Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§51. Простейшие вероятностные задачи

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Содержание

- Классическое определение вероятности
- Алгоритм нахождения вероятности случайного события
- Обозначение вероятности: Обозначение вероятности: Р(А)
- Пример 1. Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет…
- Правило умножения
- Пример 2. Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков …
- Невозможное, достоверное и противоположное события
- Пример 3. Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число …
- Пример 4. Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что …
- О комбинаторике
- Пример 5. Игральную кость бросают 4 раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы 1 раз, или же, что шестерка не появится ни разу?
- Примечание. При трех бросаниях …
- Пьер Ферма
- Блез Паскаль
- Для учителей математики
- Источники

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Классическое определение вероятности

- **Вероятностью события А при проведении некоторого испытания** называют отношение числа тех исходов, в результате которого наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Алгоритм нахождения вероятности случайного события

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует найти:

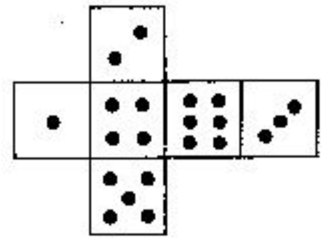
1) число **N** всех возможных исходов данного испытания;
2) количество **N(A)** тех исходов, в которых наступает событие А;
3) Частное **N(A)/N**; **оно и будет равно вероятности события А.**

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Обозначение вероятности: P(A)

- Probabilite (франц.)- вероятность,
- probably (англ.) – вероятно.

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}$$



Пример 1

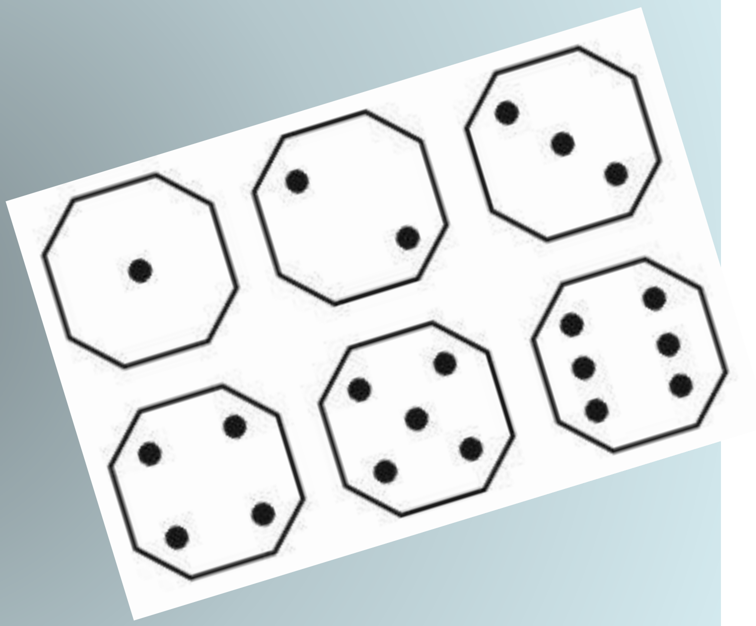
- **Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет:**

a) 5 очков;

b) четное число очков;

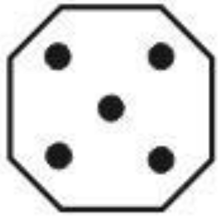
c) число очков больше 4;

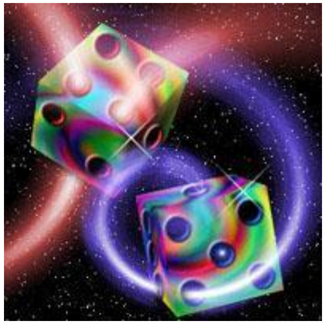
d) число очков, не кратное 3.



Решение примера 1.а)

- **Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет**





a) **5 очков;**
b) четное число очков;
c) число очков больше 4;
d) число очков, не кратное 3.

РЕШЕНИЕ: Всего имеется N=6 (равновозможных) исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6.

a) Ровно при одном из исходов произойдет интересующее нас событие A={выпадение 5 очков}. Значит, N(A)=1 и P(A)=N(A)/N=1/6.

ОТВЕТ: 1/6

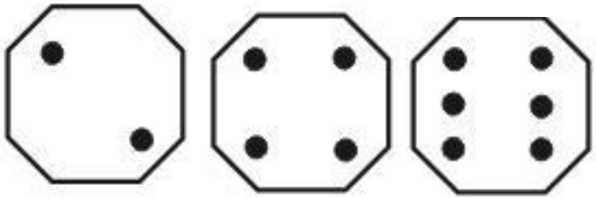
Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

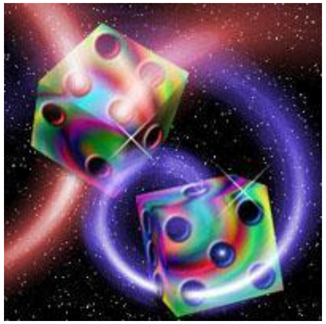
Решение примера 1.b)

- **Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет:**

a) 5 очков;

b) четное число очков;





c) число очков больше 4;

d) число очков, не кратное 3.

РЕШЕНИЕ: Всего имеется N=6 (равновозможных) исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Интересующее нас событие B={выпадение четного числа очков} произойдет в 3 случаях: когда выпадет 2, 4 или 6. Значит, N(B)=3 и P(A)=N(B)/N=3/6=1/2=0,5.

ОТВЕТ: 0,5.

Решение примера 1.с)

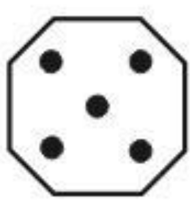
- **Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет:**

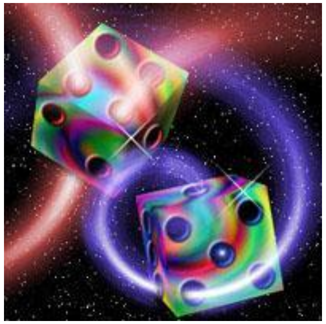
a) 5 очков;

b) четное число очков;

c) число очков больше 4;

d) число очков, не кратное 3.





РЕШЕНИЕ: Всего имеется N=6 (равновозможных) исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6.

c) Интересующее нас событие C={выпадение числа очков больше 4} произойдет в 2 случаях: когда выпадет 5 или 6. Значит, N(C)=2 и P(C)=N(B)/N=2/6=1/3.

ОТВЕТ: 1/3.

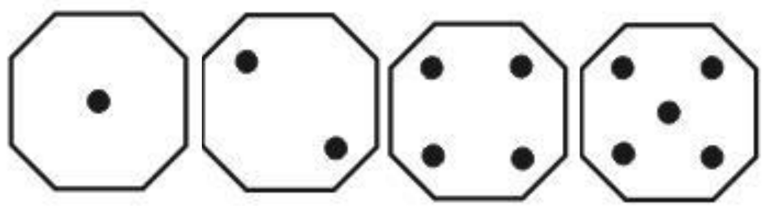
Решение примера 1.d)

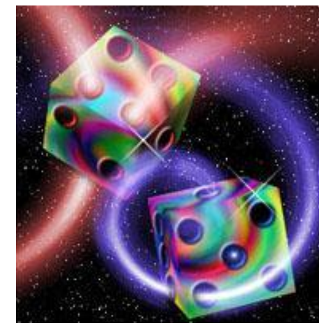
- **Найти вероятность того, что при одном бросании игрального кубика выпадет:**

a) 5 очков;

b) четное число очков;

c) число очков больше 4;





d) число очков, не кратное 3.

РЕШЕНИЕ: Всего имеется N=6 (равновозможных) исходов: выпадение 1, 2, 3, 4, 5, 6.

d) Из шести возможных выпавших чисел {1, 2, 3, 4, 5, 6} не кратны 3 только 4 числа: 1,2, 4, 5. Значит, N(D)=4 и P(D)=N(D)/N=4/6=2/3.

ОТВЕТ: 2/3.

Правило умножения

- Для того чтобы найти число всех равновозможных исходов **независимого** проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Ключевые слова

- Невозможное событие
- Достоверное событие
- Противоположное событие

Пример 2

- **Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков:**

a) равна 1;

b) меньше 13;

c) меньше 5;

d) меньше 10.

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Решение примера 2.а)

- **Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков:**

a) **равна 1;**
b) меньше 13;
c) меньше 5;
d) меньше 10.

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

РЕШЕНИЕ:

a) **Минимальная возможная сумма равна 2, так что сумма никак не может быть равной 1. Значит, N(A)=0 и P(A)=0.**

ОТВЕТ: P(A)=0.

Здесь мы имели дело с невозможным событием. Так называют событие, которое никогда не наступает при проведении данного испытания, его вероятность равна 0.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Решение примера 2.b)

- **Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков:**

a) равна 1;

b) меньше 13;

c) меньше 5;

d) меньше 10.

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
	2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
	3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
	4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
	6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

РЕШЕНИЕ:

b) Максимально возможное значение суммы равно 12. Значит, интересующее нас событие произойдет при любом исходе нашего опыта. Поэтому N(A)=N и P(A)=1.

ОТВЕТ: P(A)=1

Здесь мы имеем дело с достоверным событием, т.е. событие обязательно наступит в данном испытании. Вероятность достоверного события равна 1.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Решение примера 2.с)

- **Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков:**

a) равна 1;

b) меньше 13;

c) меньше 5;

d) меньше 10.

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

РЕШЕНИЕ:

c) При каждом бросании кубика возможны 6 исходов. Предполагается, что результаты бросаний независимы друг от друга. По правилу умножения N=6*6=36 (равновозможных) исходов. Значит, интересующее нас событие произойдет при следующих 6 исходах: (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1). Поэтому N(A)=6 и P(A)=N(A)/N=6/36=1/6. ОТВЕТ: 1/6

Здесь мы имеем дело с независимым проведением двух испытаний.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Решение примера 2.d)

- **Найти вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма очков:**

a) равна 1;

b) меньше 13;

c) меньше 5;

d) меньше 10.

сумма очков		2 кубик					
		1	2	3	4	5	6
1 кубик	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
	2	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
	3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
	4	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
	5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
	6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*

РЕШЕНИЕ:

d) Вместо подсчета тех исходов, в которых наступает интересующее нас событие А, перечислим те исходы, в которых оно <u>не наступает</u>, т.е. сумма равна 10, 11 или 12: (4,6), (6,4), (5,5), (5,6), (6,5), (6,6). Поэтому N(A)=36-6=30 и P(A)=N(A)/N=30/36=5/6. ОТВЕТ: 5/6

Здесь мы имеем дело с <u>противоположным событием.</u> Так называют событие, которое наступает в том и только в том случае, когда **<u>не наступает</u>** интересующее нас событие.

События

- Событием называют <u>невозможным</u>, если оно никогда не наступает при проведении данного испытания. Вероятность невозможного события равна 0.
- Событием называют <u>достоверным</u>, если оно обязательно наступит в данном испытании. Вероятность достоверного события равна 1.
- Событием называют <u>противоположным</u>, если оно наступает в том и только в том случае, когда <u>**не наступает**</u> интересующее нас событие.
- Вероятность P(A) события **A** и вероятность P(Ā) противоположного ему события **Ā** связаны соотношением: **P(A)+ P(Ā) =1.**

Пример 3

- Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число:

a) не оканчивается нулем;
b) состоит из различных цифр;
c) не является квадратом целого числа;
d) не делится на 17.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Решение примера 3.а)

- **Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число:**

a) **не оканчивается нулем;**

b) состоит из различных цифр;

c) не является квадратом целого числа;

d) не делится на 17.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

РЕШЕНИЕ: Всего имеется 90 двузначных чисел. N=90.

a) Пусть **A** – интересующее нас событие, т.е. A={число не оканчивается нулем}, а $\bar{A}$ - противоположное ему событие, т.е. $\bar{A}$= {число оканчивается нулем}= {10,20,…,90} .
Следовательно, **N($\bar{A}$)=9 и P($\bar{A}$)=N($\bar{A}$)/N=9/90=0,9.**
Значит, **P(A)=1-P($\bar{A}$)=1-0,9=0,1.**

ОТВЕТ: 0,1

Решение примера 3.b)

- **Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число:**

a) не оканчивается нулем;

b) состоит из различных цифр;

c) не является квадратом целого числа;

d) не делится на 17.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

РЕШЕНИЕ: Всего имеется 90 двузначных чисел. N=90.

a) Пусть A – интересующее нас событие, т.е. A={число состоит из различных цифр}, а $\bar{A}$ - противоположное ему событие, т.е. $\bar{A}$={число состоит из одинаковых цифр}={11, 22, …, 99}. **$N(\bar{A})=9$.**
$P(\bar{A})=N(\bar{A})/N=9/90=0,9$.
Значит, **$P(A)=1-P(\bar{A})=1-0,9=0,1$.**

ОТВЕТ: 0,1

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Решение примера 3.c)

- **Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число:**

a) не оканчивается нулем;
b) состоит из различных цифр;
c) не является квадратом целого числа;
d) не делится на 17.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

РЕШЕНИЕ: Всего имеется 90 двузначных чисел. N=90.

c) Пусть **A** – интересующее нас событие, т.е. A={<u>число не является квадратом целого числа</u>}, а $\bar{A}$ - противоположное ему событие, т.е. $\bar{A}$= {<u>число является квадратом целого числа</u>}= {16,25, 36, 49, 64, 81} .
Следовательно, **$N(\bar{A})=6$ и $P(\bar{A})=N(\bar{A})/N=6/90=1/15$.**
Значит, **$P(A)=1-P(\bar{A})=1-1/15=14/15$.**

ОТВЕТ: 14/15.

Решение примера 3.d)

- **Ученику предложили написать на доске любое двузначное число. Найти вероятность того, что это число:**

a) не оканчивается нулем;

b) состоит из различных цифр;

c) не является квадратом целого числа;

d) не делится на 17.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

РЕШЕНИЕ: Всего имеется 90 двузначных чисел. N=90.

c) Пусть **A** – интересующее нас событие, т.е. A={число не делится на 17}, а Ā - противоположное ему событие, т.е. **Ā**= {число делится на 17}= {17, 34, 51, 68, 85} .
Следовательно, **N(Ā)=5 и P(Ā)=N(Ā)/N=5/90=1/18.**
Значит, **P(A)=1-P(Ā)=1-1/18=17/18.**

ОТВЕТ: 17/18.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Пример 4

- **Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что:**

a) эти два числа различны;

b) сумма чисел равна 100;

c) сумма чисел не больше 25;

d) сумма чисел больше 190.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

Решение примера 4.а)

- **Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что:**

a) **эти два числа различны;**

b) сумма чисел равна 100;

c) сумма чисел не больше 25;

d) сумма чисел больше 190.

РЕШЕНИЕ: N=90*90=8100 (по правилу умножения)

a) A={два числа различны},
$\bar{A}$={два числа одинаковы}={(10,10), (11,11),…, (99,99)},

<u>1 способ:</u> N($\bar{A}$)=90, следовательно, N(A)=N-N($\bar{A}$)=90*90-90.

Значит, P(A)=N(A)/N= (90*90-90)/(90*90)=(89*90)/(90*90)=89/90.

<u>2 способ</u>: N($\bar{A}$)=90, P($\bar{A}$)= N($\bar{A}$)/N=90/(90*90)=1/90 .

Значит, P(A)=1-P($\bar{A}$)=1-1/90=89/90≈0,989.

ОТВЕТ: 89/90

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Решение примера 4.b)

- **Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что:**

a) эти два числа различны;

b) сумма чисел равна 100;

c) сумма чисел не больше 25;

d) сумма чисел больше 190.

РЕШЕНИЕ: N=90*90=8100 (по правилу умножения)

b) Если первый ученик выбрал число **от 10 до 90**, то интересующее нас событие произойдет, как только второй выберет недостающее до 100 слагаемое. Если первый ученик выбрал число, **большее 90** (таких чисел 9), то при любом выборе второго сумма окажется больше 100, т.е. интересующее нас событие не произойдет. В остальных случаях, у второго ученика имеется по одной возможности составить сумму 100.

Значит, **N(A)=90-9=81, P(A)=81/8100=0,01.**

ОТВЕТ: 89/90

Решение примера 4.с)

- **Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что:**

a) эти два числа различны;

b) сумма чисел равна 100;

c) сумма чисел не больше 25;

d) сумма чисел больше 190.

РЕШЕНИЕ: N=90*90=8100 (по правилу умножения).

Перебор случаев (см. в таблице на следующем слайде):

- Если 1-й ученик выбрал 10, то 2-й ученик может выбрать число от 10 до 15 (6 случаев). Если 1-й ученик выбрал 11, то 2-й ученик может выбрать число от 10 до 14 (5 случаев). Для 12 будет 4 случая, для 13 – 3, для 14 – 2, для 15 – 1 случай.
- ВСЕГО: N(A)=6+5+4+3+2+1=21.
- **P(A)=21/(90*90)=7/2700 ≈0,0026**. **ОТВЕТ: 7/2700**

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

1 ученик	2 ученик						
10	10	11	12	13	14	25	6 случаев
11	10	11	12	13	14		5 случаев
12	10	11	12	13			4 случая
13	10	11	12				3 случая
14	10	11					2 случая
15	10						1 случай
ВСЕГО СЛУЧАЕВ:							21

Решение примера 4.d)

- **Два ученика независимо друг от друга написали на доске по одному двузначному числу. Найдите вероятность того, что:**

a) эти два числа различны;
b) сумма чисел равна 100;
c) сумма чисел не больше 25;
d) сумма чисел больше 190.

РЕШЕНИЕ: **N=90*90=8100** (по правилу умножения).

Перебор случаев (см. в таблице на следующем слайде):

- Если 1-й ученик выбрал от 10 до 91, то при любом выборе 2-го ученика сумма не может больше 190, поскольку даже 91+99=190.
- Если 1-й ученик выбрал 92, то 2-й ученик может выбрать только одно число 99 (1 вариант).
- Если 1-й ученик выбрал 93, то 2-й ученик может выбрать только 2 числа: 98 или 99 (2 варианта). И т.д.
- Если 1-й ученик выбрал 99, то 2-й ученик может выбрать любое число от 92 до 99 (8 вариантов).
- ВСЕГО: **N(A)=1+2+3+4+5+6+7+8=36.** (см. таблицу на след.слайдах)
- **P(A)=36/(90*90)=1/225 ≈0,0044**. **ОТВЕТ: 1/225**

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

1 ученик									
~~10~~	~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~
~~30~~	~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~
~~40~~	~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~
~~60~~	~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~
~~70~~	~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~
~~80~~	~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~
~~90~~	~~91~~	92	93	94	95	96	97	98	99

91+99=190

2 ученик									
~~10~~	~~11~~	~~12~~	~~13~~	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~
~~20~~	~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~
~~30~~	~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~
~~40~~	~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~
~~60~~	~~61~~	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	~~67~~	~~68~~	~~69~~
~~70~~	~~71~~	~~72~~	~~73~~	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~
~~80~~	~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~
~~90~~	~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~

Если 1-й ученик выбрал от 10 до 91, то при любом выборе 2-го ученика сумма не может больше 190, поскольку даже 91+99=190. А нас интересует событие А = {сумма двузначных чисел больше 190}

1 ученик	2 ученик								Кол-во случаев
92	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	99	1
93	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	98	99	2
94	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	98	99	3
95	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	96	97	98	99	4
96	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	96	97	98	99	5
97	~~92~~	~~93~~	94	95	96	97	98	99	6
98	~~92~~	93	94	95	96	97	98	99	7
99	92	93	94	95	96	97	98	99	8
ВСЕГО СЛУЧАЕВ:									**36**

Если 1-й ученик выбрал 92, то 2-й ученик может выбрать только одно число 99 (1 вариант).

Если 1-й ученик выбрал 93, то 2-й ученик может выбрать только 2 числа: 98 или 99 (2 варианта).

.
.
.

Если 1-й ученик выбрал 99, то 2-й ученик может выбрать любое число от 92 до 99 (8 вариантов).

ВСЕГО: N(A)=1+2+3+4+5+6+7+8=36.

P(A)=36/(90*90)=1/225.

О комбинаторике

- Как мы видим, вычисление значений N и N(A) представляет определенные сложности.
- Прямое перечисление (выписывание, перебор) всех возможностей можно провести лишь в сравнительно небольшом количестве задач.
- Для подсчета количества различных комбинаций, удовлетворяющих тем или иным условиям, используются методы и факты **комбинаторики**.
- Довольно часто говорят, основы комбинаторики и теории вероятностей создали и разработали французские математики XVII века Пьер Ферма и Блез Паскаль.

Теория вероятности
Блез Паскаль
Пьер Ферма

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

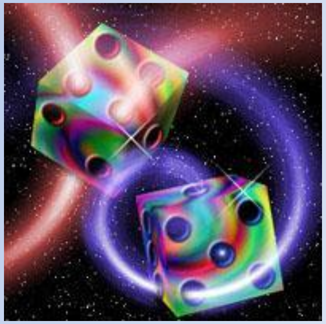
Рассмотрим задачу

- Ферма и Паскаль решали интересные задачи и в переписке между собой и с другими математиками обсуждали подходы к их решению, полученные результаты, связь с другими задачами, возможности применения в новых ситуациях и т.п.
- Рассмотрим задачу, которую можно отнести к задачам, с которых началось развитие теории вероятностей или, как еще тогда говорили, *комбинаторного анализа.*
- Её предложил Паскалю кавалер де Мере – весьма влиятельный деятель при дворе короля Людовика XIV.

Пример 5.

<u>Игральную кость бросают 4 раза.</u>

- **Что более вероятно:**
  - **шестерка появится хотя бы 1 раз, или же,**
  - **шестерка не появится ни разу?**



Решение примера 5

- По правилу умножения при четырехкратном бросании игральной кости **$N=6*6*6*6=6^4=1296$** исходов.
- Сама формулировка задачи ясно указывает на то, что мы имеем дело с парой противоположных друг другу событий.
- Что же обозначить за **A**, а что - **$\bar{A}$**?
- То событие, вероятность которого проще сосчитать, удобно обозначить **A**.

Решение примера 5

- Что означает “*появление шестерки хотя бы один раз* “?
- Для появления шестерки много различных ситуаций:
  - шестерка при третьем бросании,
  - Шестерка при первом и третьем бросании и т.п.
- Не очень пока ясно, как их все пересчитать.
- Мы не будем этого делать.

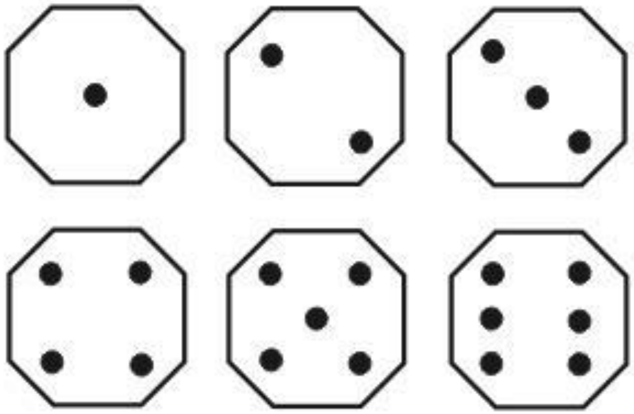
Решение примера 5

- Пусть событие А= {*шестерка не появится ни разу*}.
- Это означает, что при каждом из 4 бросков имеется **ровно 5 исходов**: выпадение 1, 2, 3, 4, 5.
- По правилу умножения: $N(A)=5*5*5*5=5^4=625$.
- Значит, $\mathbf{P(A)=5^4/6^4=625/1296\approx 0,4823}$;
- $\mathbf{P(\bar{A})=1-P(A)=1-0,4823\approx 0,5177}$.
- Таким образом, $\mathbf{P(\bar{A})>P(A)}$.

ОТВЕТ: **появление хотя бы одной шестерки более вероятно, чем полное отсутствие шестерок при четырех бросаниях игральной кости.**

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Можно и так решить задачу:



На каждой из четырех костей может выпасть любое из шести чисел, независимо друг от друга.

Всего вариантов $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$

Количество вариантов без шестерки будет, соответственно, $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$

В остальных $1296 - 625 = 671$ вариантах шестерка выпадет хотя бы один раз.

Значит, появление шестерки хотя бы один раз при четырех бросаниях происходит чаще, чем ее непоявление.

Для 3 бросаний ответ другой

- **$P(A)=5^3/6^3=125/216$;**
- **$P(\bar{A})=1-P(A)=1-125/216=91/216$.**
- Таким образом, **$P(\bar{A})<P(A)$**.

ОТВЕТ: **полное отсутствие шестерок более вероятно, чем появление хотя бы одной шестерки при трех бросаниях игральной кости.**

Пьер Ферма (1601-1665)

Великий французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года – советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот.

Математика всегда была для Ферма лишь увлечением, и тем не менее он заложил основы многих ее областей. Автор ряда выдающихся научных работ, большинство из которых было издано после смерти Ф. его сыном, – "Различные сочинения" (1679); при жизни Ферма полученные им результаты становились известны учёным благодаря переписке и личному общению.

http://www.peoples.ru/science/mathematics/fermat/

Блез Паскаль (1623-1662)

- Блез Паскаль родился в Клермон-Ферране в семье юриста, интересовавшегося естествознанием и математикой и давшего своим детям широкое и глубокое образование. У Паскаля очень рано проявились математические способности. В 12 лет он освоил "Начала" Евклида. Уже в 16 лет он написал оригинальное сочинение о конических сечениях, где использовал метод Дезарга для доказательства одной из основных теорем проективной геометрии. В 1645 г. он разработал арифметическую машину для автоматизации вычислений — прообраз современных компьютеров. В области теории чисел Паскаль установил общий признак делимости любого целого числа на любое целое число, а также изобрел арифметический треугольник («треугольник Паскаля»), позволяющий легко подсчитывать биномиальные коэффициенты

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Французский математик, физик, религиозный философ и писатель.

-Сформулировал одну из основных теорем проективной геометрии.

-Работы по арифметике, теории чисел, алгебре, теории вероятностей.

-Сконструировал суммирующую машину.

-Один из основоположников гидростатики, установил ее основной закон (Закон Паскаля: давление на поверхность жидкости, производимое внешними силами, передается жидкостью одинаково во всех направлениях). На законе Паскаля основано действие гидравлических прессов и других гидростатических машин.

-Работы по теории воздушного давления.

-Произведения: «Письма к провинциалу», «Мысли» в них он развивает представление о трагичности и хрупкости человека, находящегося между двумя безднами — бесконечностью и ничтожеством (человек — «мыслящий тростник»). Сыграл значительную роль в формировании французской классической прозы.

http://taina.aib.ru/biography/blez-paskal.htm

Для учителей математики

Название §51 «Простейшие вероятностные задачи» в учебнике для 10—11 классов совпадает с названием §20 в учебнике для 9 класса. Эти параграфы совпадают между собой и по содержанию: вероятность как модель реальных случайных событий, классическое определение вероятности, алгоритм вычисления вероятности по этому определению, связь между вероятностью события и противоположного ему события — вот основные акценты в §51. В то же время прямых цитирований из учебника для 9 класса нет. Тем самым уже известный из основной школы учебный материал повторяется и закрепляется на новом массиве примеров и задач.

Для учителей математики

Термин «простейшие» в применении к вероятностным задачам означает отсутствие формульной комбинаторики (числа размещений и сочетаний). Во всех примерах и задачах этого параграфа вполне хватает правила умножения, формулировка которого мы, разумеется, повторяется и в данном учебнике для старшей школы. Поэтому, несмотря на присутствие термина «вероятностные» в названии параграфа, с учебной точки зрения в §51 закрепляется умение работать с простейшими комбинаторными ситуациями: проводить непосредственный перебор всех случаев, разумно организовывать перебор и использовать правило умножения. Пожалуй, единственным отличием является отсутствие дерева всевозможных вариантов. Этот материал остается в основной школе.

Для учителей математики

Рассмотрение цепочки последовательно усложняющихся комбинаторных примеров подводит к необходимости расширить имеющийся технический аппарат комбинаторики. Грубо говоря, становится уже тесновато действовать в рамках лишь перебора и правила умножения. Тем самым структурно §51 образует мостик между материалом в той или иной мере известным из курса основной школы и новыми для учеников понятиями размещения и сочетания.

Хотелось бы обратить специальное внимание на **пример 5**: «Игральную кость бросают четыре раза. Что более вероятно: то, что шестерка появится хотя бы один раз, или же, что шестерка не появится ни разу?» Он интересен с исторической точки зрения, так как послужил одной из отправных точек к созданию в XVII веке теории вероятностей.

Для учителей математики

Важен он и содержательно, так как по существу является одной из простейших схем Бернулли независимого повторения испытания с двумя исходами, т. е. является своего рода пропедевтикой материала §54, заключительного в этой главе. Кроме того, в анализе этого примера ясно указано, что основой решения является (в очередной раз!) *правило умножения*. Если действовать предполагая, что теорема Бернулли заранее известна, то ответ для вероятности того, что шестерка не появится ни разу, следовало бы получить как $P(A)=(5/6)^4$. Мы получаем тот же ответ, но как $P(A)=5^4/6^4$, где для вычисления и числителя, и знаменателя применяется уже хорошо известное правило умножения.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Для учителей математики

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ и } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

В §52, формально, приведены сведения об использовании двух, пожалуй наиболее знакомых большинству учителей, комбинаторных формул (см. вверху). Во многих УМК для школы при изложении этого учебного материала авторы выбирают стиль, близкий к справочной литературе. А именно, кратко формулируют определения того, что имен C_n^k обоз A_n^k чается символами С* и А*, сообщают две приведенные выше формулы и дают несколько примеров их использования. Нет сомнений, что это самый короткий путь к использованию указанных формул при решении задач. Зачастую такой комбинаторный «ликбез» проводится и в 9 классе, а в некоторых УМК даже и в 7 классе.

Справочные материалы

Элементарные события (элементарные исходы) опыта — простейшие события, которыми может окончиться случайный опыт. Сумма вероятностей всех элементарных событий опыта равна 1.

Вероятность события A равна сумме вероятностей элементарных событий, благоприятствующих этому событию.

Объединение событий $A \cup B$ — событие, состоящее из элементарных исходов, благоприятствующих хотя бы одному из событий A, B.

Пересечение событий $A \cap B$ — событие, состоящие из элементарных исходов, благоприятствующих обоим событиям A и B.

Противоположное событие. Событие $\bar{A}$, состоящее из тех и только тех элементарных исходов опыта, которые не входят в A, называется противоположным событию A.

Несовместные события — события, которые не наступают в одном опыте. Например, противоположные события несовместны.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Вероятности противоположных событий:

$$P(A)+P(\bar{A})=1; \quad P(\bar{A})=1-P(A).$$

Формула сложения вероятностей:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B).$$

Формула сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

Формула умножения вероятностей:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A),$$

где $P(B|A)$ — условная вероятность события B при условии, что событие A наступило.

Независимые события. События A и B называются независимыми, если

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B).$$

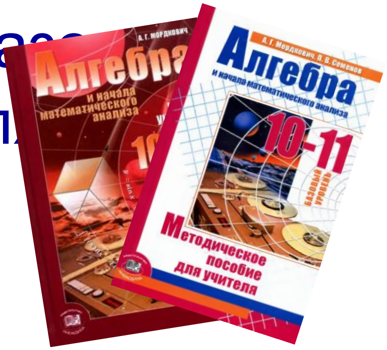
Формула вероятности k успехов в серии из n испытаний Бернулли:

$$C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний, p — вероятность успеха, $q=1-p$ — вероятность неудачи в одном испытании.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Ба
уровень) Методическое пособие для учител
Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010



- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы
- ЕГЭ 2013. Математика. Задача В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь. Изд. второе, дополненное. Под ред. А.Л.Семенова и И.В. Ященк
М., Изд. МЦНМО, 2013