



# 18. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. В этом случае могут возникнуть *затухающие колебания*.

Рассмотрим колебательную систему в которой помимо возвращающей силы имеются силы сопротивления. Запишем второй закон Ньютона для тела массой  $m$ .

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} = m\vec{a}$$

Возвращающая сила является квазиупругой

$$\vec{F}_{упр} = -k\vec{x}$$

Сила сопротивления пропорциональна скорости ( $b$  – коэффициент сопротивления)

$$\vec{F}_{\tilde{m} \ddot{\delta}} = -b\vec{v}$$

В проекциях уравнение принимает вид:

$$-kx - b\upsilon = ma$$

$$-kx - bx' = mx''$$

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$x'' + \frac{b}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

Коэффициент затухания

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

Квадрат собственной  
циклической частоты

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Получили дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = 0$$

Для решения однородного ДУ 2-го порядка запишем характеристическое уравнение и найдем его корни (сведения из математики):

$$mx'' + bx' + kx = 0$$

$$a^2 + \frac{b}{m}a + \frac{k}{m} = 0$$

$$D = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}$$

$$a_{1,2} = \frac{-\frac{b}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2}$$

$$a_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{(-1)\left(\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right)} = -\frac{b}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$a_{1,2} = -\beta \pm i\omega, \quad i = \sqrt{-1}$$

Решением ДУ является функция вида:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \left( \cos(\omega t + \varphi_0) + \sin(\omega t + \varphi_0) \right)$$

$$\beta = \frac{b}{2m}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

где  $A_0$  и  $\varphi_0$  – начальные амплитуда и начальная фаза соответственно.



Следовательно, решением ДУ является функция, описывающая зависимость координаты тела при затухающих колебаниях:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где  $A_0$  и  $\varphi_0$  – начальные амплитуда и начальная фаза соответственно.

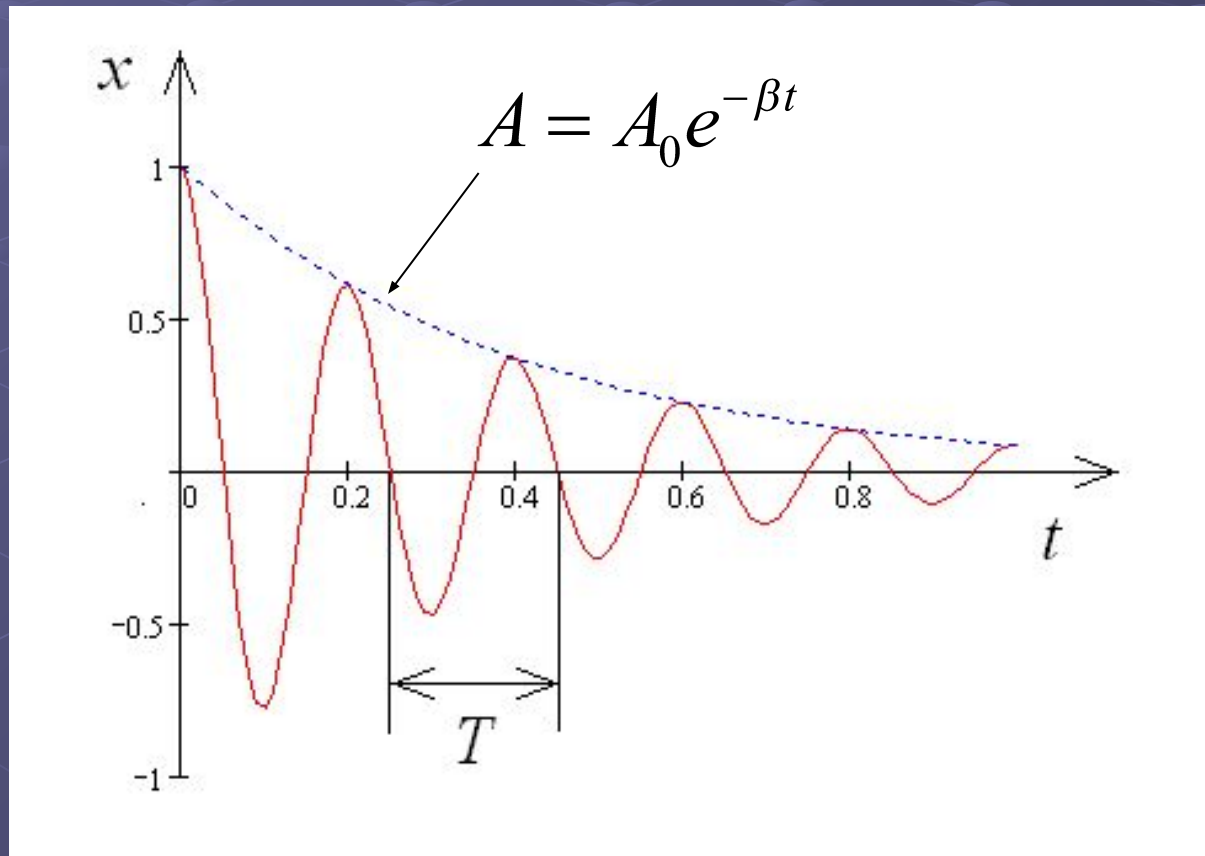
Функция удовлетворяет условию:

$$x(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0$$

Графически зависимость  $x(t)$  выглядит как гармоническое колебание с уменьшающейся амплитудой. Например:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

$$A_0 = 1, \quad \beta = 2,5 \tilde{n}^{-1}$$



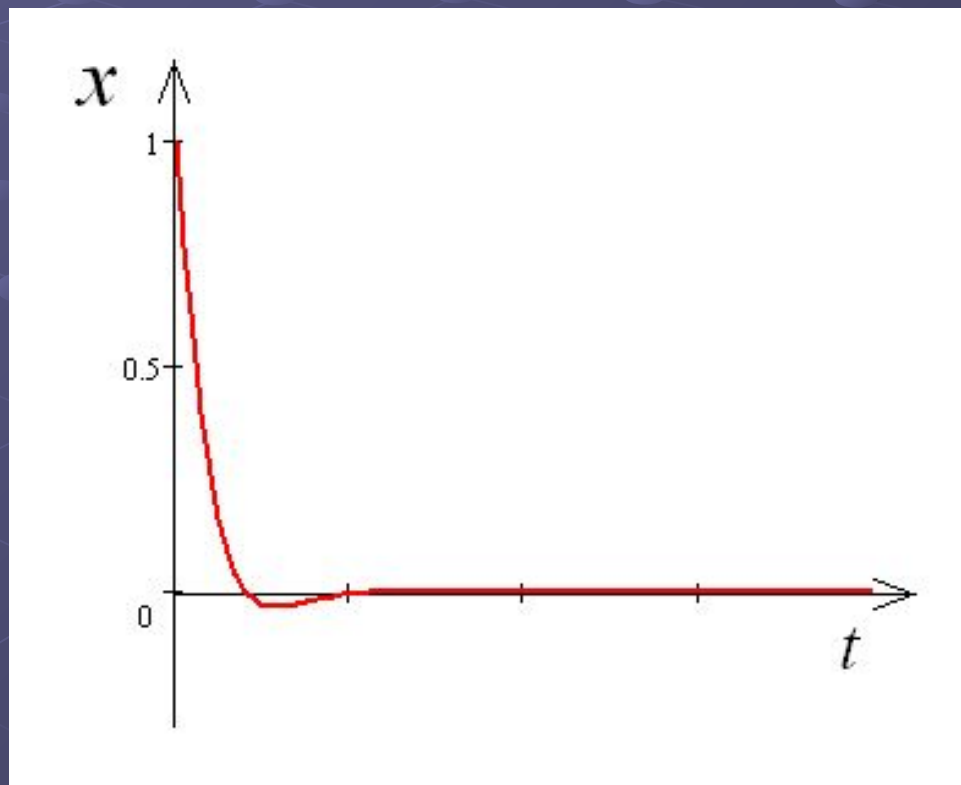
Циклическая частота затухающих колебаний уменьшается по сравнению с собственной частотой колебаний системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Период колебаний увеличивается по сравнению с собственным периодом  $T_0$ :

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > T_0 \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

При увеличении коэффициента затухания  $\beta$  период затухающих колебаний возрастает и обращается в бесконечность при  $\beta = \omega_0$ . Такое движение системы не имеет колебательного характера и называется *апериодическим движением*.



Практическое применение аperiodического движения:

1. Плавное закрытие дверей;
2. Амортизаторы автомобилей;
3. Успокоение колебаний стрелочных приборов (воздушные, электромагнитные демпферы).

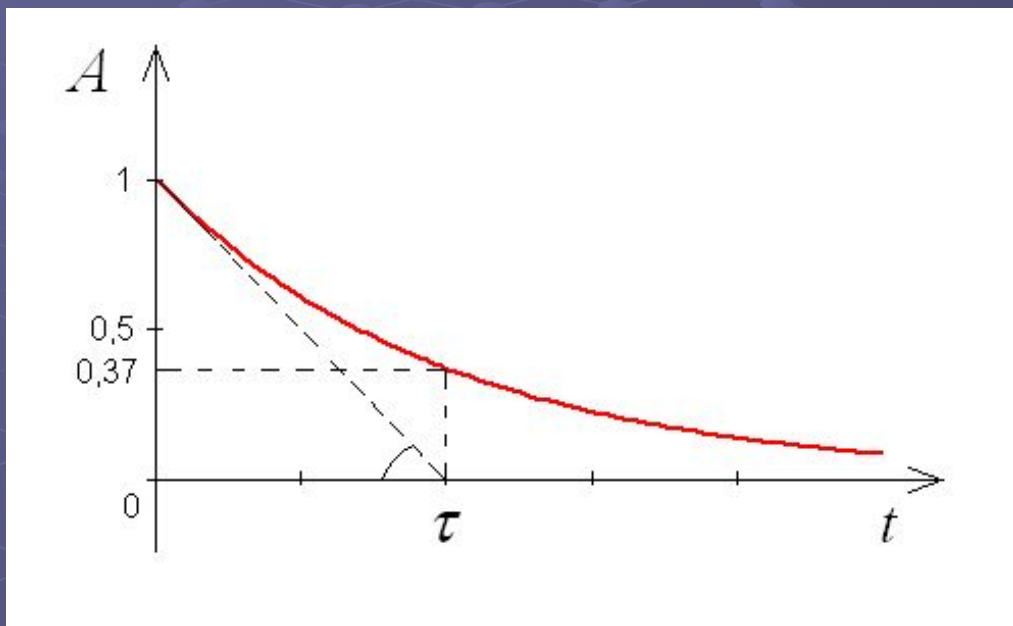
Амплитуда колебания со временем уменьшается по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}$$

Промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется временем релаксации:

$$\tau = \frac{1}{\beta}$$

Однако время релаксации можно определить и другим способом. Найдем производную функции  $A(t)$  в начальный момент времени.



$$A' = \left( A_0 e^{-\beta t} \right)' = -\beta A_0 e^{-\beta t}$$

$$A'(0) = -\beta A_0 = -\frac{A_0}{\tau}$$

Время релаксации можно определить по касательной в начальной точке. Пример: моделирование процессов релаксации (радиоактивный распад).

Для количественной характеристики быстроты убывания амплитуды затухающих колебаний пользуются понятиями *декремента*  $\delta$  (отношение амплитуд через период) и *логарифмического декремента*  $\lambda$  затухания:

$$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e}$$

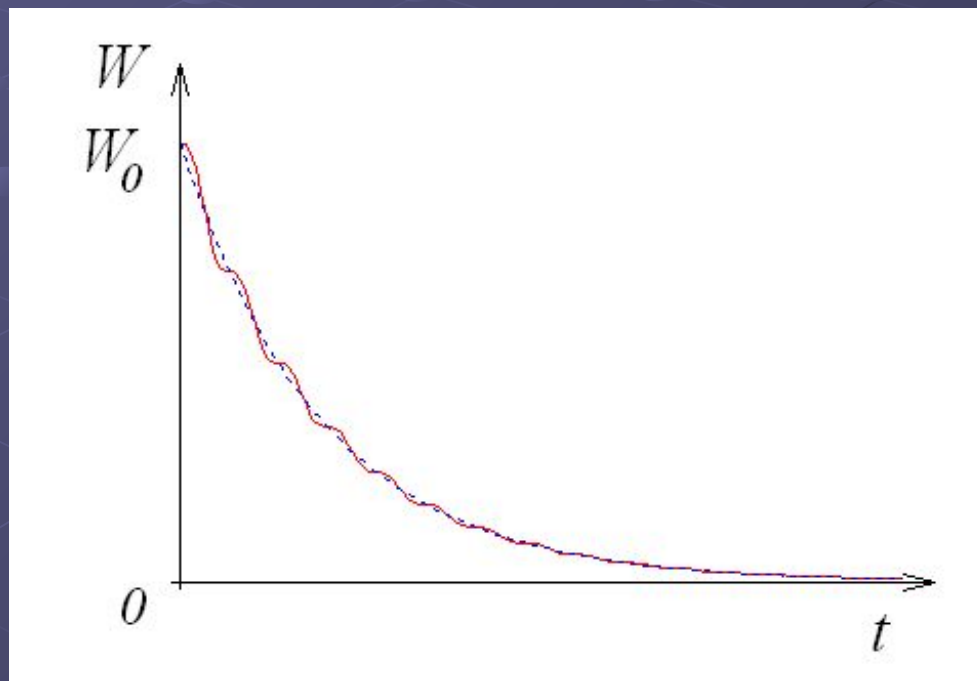
$N_e$  – число колебаний за время, равное времени релаксации.



Полную энергию можно найти, подставив выражение для смещения и скорости в формулу:

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Зависимость полной энергии от времени представлена на рисунке.



При малом затухании ( $\beta \ll \omega$ ) выражение для полной энергии колебательной системы принимает вид:

$$W = W_0 e^{-2\beta t}$$

Полная энергия колебательной системы уменьшается со временем по экспоненциальному закону.

Добротностью  $Q$  колебательной системы называется безразмерная величина, равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии системы в произвольный момент времени к убыли этой энергии за период:

$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} =$$
$$= 2\pi \frac{e^{-2\beta t}}{e^{-2\beta t} - e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}$$

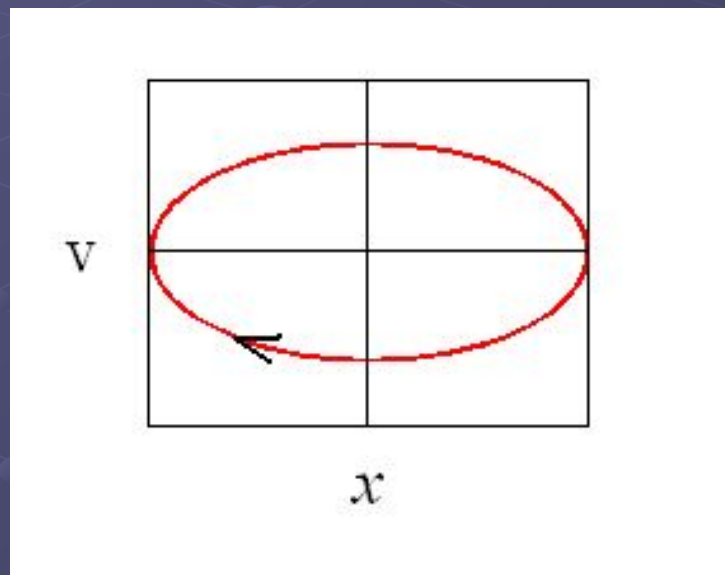
При малом затухании:

$$Q \approx \frac{2\pi}{1 - (1 - 2\beta T)} = \frac{\pi}{\beta T} = \pi N_e$$

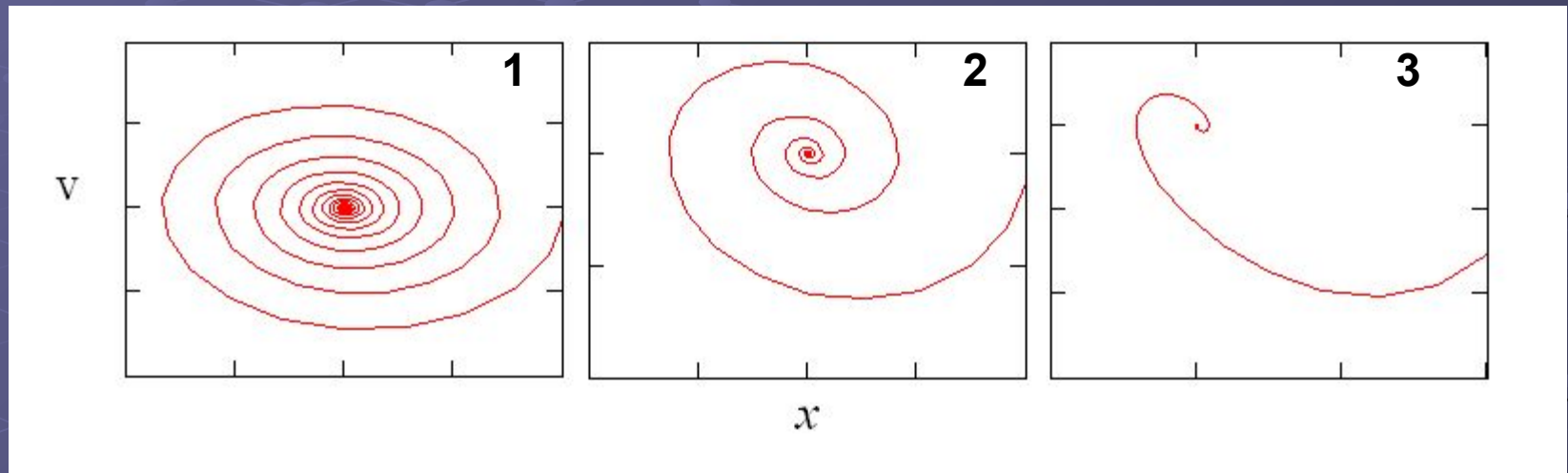
Добротность пропорциональная числу колебаний за время релаксации  $N_e$ .

В ряде случаев удобно изучать колебательные процессы в системе координат  $(x, v)$ . Плоскость таких координат называют *фазовой плоскостью*, - а кривая – *фазовой траекторией*.

Например, *фазовым портретом* гармонического колебания является эллипс.



Фазовым портретом затухающего колебания является винтовая линия (спираль).



С увеличением номера рисунка растет коэффициент затухания.



# 19. Вынужденные колебания. Резонанс

***Вынужденными колебаниями*** называются незатухающие колебания системы, которые вызываются действием на нее внешних сил, периодически изменяющихся во времени.

Примеры вынужденных колебаний: колебания мембраны телефона, колебания силы тока в электрической сети, колебания гребных винтов, валов турбин под действием периодически изменяющихся внешних сил.



В качестве модели рассмотрим тело, совершающее колебания под действием возвращающей квазиупругой силы, силы сопротивления и внешней периодической силы. Второй закон Ньютона принимает вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F} = m\vec{a}$$

$$-kx - bv + F_o \cos \omega t = ma$$

Преобразуя, получаем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (1):

$$mx'' + bx' + kx = F_0 \cos \omega t \quad (1)$$

$$x'' + 2\beta x' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

$$\beta = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

$\beta$  и  $\omega_0$  – коэффициент затухания и циклическая частота свободных незатухающих колебаний.

Решение дифференциального уравнения вынужденных колебаний равно сумме двух решений: общего и частного:

$$x(t) = x_{\theta}(t) + x(t)$$

Общее решение – уравнение затухающего колебания, частное – установившееся колебание, описываемое уравнением:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

где  $A$  – амплитуда вынужденных колебаний смещения,  $\varphi$  – разность фаз между колебаниями смещения и силы.

Подставим решение (2) в уравнение (1) и определим амплитуду и фазу между силой и смещением:

$$-m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) - bA\omega \sin(\omega t + \varphi) + kA \cos(\omega t + \varphi) = F_0 \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} & -m\omega^2 A (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) - \\ & -bA (\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)) + \\ & +kA (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) = F_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

при косинусе

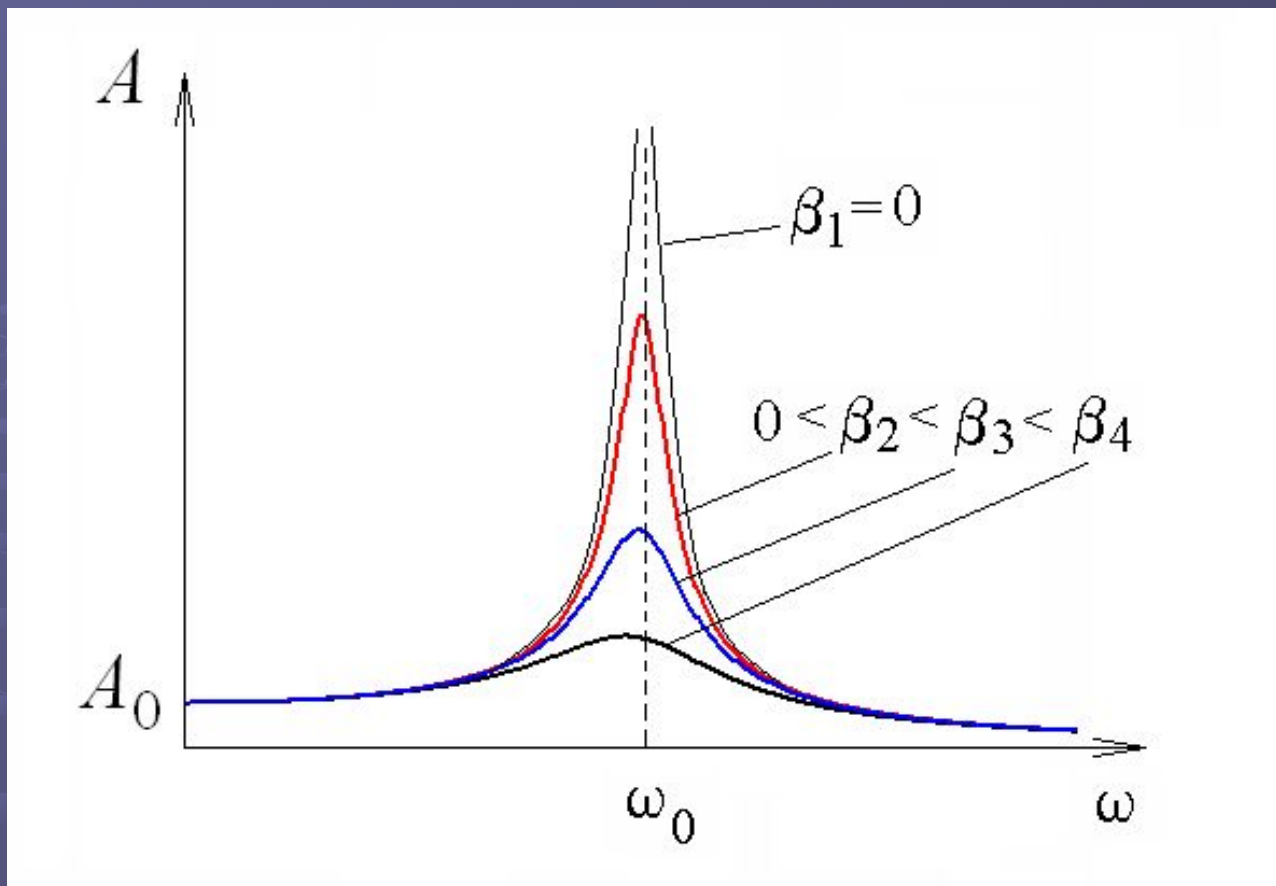
$$-m\omega^2 A \cos(\varphi) - bA\omega \sin(\varphi) + kA \cos(\varphi) = F_0 \quad (3)$$

при синусе

$$m\omega^2 A \sin(\varphi) - bA\omega \cos(\varphi) + kA \sin(\varphi) = 0 \quad (4)$$

Решая совместно (3) и (4), находим амплитуду  $A$  установившихся вынужденных колебаний и сдвиг фаз между колебаниями силы и смещения:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

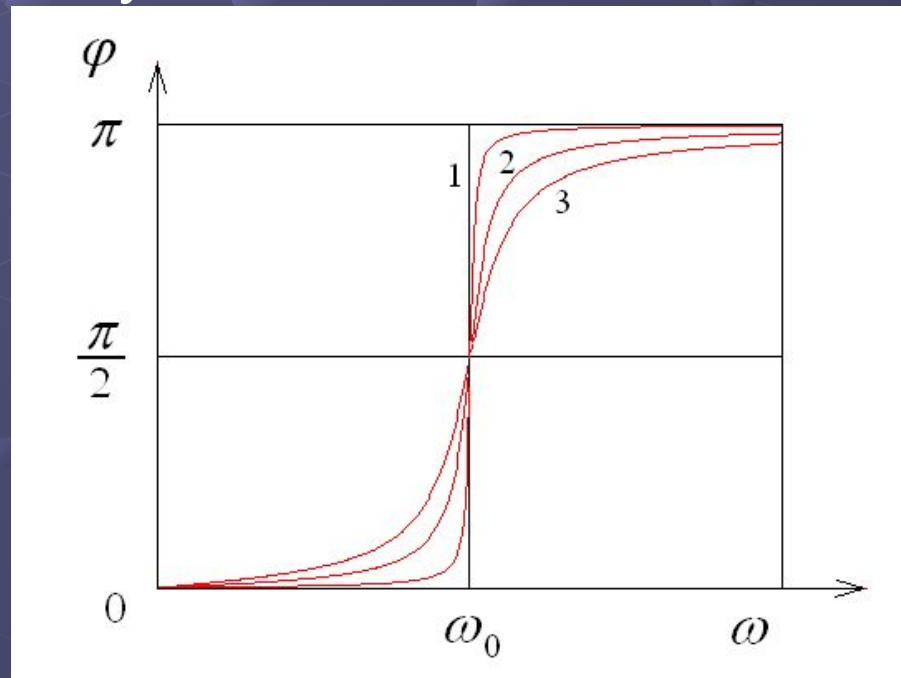


Амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает при приближении к некоторой частоте – явление *резонанса колебаний*. С увеличением коэффициента затухания амплитуда в колебаний при резонансе снижается.

Разность фаз между колебаниями силы и смещения определяется соотношением:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

График зависимости угла отставания колебаний смещения от силы представлен на рисунке. Увеличению номера соответствует увеличение коэффициента затухания.





В области малых частот амплитуда вынужденных колебаний почти постоянна, а сдвиг фаз равен нулю:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \quad \varphi = 0$$

$$x(t) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} \cos(\omega t)$$

В области малых частот колебания системы практически без искажения следуют за силой. Это важно с точки зрения измерительной техники.

Для нахождения резонансной частоты для амплитуды колебаний необходимо найти максимум функции  $A(\omega)$ , т.е. приравнять к нулю производную по частоте:

$$\left( \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \right)' = 0$$

В результате, резонансная частота равна:

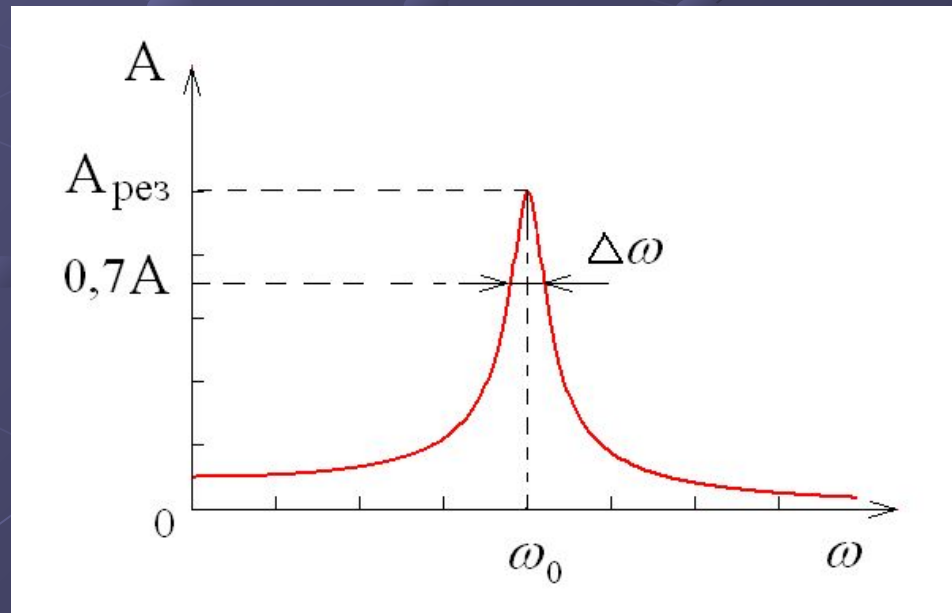
$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Форма резонансной кривой определяется добротностью колебательной системы. Так отношение амплитуд на резонансной частоте и  $A_0$  равно добротности:

$$\frac{A_{рез}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\lambda} = Q$$

Добротность равна отношению резонансной частоты к ширине резонансной кривой на уровне  $0,7A_{рез}$ .

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$



Резонансная частота для амплитуды скорости находится аналогичным образом:

$$v_0(\omega) = \omega A(\omega)$$

$$\left( \frac{\omega F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right)' = 0$$

$$\omega_p^{\text{скор}} = \omega_0$$

Для анализа частотной зависимости амплитуды ускорения необходимо исследовать функцию:

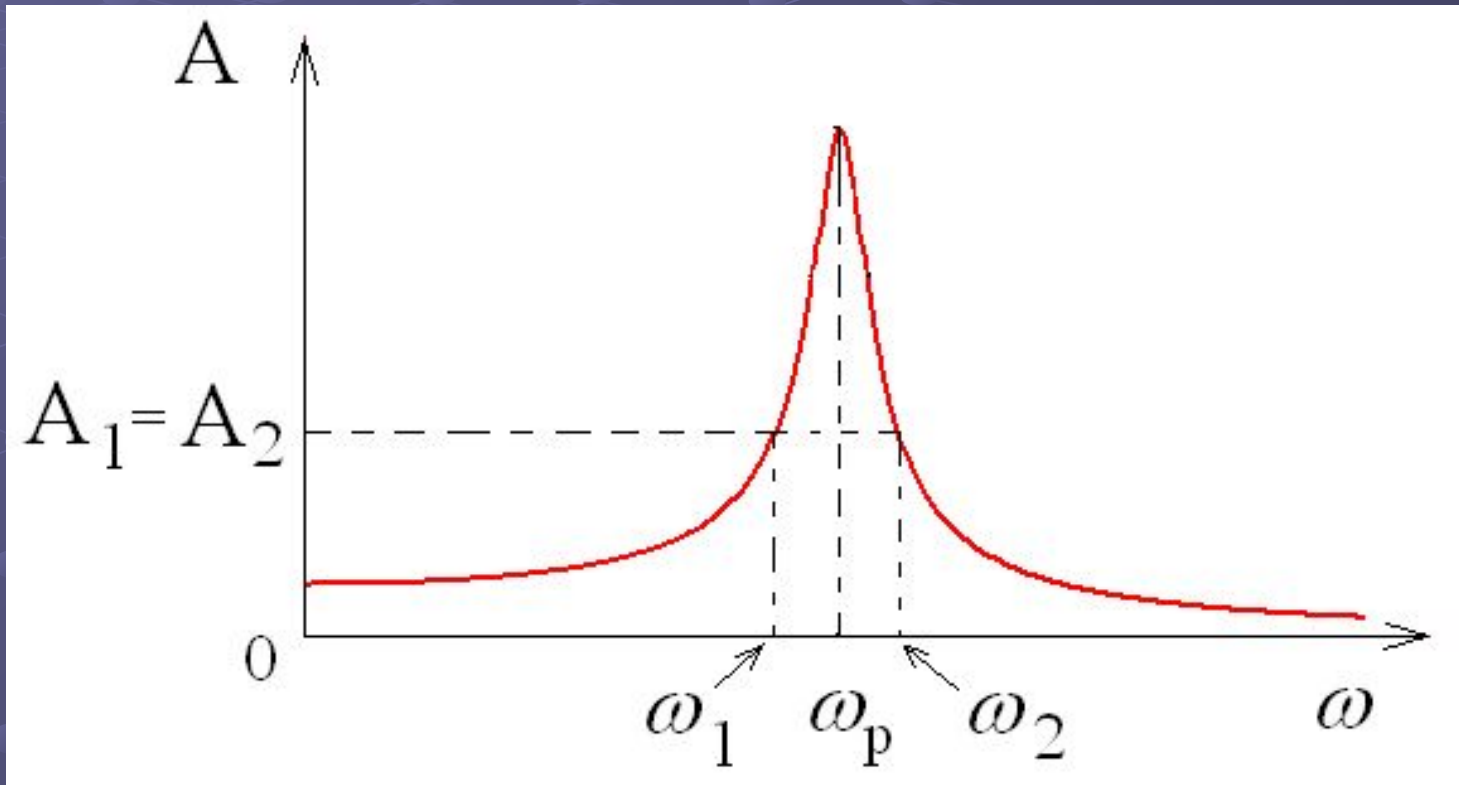
$$a_0(\omega) = \omega^2 A(\omega)$$

$$\left( \frac{\omega^2 F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \right)' = 0$$

Резонансная частота для амплитуды ускорения определяется соотношением

$$\omega_p^{\text{уск}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}$$

Приведем пример определения резонансной частоты для амплитуды смещения. Для этого находят частоты, на которых амплитуды одинаковы.



Вычисляют резонансную частоту.

$$A_1(\omega_1) = A_2(\omega_2)$$

$$\frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\beta^2\omega_1^2}} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\beta^2\omega_2^2}}$$

$$\omega_\delta = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad \omega_\delta = \sqrt{\frac{\omega_2^2 + \omega_1^2}{2}}$$

Явление резонанса необходимо учитывать при конструировании машин и сооружений. Резонансная частота не должна быть близка к внешней частоте.

Явление резонанса используется в акустике, радиотехнике, в науке и технике.



## Параметрические колебания

Возбудить незатухающие колебания можно и другим способом – периодическим изменением в такт с колебаниями системы одного из параметров системы. Например, с помощью периодического изменения длины маятника. Подобные колебания называются *параметрическими*.

В момент прохождения маятником равновесия, под действием силы уменьшается длина маятника. В результате угол отклонения увеличивается. Таким образом, под действием внешнего воздействия (изменения длины маятника) поддерживаются незатухающие колебания.

$$\frac{mv_1^2}{2} = mgl(1 - \cos \alpha)$$

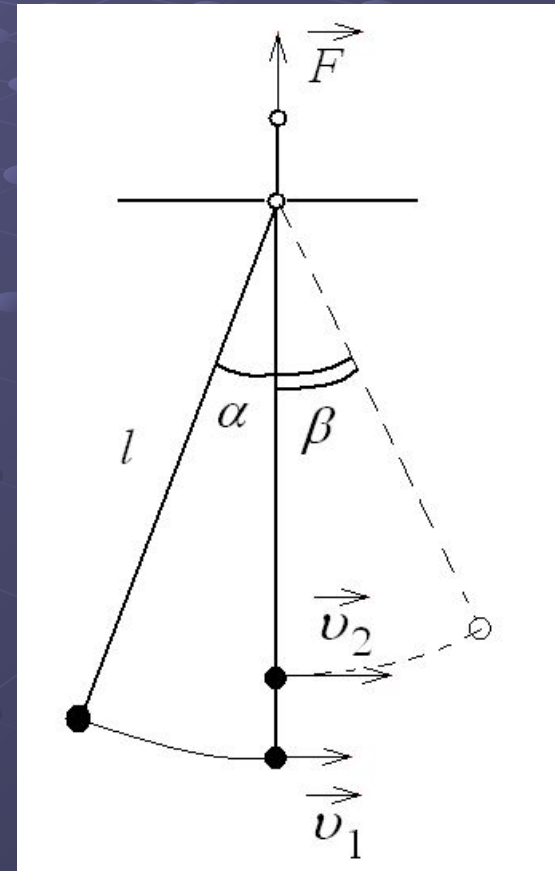
$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

$$mv_1 l = mv_2 (l - \Delta l)$$

$$v_2 = v_1 \frac{l}{l - \Delta l}$$

$$v_2 = \sqrt{2g(l - \Delta l)(1 - \cos \beta)}$$

$$\beta \approx \alpha \left( \frac{l}{l - \Delta l} \right)^{\frac{3}{2}}$$



## Автоколебания

Восполнять убыль энергии можно за счет поступлений энергии извне в определенные моменты времени (согласованно). Можно сделать так, чтобы колеблющаяся система сама управляла внешним воздействием, обеспечивая согласованность сообщаемых ей толчков со своим движением. Такая система называется *автоколебательной*, а совершаемые незатухающие колебания – *автоколебаниями*.

Примеры: колебания маятника в часах, ламповый генератор.