Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Двойные интегралы

ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Определение. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$

или $z = f(P)$ определенную в некоторой замкнутой

области $D \subset R^2$. Разобьем область D какими-нибудь

линиями на n областей $D_1, \ldots, D_n$, которые могут пересекаться

только по своим границам. Обозначим площадь области D_k через ΔS_k, тогда $\Delta S_1 + \ldots + \Delta S_n = S_D$

где S_D – площадь области D. В каждой из областей D_k выберем произвольным образом точку P_k.

Вычислим значение $f(P_k)$ функции f в точке P_k.

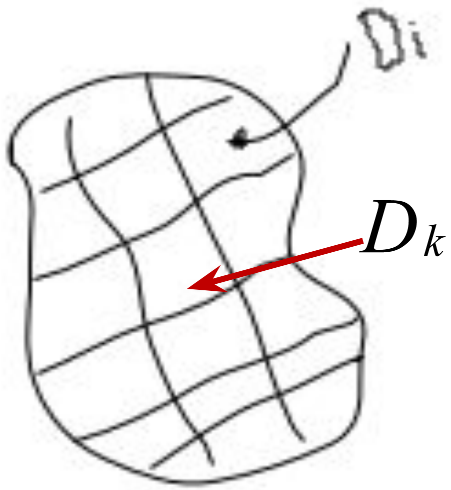


Рис. 1

Определение 1. Сумма вида

$$\sigma(P_k, \Delta S_k) = f(P_1)\cdot\Delta S_1 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta S_n$$

называется ***двойной интегральной суммой***

для функции $z = f(P)$ в области

$D \subset R^2$

Число $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta S_k$ называется

диаметром разбиения области D .

Определение 2. Если существует конечный предел двойной интегральной суммы

$$\sigma(P_k, \Delta S_k) = f(P_1)\cdot \Delta S_1 + \ldots + f(P_n)\cdot \Delta S_n$$

при стремлении диаметра разбиения к нулю и этот предел не зависит ни от способа разбиения области D на части, ни от выбора в них промежуточных точек $P_1, \ldots, P_n$ то этот предел называется

двойным интегралом от функции по области $D \subset R^2$, а сама функция называется ***интегрируемой в области*** D.

Для двойного интеграла используется следующее обозначение:

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy$$

Достаточное условие существования двойного интеграла

- **Теорема.** Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D \subset R^2$, то она интегрируема на этой области и существует ее двойной интеграл по области D.

$$\iint_D f(x; y)\,dxdy = \lim_{d \to 0} \sigma\left(P_k, \Delta S_k\right)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Функция $z = f(x, y)$

непрерывна в области $D \subset R^2$

$$f(x;y) \geq 0 \quad \forall\, (x;y) \in D$$

Тогда в формуле

$$\sigma(P_k, \Delta S_k) = f(P_1)\cdot\Delta S_1 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta S_n$$

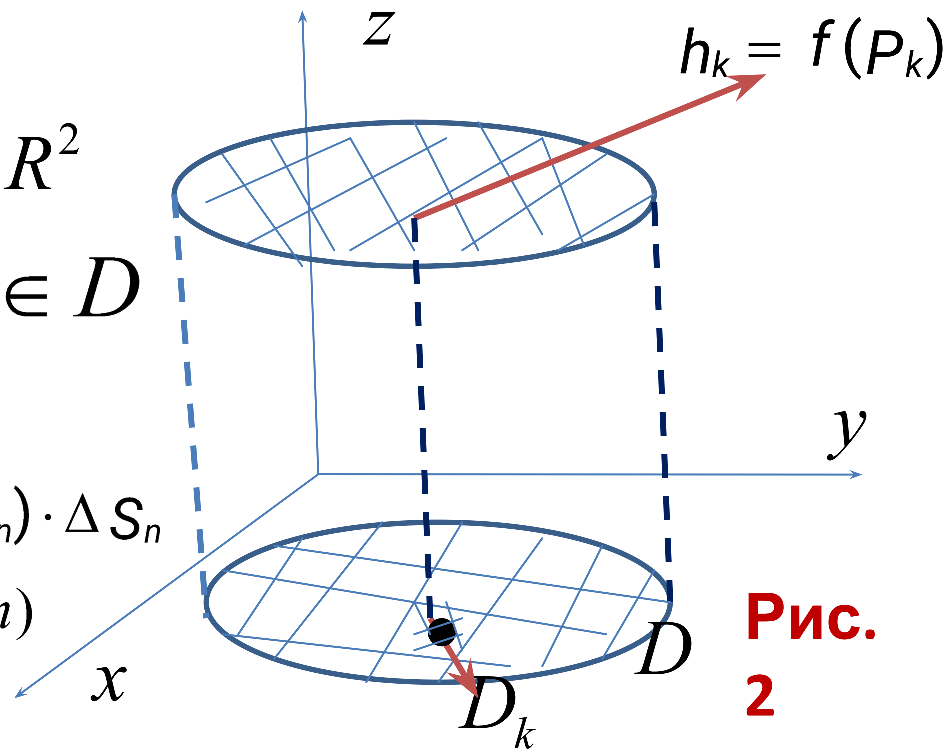


Рис. 2

Слагаемое $f(P_k)\cdot\Delta S_k \quad (1 \leq k \leq n)$ представляет собой объем цилиндрического тела с основанием D_k площадь которого ΔS_k, высота $h_k = f(P_k)$.

Следовательно, двойная интегральная сумма

$$\sigma(P_k, \Delta S_k) = f(P_1)\cdot\Delta S_1 + \ldots + f(P_n)\cdot\Delta S_n \quad ,$$

как сумма объемов указанных элементарных цилиндров, равна объему V_n некоторого ступенчатого цилиндрического тела.

Тогда предел

$$\iint\limits_D f(x;y)dxdy = \lim_{d\to 0}\sigma(P_k, \Delta S_k)$$

совпадает с объемом тела V, ограниченного снизу областью D, сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, сбоку − цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области D. Рис . 2, 4.

Объем цилиндрического тела

$$V = \iint\limits_D f(x; y)\,dxdy$$

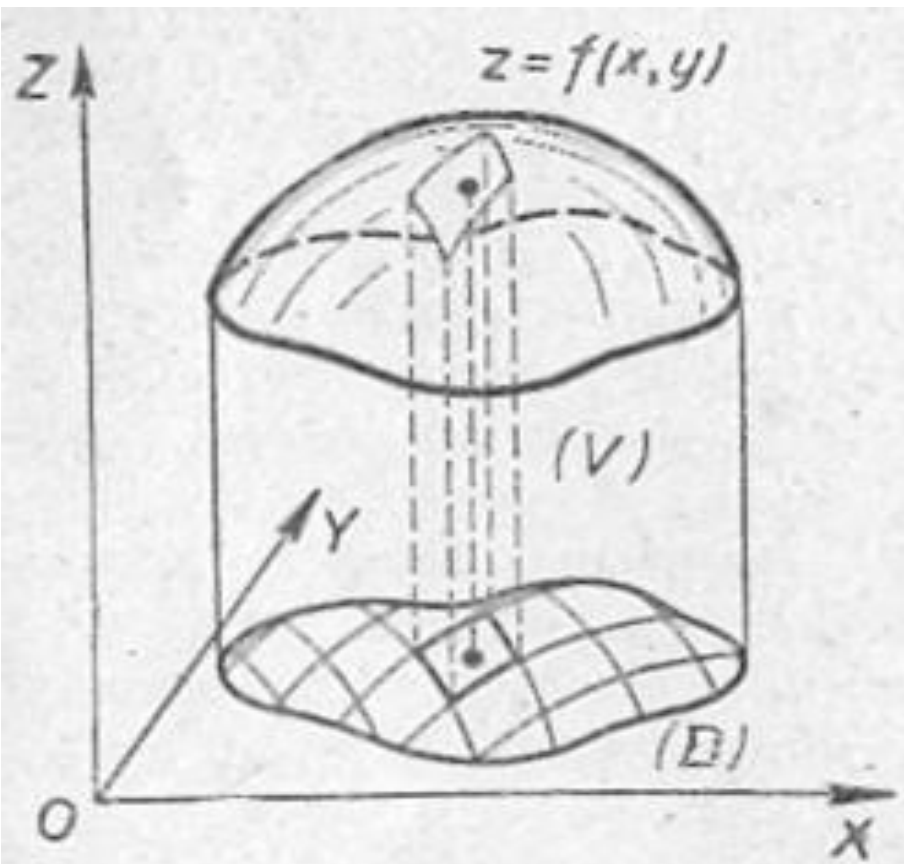


Рис.

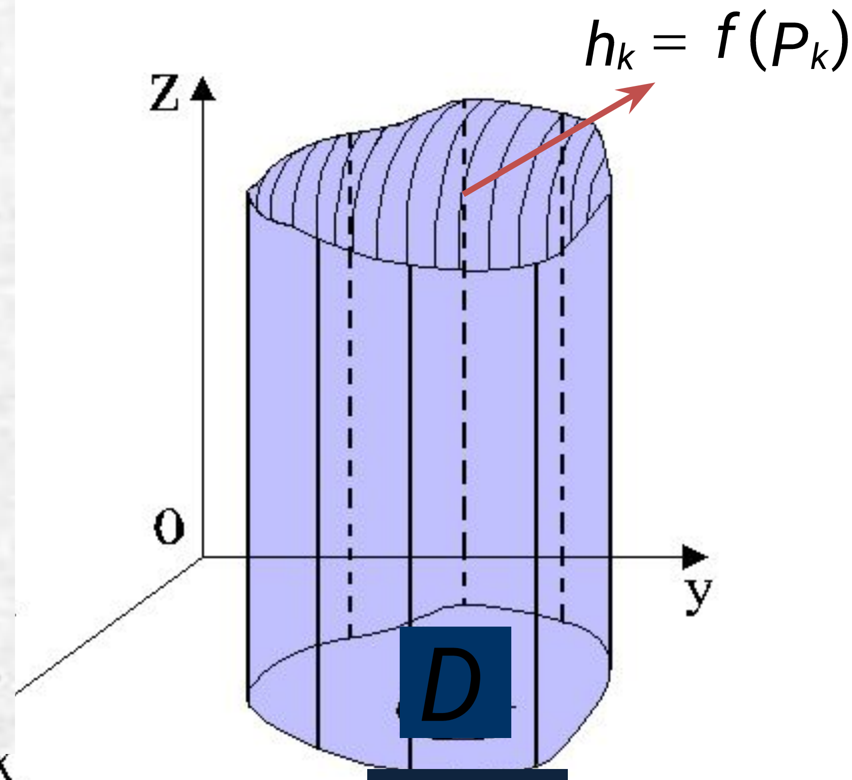


Рис.

- **Замечание 1.** Если непрерывная функция $z = f(P)$ не сохраняет знак в области D, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x;y)dxdy$

с геометрической точки зрения интерпретируют как алгебраическую сумму объемов, учитываемых со знаком $"+"$ или $"-"$ в зависимости от того, лежит ли поверхность $z = f(x,y)$ выше или ниже, соответственно, плоскости Oxy.

Основные свойства двойного интеграла

На двойные интегралы переносятся все основные свойства обыкновенного (однократного) определенного интеграла.

Свойство 1. Пусть функция $z = f(P)$ интегрируема в области $D \subset R^2$, где $D = D_1 \cup D_2$ и D_1, D_2 пересекаются только по своим границам. Тогда функция интегрируема отдельно в D_1 и в D_2, причем справедливо равенство:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Основные свойства двойного интеграла

Пусть функция $z = f(x, y)$ интегрируема в области $D \subset R^2$ и область D разбита на две подобласти $D_1, D_2,$

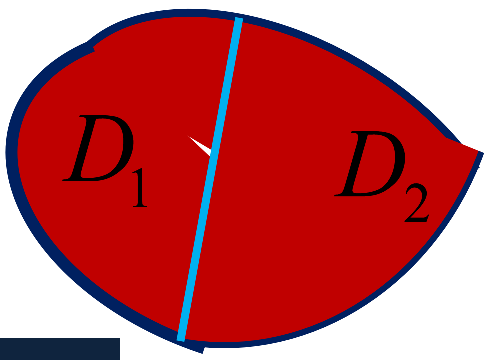


Рис.

пересечение которых пусто (см. рис.5) .

Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy$$

Основные свойства двойного интеграла

Свойство 2. Если функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы в области $D \subset R^2$, то в $D \subset R^2$ будут интегрируемы также следующие функции:

1. $f(x,y) \pm g(x,y);$ 2. $k \cdot f(x,y),\quad k = const$

3. $\left| f(x,y) \right|;$ 4. $f(x,y) \cdot g(x,y);$

5. $\dfrac{1}{f(x,y)};\quad \left| f(x,y) \right| \geq \alpha \quad \forall (x,y) \in D$

Основные свойства двойного интеграла

Для функций 1-3 справедливы следующие формулы:

$$1.\ \iint\limits_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy,$$

$$2.\ \iint\limits_D k \cdot f(x,y)dxdy = k \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy,$$

$$3.\ \left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)| dxdy$$

Основные свойства двойного интеграла

Свойство 3. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области $D \subset R^2$ и $f(x,y) \le g(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$, то имеет место

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy$$

Свойство 4. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области $D \subset R^2$ и $f(x,y) > 0$ для $\forall (x,y) \in D$, то

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy < \iint\limits_D g(x,y)dxdy, \quad D_1 \subset D.$$

Основные свойства двойного интеграла

Свойство 5.

$$\iint\limits_D dxdy = S_D, \quad S_D \text{ — площадь } D$$

Свойство 6.

Объем цилиндрического тела

$$V = \iint\limits_D f(x;y)dxdy$$

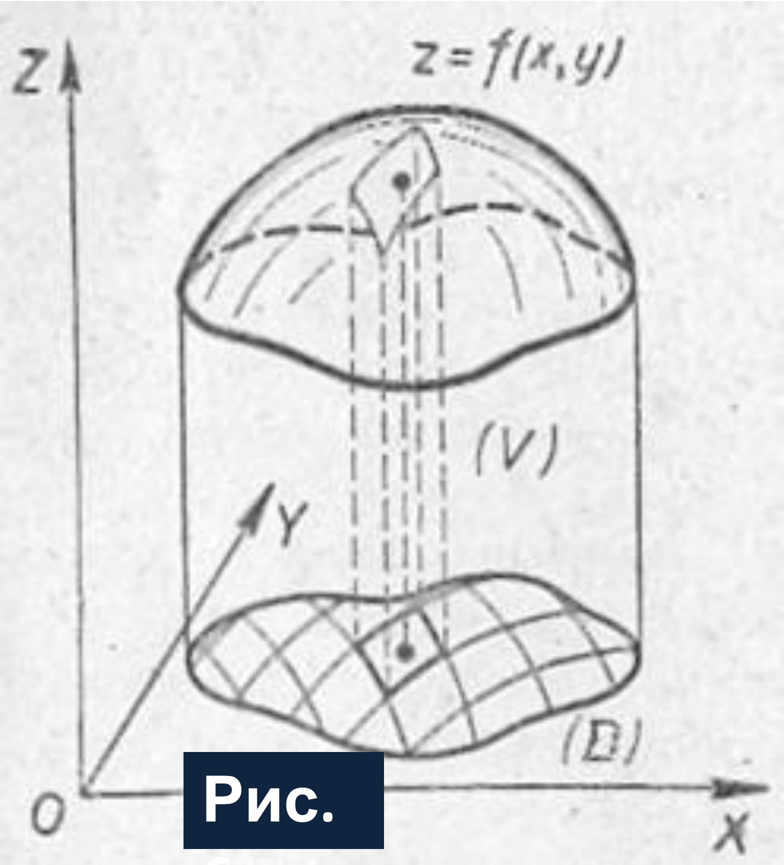


Рис.

Теорема о среднем значении

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D \subset R^2$, тогда найдется хотя бы одна точка, $P_0(x_0, y_0) \in D$, в которой выполняется следующее равенство:

$$\iint\limits_D f(x; y)dxdy = f(P_0) \cdot S_D.$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

О п р е д е л е н и е . Замкнутая область $D \subset R^2$ называется *правильной в направлении оси* Ox *(оси* Oy *)*, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D и параллельная оси Ox (оси Oy), пересекает границу этой области только в двух точках, см. рис. 7 (рис.8).

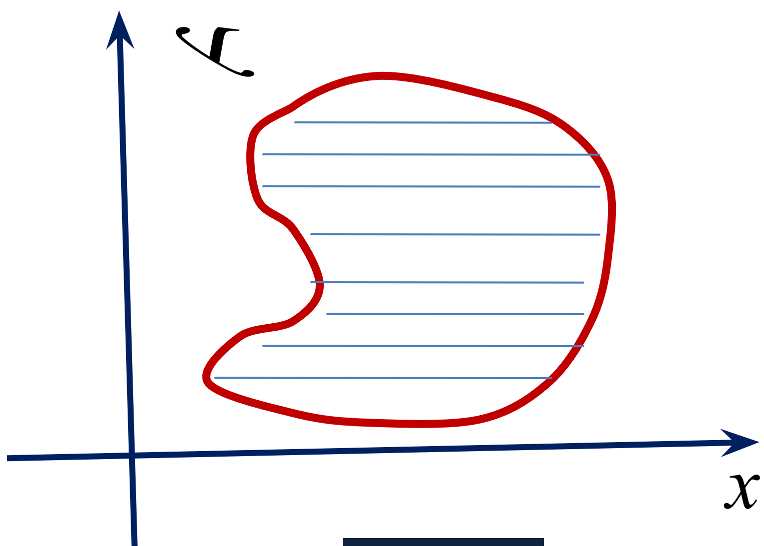


Рис.

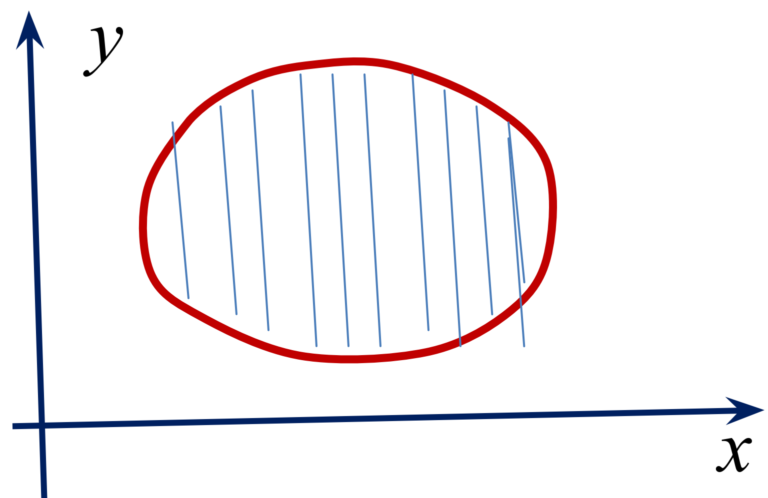


Рис.

Замечание. Область $D \subset R^2$, правильная в направлении одной оси, может быть или не быть правильной в направлении другой оси. Например, область, изображенная на рис.,

– неправильная в направлении оси Oy (см. рис.9);

область, изображенная на рис.10,–правильная в направлении и оси Oy, и оси Ox (см. рис.2).

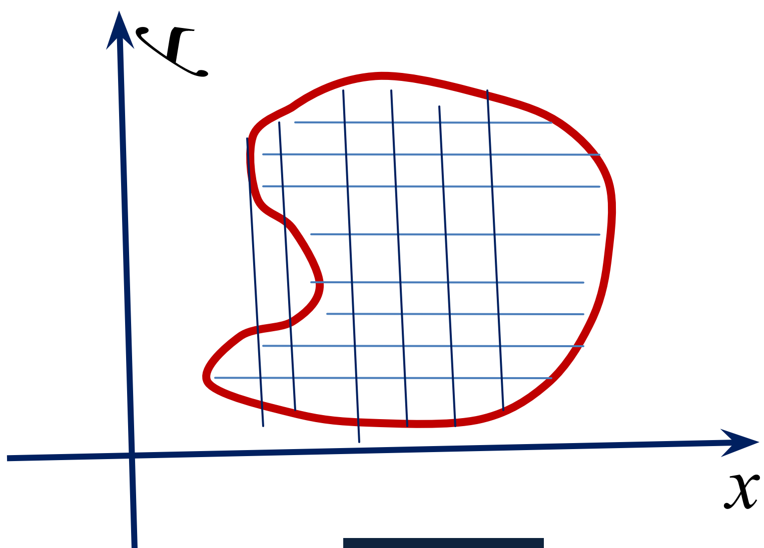


Рис.

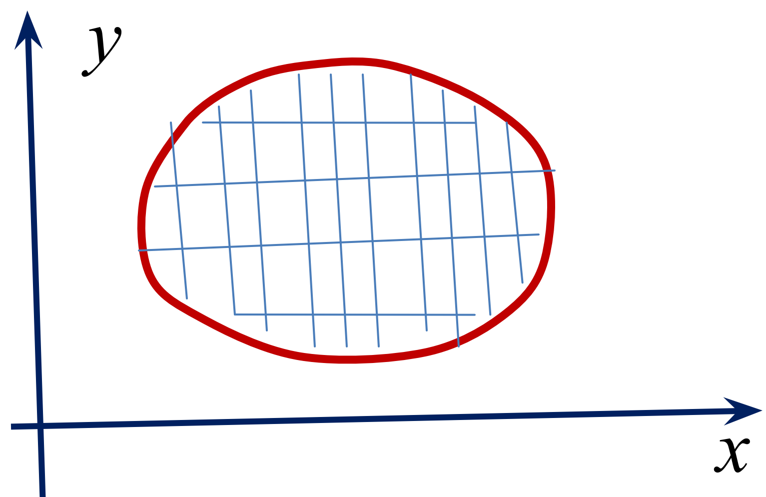


Рис.

Теорема о сведении двойного интеграла к повторному

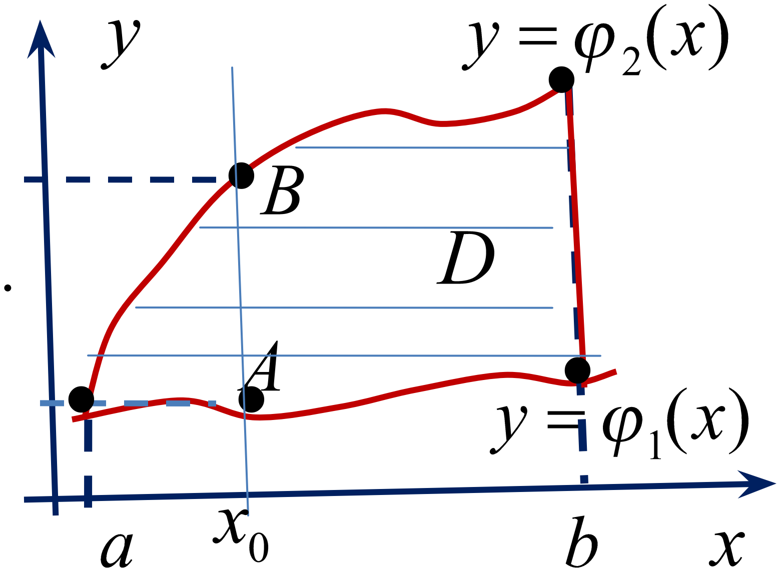
Пусть область $D \subset R^2$ ограничена линиями:

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x),\ x = a,\ x = b$$

причем на отрезке $[a;b]$ функции $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\quad \forall x \in [a;b].$

Функция $z = f(x,y)$ непрерывна в замкнутой области D.

Тогда



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

Теорема о сведении двойного интеграла к повторному

Пусть область $D \subset R^2$ ограничена линиями:

$$x = \psi_1(y),\ x = \psi_2(y),\ y = c,\ y = d$$

причем на отрезке $[c;d]$ функции $\psi_1(y),\ \psi_2(y)$ $\forall y \in [c;d]$.

Функция $z = f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D.
Тогда

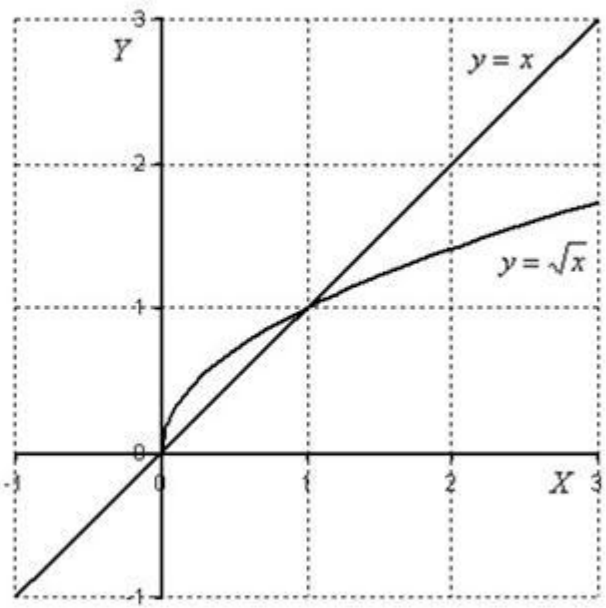
$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

Примеры вычисления двойного интеграла

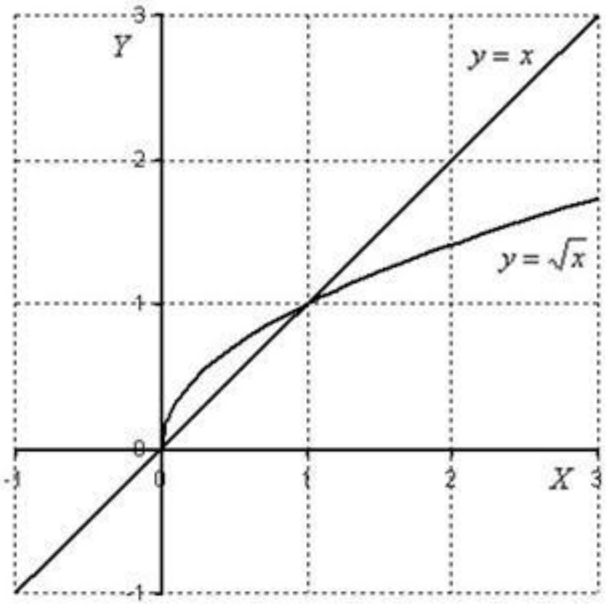
Пример 1. Вычислить двойной интеграл:

Решение: Изобразим область интегрирования на чертеже:

Таким образом:



Обратим внимание на следующее действие: в данном случае можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл.



Обратим внимание на следующее действие: в данном случае можно вынести «икс» из внутреннего интеграла во внешний интеграл.
Во внутреннем интеграле

Интегрирование проводится по «игрек», следовательно, «икс» считается константой. Следовательно, константу можно вынести за знак интеграла.
По формуле Ньютона-Лейбница, найдём внутренний интеграл:

Вместо «игрека» подставляем функции!

Полученный результат подставим во внешний интеграл:

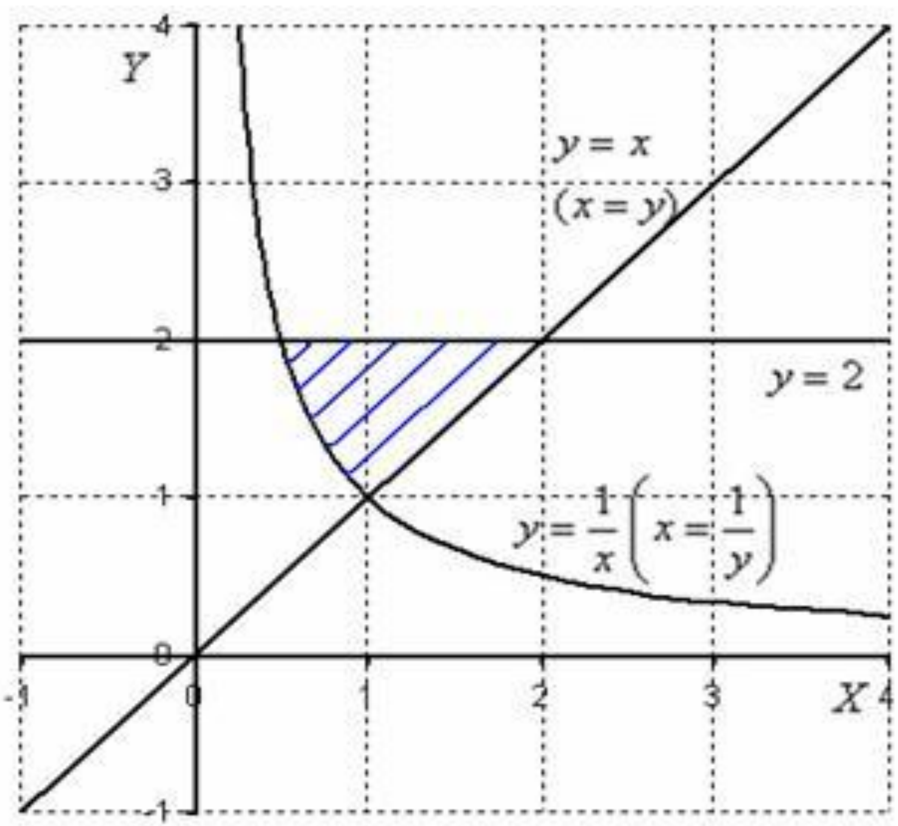
при этом ни в коем случае не забываем про «икс», который там уже находится:

Ответ: $\frac{1}{15}$.

Примеры вычисления двойного интеграла

Вычислить

Решение. Изобразим область интегрирования на чертеже:



Необходимо разделить область на две части, при этом необходимо будет вычислить следующие интегралы: