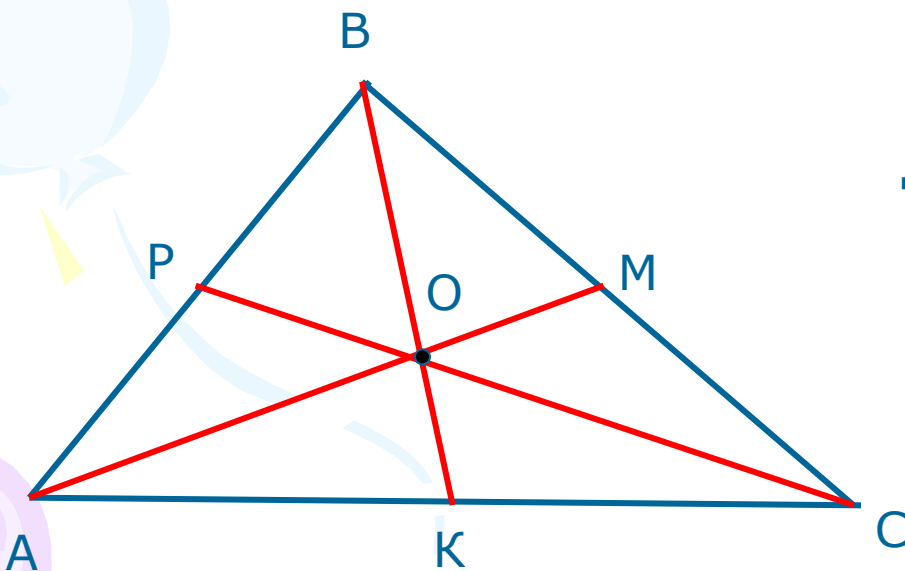
Ещё возможное расположение:



Третья замечательная точка треугольника

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую в отношении 2: 1, считая от вершины.**

(центр тяжести треугольника – центроид)



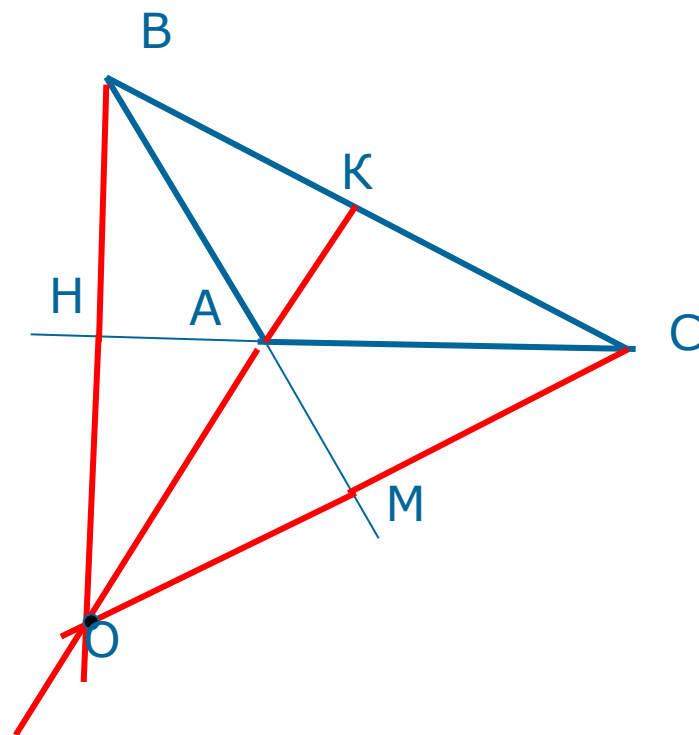
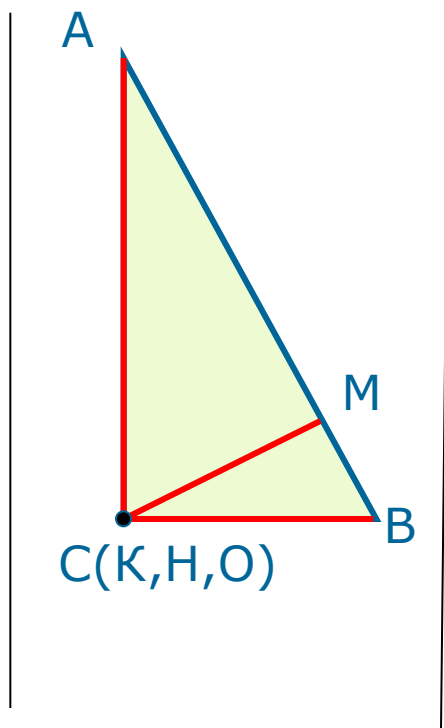
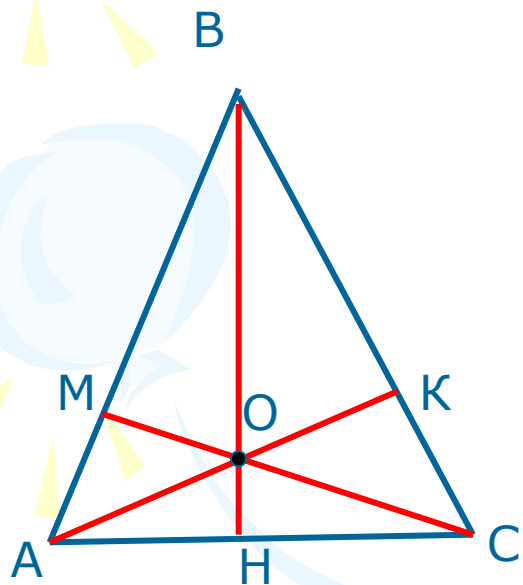
Дано: $\triangle ABC$, AM, BK, CP - медианы

Доказать: $AM \cap BK \cap CP = O$

Доказательство проведено ранее:
задача 1 п. 62.

Четвёртая замечательная точка треугольника

Теорема. **Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентр).**



Дано: $\triangle ABC$, AK , BH , CM - высоты

Доказать: O – точка пересечения высот или их продолжений.

Доказательство:

Через вершины B , A , C треугольника ABC проведём $ET \parallel AC$, $EY \parallel BC$, $TU \parallel AB$.

Получим:

$ACBE$ – параллелограмм, значит, $AC = BE$

$ACTB$ – параллелограмм, значит, $AC = BT$

Следовательно, $BE = BT$, т. е. B – середина ET .

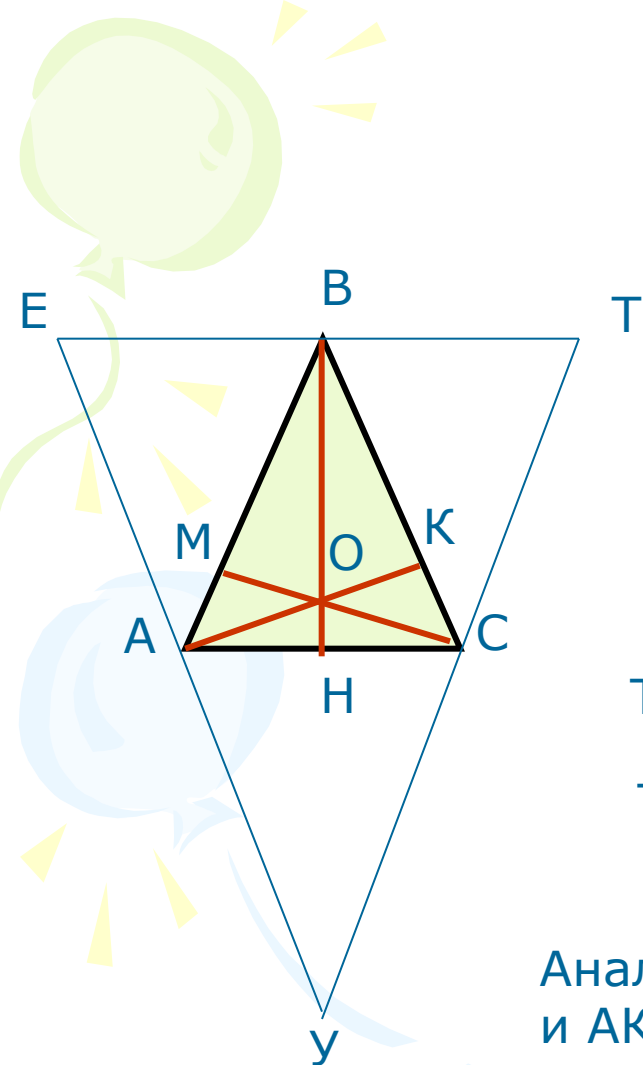
Т.к. BH – высота $\triangle ABC$ по условию, то $BH \perp AC$

Т. к. $ET \parallel AC$ по построению, значит, $BH \perp ET$

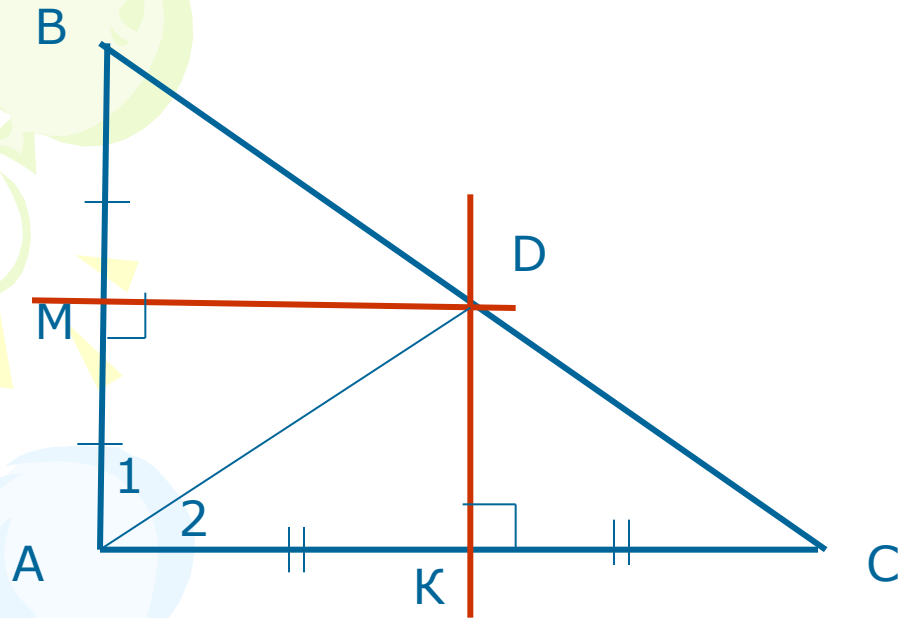
Получим: BH – серединный перпендикуляр к ET .

Аналогично, CM – серединный перпендикуляр к TU и AK – серединный перпендикуляр к UE .

Т. е. BH , CM , AK – серединные перпендикуляры к сторонам $\triangle ETU$, которые по ранее доказанному пересекаются в одной точке, значит, высоты $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке.



Задача № 680.



Дано: $\triangle ABC$, $AM = BM$, $MD \perp AB$,
 $AK = KC$, $DK \perp AC$, $D \in BC$.

Доказать: D - середина BC ,
 $\angle A = \angle B + \angle C$.

Доказательство:

а)

$AM = BM$, $MD \perp AB$, $D \in BC$ по условию, значит, $BD = AD$
 $AK = KC$, $DK \perp AC$, $D \in BC$ по условию, значит, $AD = DC$ } $BD = DC$,
следовательно, D - середина BC .

б) По доказанному $BD = AD$ и $AD = DC$, значит, треугольники ABD

и ACD - равнобедренные, поэтому $\angle 1 = \angle B$, $\angle 2 = \angle C$.

$\angle BAC = \angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle C$, что и т. д.