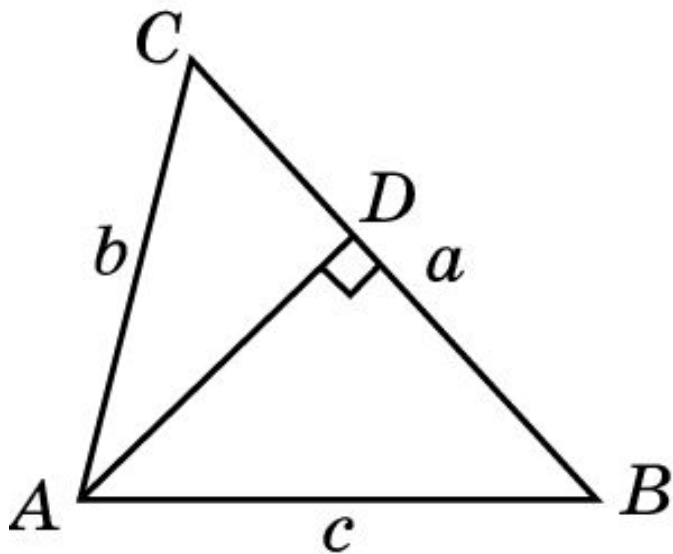


# Теорема косинусов

**Теорема.** (Теорема косинусов.) Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними,  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .



**Доказательство:** Обозначим  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$ . Из вершины  $A$  опустим перпендикуляр  $AD$ . Тогда  $AD = b \sin C$ ,  $CD = b \cos C$ ,  $BD = a - b \cos C$ . По теореме Пифагора имеем  $c^2 = (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C + b^2 \sin^2 C = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

Самостоятельно рассмотрите случаи прямого и тупого угла  $C$ .

## Пример

Даны три стороны треугольника  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ . Найдите косинусы его углов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

Ответ:  $\cos A = \frac{7}{8}$ ,  $\cos B = \frac{11}{16}$ ,  $\cos C = -\frac{1}{4}$ .

## Упражнение 1

В треугольнике  $ABC$   $AB = 12$  см,  $AC = 8$  см,  $\angle A = 60^\circ$ . Найдите третью сторону.

Ответ:  $4\sqrt{7}$ .

## Упражнение 2

Найдите сторону треугольника, лежащую против угла в  $120^\circ$ , если прилежащие к нему стороны равны: а) 6 см и 10 см; б) 14 мм и 16 мм.

**Ответ:** а) 14 см; б) 26 мм.

## Упражнение 3

При каких значениях угла  $A$  квадрат стороны треугольника, лежащей против этого угла: а) меньше суммы квадратов двух других сторон; б) равен сумме квадратов двух других сторон; в) больше суммы квадратов двух других сторон?

**Ответ:** Угол  $A$ : а) острый; б) прямой; в) тупой.

## Упражнение 4

Не вычисляя углы треугольника, укажите его вид (относительно углов), если стороны треугольника равны: а) 7, 8, 12; б) 0,3, 0,4, 0,5; в) 13, 14, 15.

**Ответ:** а) Тупоугольный;  
б) прямоугольный;  
в) остроугольный.

## Упражнение 5

Как расположен центр описанной окружности относительно треугольника, стороны которого равны: а) 6, 8, 10; б) 4, 5, 6; в) 3, 4, 6?

**Ответ:** а) На стороне треугольника;  
б) внутри треугольника;  
в) вне треугольника.

## Упражнение 6

Даны диагонали параллелограмма  $c$  и  $d$  и угол между ними  $\varphi$ . Найдите стороны параллелограмма.

**Ответ:**  $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cos \varphi}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 + 2cd \cos \varphi}$ .



## Упражнение 7

Даны стороны параллелограмма  $a$  и  $b$  и один из его углов  $\psi$ . Найдите диагонали параллелограмма.

Ответ:  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \psi}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \psi}$ .

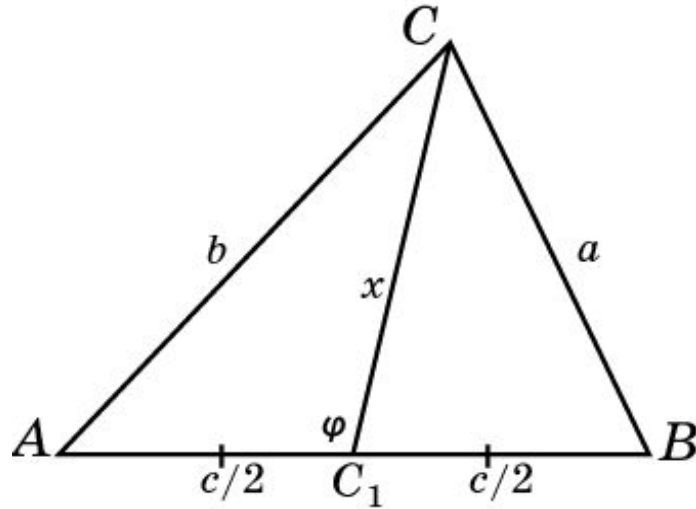
## Упражнение 8

Стороны параллелограмма равны 30 мм и 35 мм, одна диагональ 55 мм. Найдите другую диагональ.

Ответ: 35 мм.

## Упражнение 9

Стороны треугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найдите медиану, проведенную к стороне  $c$ .



**Решение:** Пусть  $CC_1$  – медиана треугольника  $ABC$ ,  $CC_1 = x$ .

По теореме косинусов, примененной к треугольнику  $AC_1C$ , имеем  $b^2 = x^2 + \frac{c^2}{4} - bc \cos \varphi$ . По теореме косинусов, примененной к треугольнику  $BC_1C$ , имеем

$a^2 = x^2 + \frac{c^2}{4} + bc \cos \varphi$ . Складывая эти два равенства и выражая  $x$  через  $b$  и  $c$  получим  $x = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ .