

Планиметрия

Треугольники и четырехугольники

Готовимся к ГИА



Будилова С.В., МОУ лицей N° 2, г.Волгоград

Треугольники

```
graph TD; A[Треугольники] --> B[Прямоугольный]; A --> C[Треугольник общего вида]; A --> D[Равнобедренный]; D --> E[Равносторонний];
```

Прямоугольный

Равнобедренный

Треугольник общего вида

Равносторонний

Прямоугольный треугольник

$$\text{☞ } b^2 = c \cdot c_1$$

$$\text{☞ } a^2 = c \cdot c_2$$

$$\text{☞ } h^2 = c_1 \cdot c_2$$

$$\text{☞ } a^2 + b^2 = c^2$$

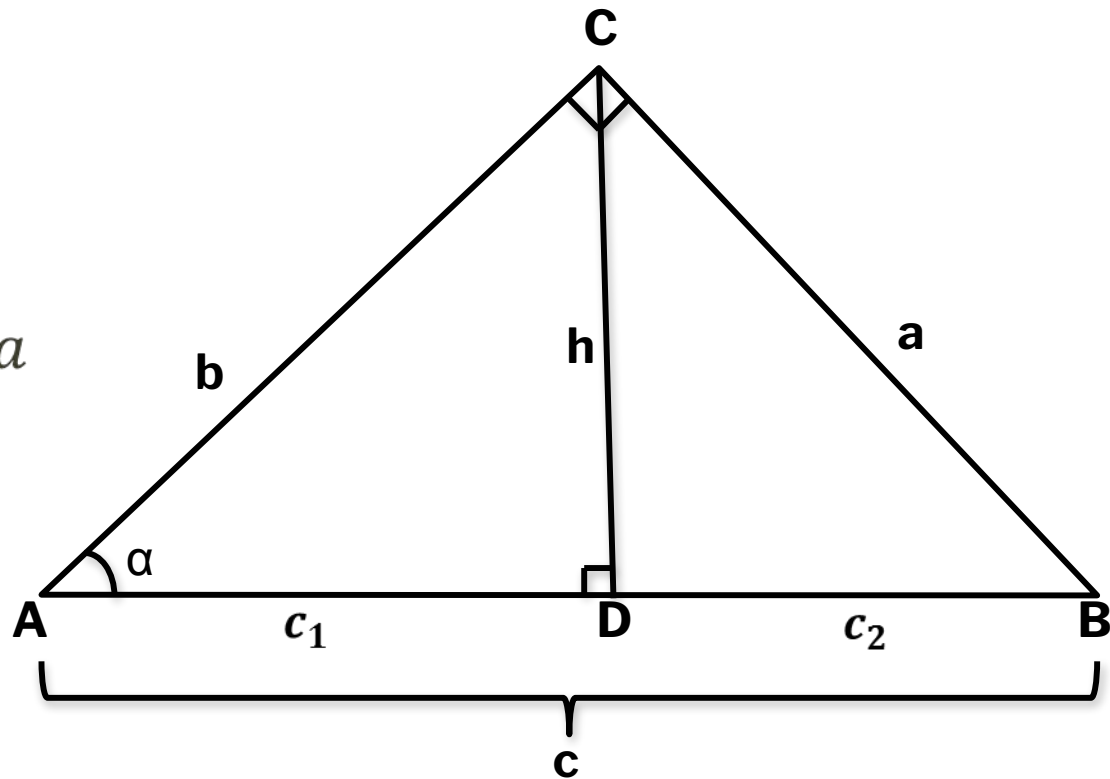
☞ Если $\alpha = 30^\circ$, то $c = 2a$

$$\text{☞ } R = \frac{c}{2}$$

$$\text{☞ } r = \frac{a+b-c}{2}, r = \frac{S}{p}$$

$$\text{☞ } S = \frac{1}{2} c \cdot h$$

$$\text{☞ } S = \frac{1}{2} a \cdot b$$



Треугольник общего вида

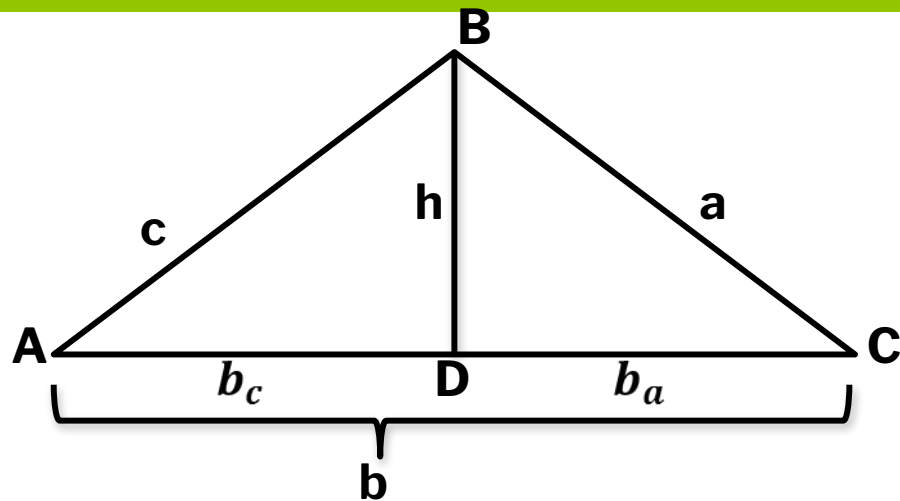
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2b \cdot b_a$$

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2b \cdot b_c$$

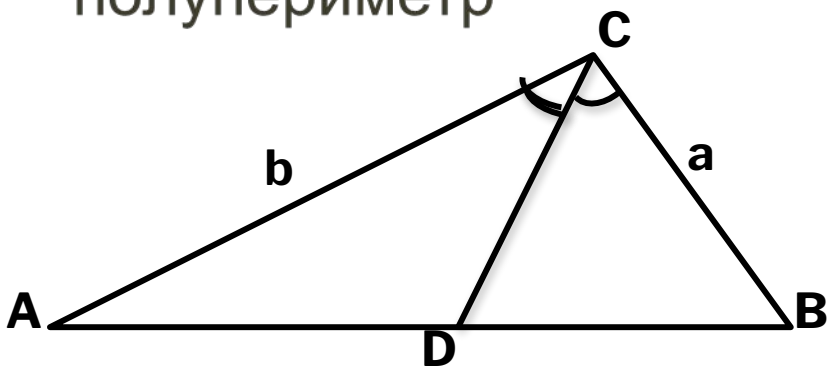
$$S = \frac{1}{2} b \cdot h$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

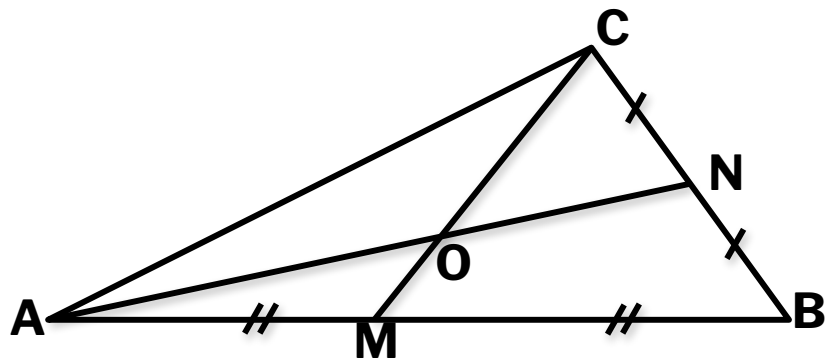
$$r = \frac{S}{p}, \text{ где } S - \text{ площадь, } p - \text{ полупериметр}$$



$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S}, \text{ где } S - \text{ площадь}$$



CD – биссектриса, $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$



$$OM = \frac{1}{3} CM, \quad OC = \frac{2}{3} CM$$

Треугольник общего вида

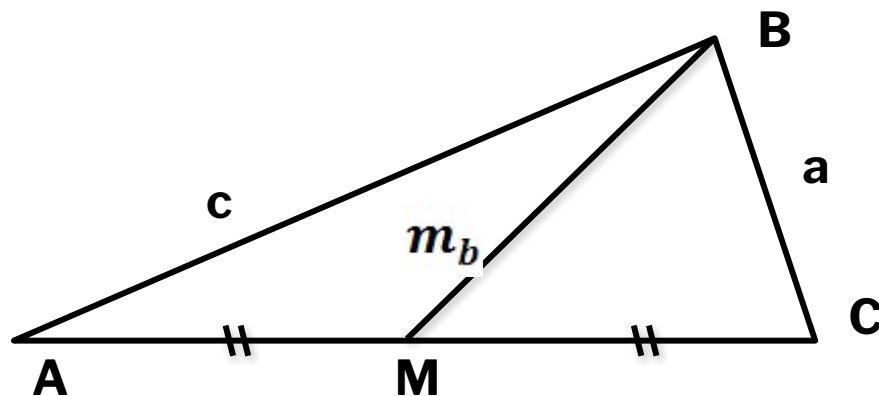
□ Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C$$

□ Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R$$

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

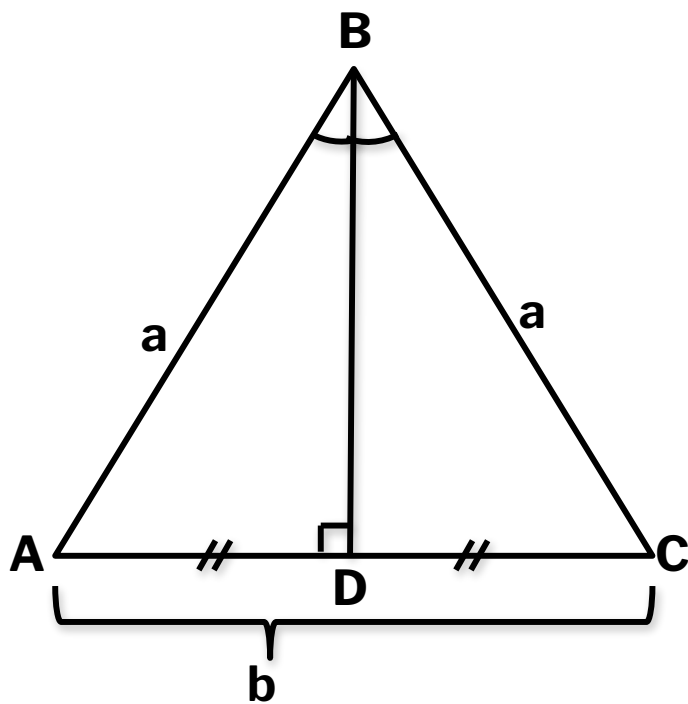


BM – медиана, $m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$

Средняя линия треугольника – отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Любая медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.
Если проведены все три медианы, то они делят треугольник на 6 равновеликих треугольников

Равнобедренный треугольник



∞ BD – медиана, высота и биссектриса

∞ $\angle A = \angle C$

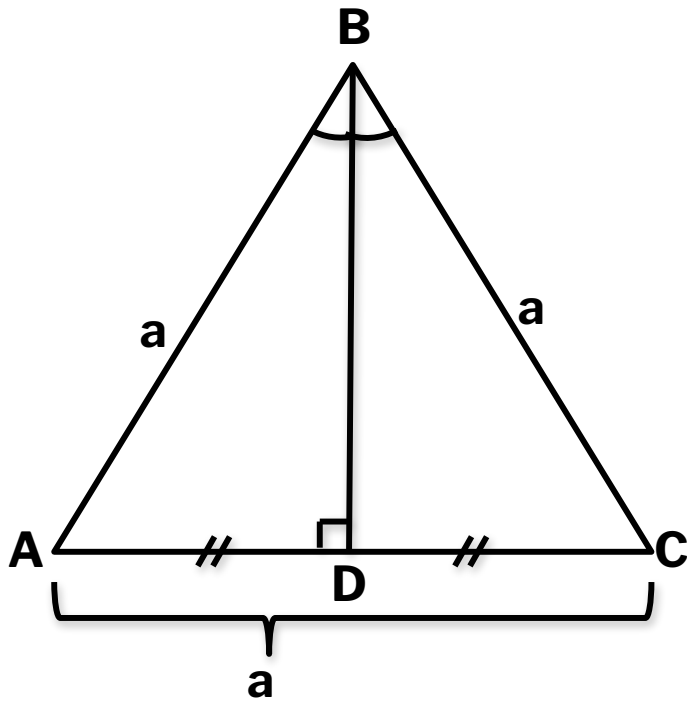
□ В прямоугольном равнобедренном треугольнике:

□ 1) острые углы по 45°

□ 2) если c – гипотенуза, a – катет, то

$$c = a\sqrt{2}$$

Равносторонний треугольник



□ m_a - медиана, h_a высота, l_a - биссектриса

$$m_a = h_a = l_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$R = 2r$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Четырехугольники

Произвольные
четырехугольники

Параллелограмм

Трапеция

Прямоугольник

Ромб

Равнобокая

Разнобокая

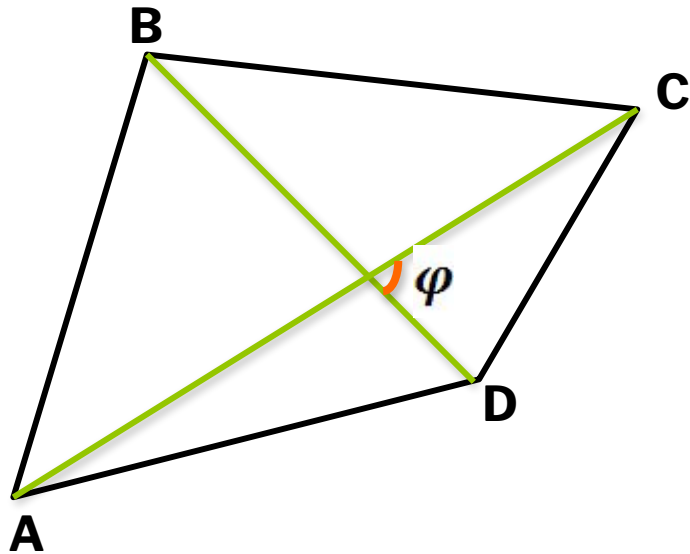
Прямоугольная

Квадрат

Произвольный
параллелограмм



Произвольный четырехугольник



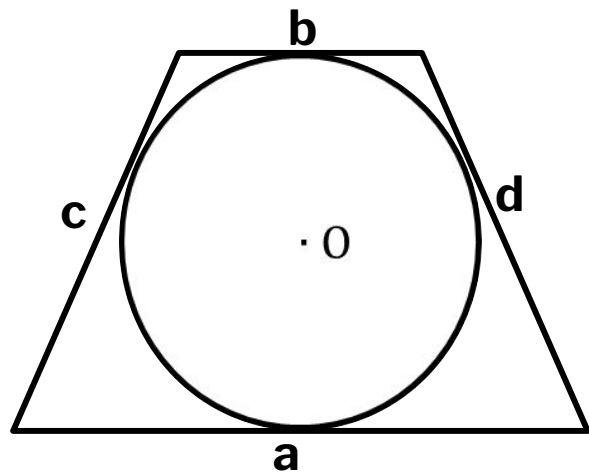
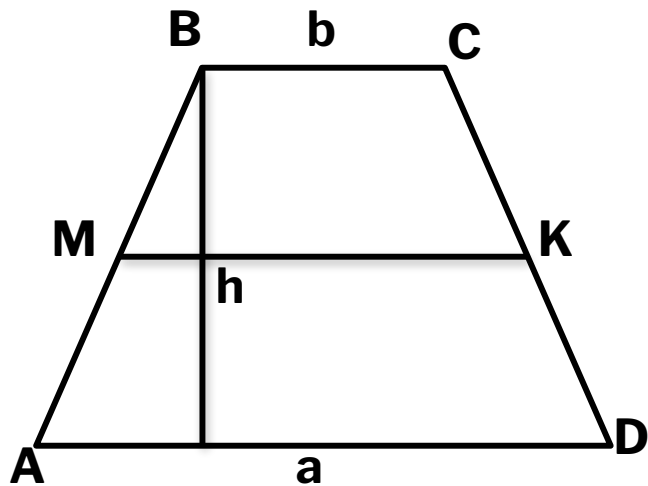
$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \varphi$$

∞ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

□ В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны

□ В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°

Трапеция



☞ МК – средняя линия

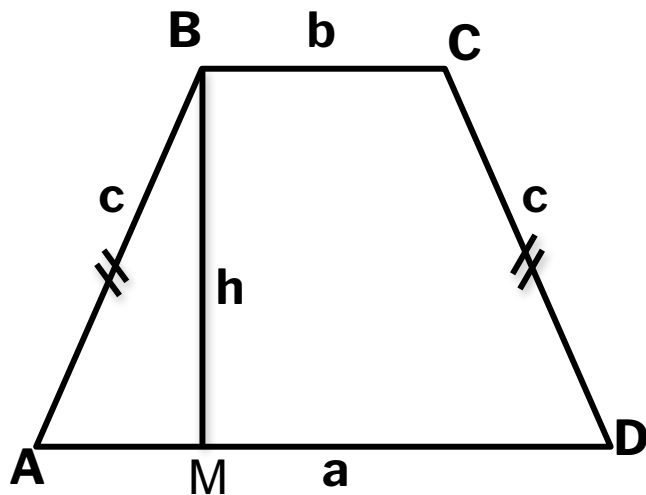
☞ $МК = \frac{a+b}{2}$

☞ $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

☞ Если в трапецию вписана окружность, то $a + b = c + d$

☞ $\angle DAB + \angle ABC = 180^\circ$

Равнобокая трапеция

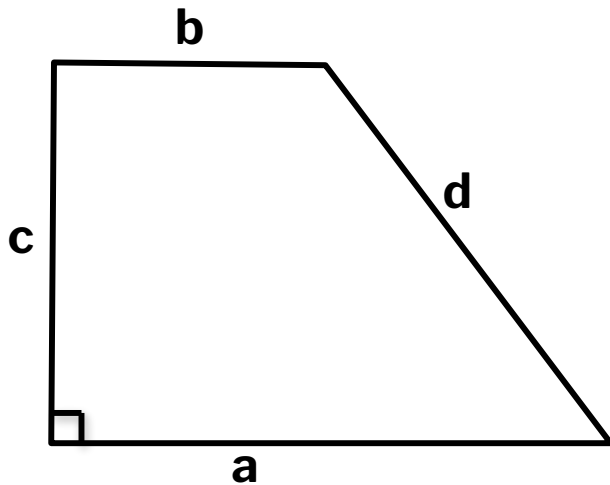


Площадь равнобедренной трапеции с радиусом вписанной окружности r , и углом при основании α :

$$S = \frac{4r^2}{\sin \alpha}$$

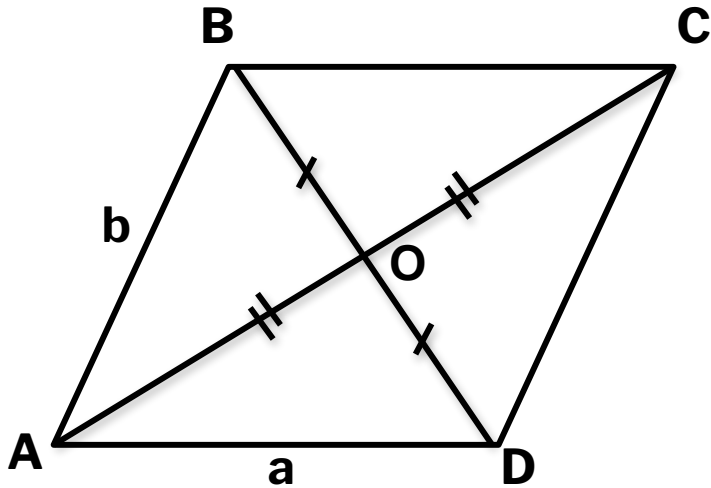
- ☞ $\angle DAB = \angle ADC$
- ☞ Около равнобокой трапеции всегда можно описать окружность
- ☞ Диагонали в равнобокой трапеции равны
- ☞ $AM = \frac{a-b}{2}$ $MD = \frac{a+b}{2}$
- ☞ Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.

Прямоугольная трапеция



- Высота прямоугольной трапеции равна ее меньшей боковой стороне и равна диаметру вписанной окружности.
- Если в прямоугольную трапецию вписана окружность, то площадь трапеции равна произведению ее оснований.

Параллелограмм



□

$$\ni AB = CD, AD = BC$$

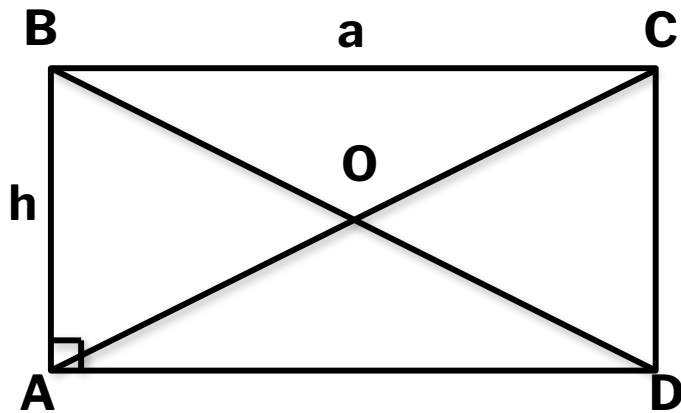
$$\ni \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$$

$$\ni AC^2 + BD^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$\ni S = a \cdot h$, где h - высота параллелограмма, проведенная к стороне a .

$$\ni S = a \cdot b \cdot \sin \angle A$$

Прямоугольник



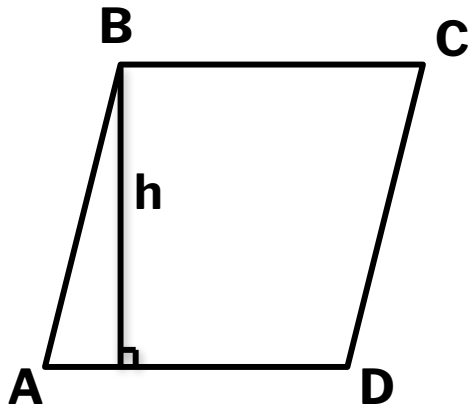
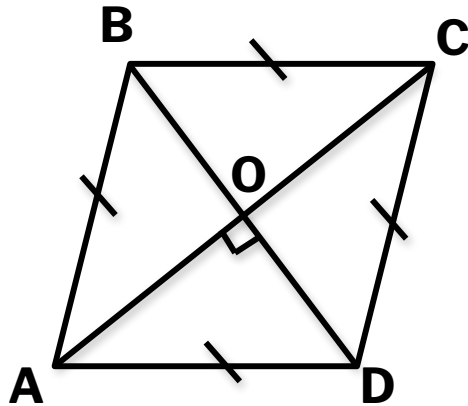
☞ $AO = BO = CO = DO$

☞ $AC = BD$

☞ $S = a \cdot h$

☞ Около прямоугольника можно описать окружность, центр которой находится в точке пересечения диагоналей, а радиус равен половине длины диагонали

Ромб



☞ $AC \perp BD$

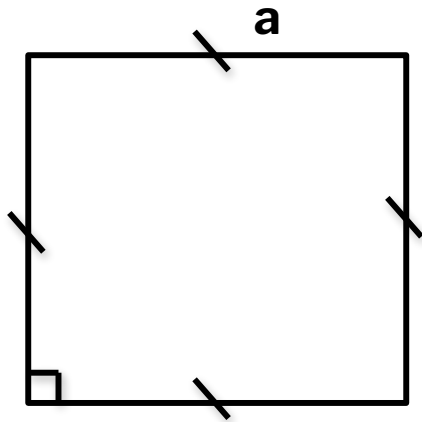
☞ $\angle OAD = \angle OAB$

☞ $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$

☞ $S = a \cdot h$

☞ В ромб всегда можно вписать окружность, центр которой – точка пересечения диагоналей

Квадрат



☞ $S = a^2$

☞ $S = \frac{1}{2}d^2$, где d – диагональ

☞ В квадрат можно вписать окружность и около квадрата можно описать окружность

Использованная литература

- 1) Черняк А.А., Черняк А.Ж. «Геометрия 7 – 11(ЕГЭ: шаг за шагом».
- 2) Гайштут А. Г., Литвиненко Г.Н. «Планиметрия 8 – 9. Задачник к школьному курсу»